TFY4125 Fysikk: Kort LF til prøveeksamen Mekanikk 2023

1) En Tesla Model 3 Performance hevdes på britiske nettsider å kunne akselerere fra 0 til 62 mph (miles per hour) i løpet av 3.3 sekunder. 1 mile er 1609.34 m. **Hva er da akselerasjonen i enheten $\mathbf{m/s^2}$?**

$$a = 62 \cdot 1609.34/3600 \cdot 3.3 = 8.4 \text{ m/s}^2$$

E) 8.4

Oppgave 2 - 4: Farten til en lite utholdende sprinter kan beskrives med funksjonen $v(t) = at\exp(-t/\tau)$. Her er t tiden målt i sekunder mens de to konstantene har verdi $a = 4.0$ m/s^2 og $\tau = 5.0$ s.

2) Hva er sprinterens akselerasjon i startøyeblikket ($t = 0$)?

$$dv/dt = a(1 - t/\tau)\exp(-t/\tau)$$

som med $t = 0$ er lik $a = 4.0$ m/s^2

C) 4.0 m/s^2

3) Hva er sprinterens maksimale fart?

Maksimal fart der $dv/dt = a(1 - t/\tau)\exp(-t/\tau) = 0$, dvs for $t = \tau$. Og $v(\tau) = a\tau/e = 4 \cdot 5/e = 7.4$ m/s

F) 7.4 m/s

4) Hvor langt kommer sprinteren på 5 sekunder?

Oppgitt: $\frac{d}{dt}[t\tau\exp(-t/\tau)] = (\tau - t)\exp(-t/\tau)$

Fra $v = dx/dt$ følger $dx = v\,dt$ og dermed

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = a\int_0^t t\exp(-t/\tau)\,dt.$$

Oppgitt sammenheng inspirerer til delvis integrasjon, med resultatet

$$x(\tau) = a\tau^2(1 - 2/e) = 26 \text{ m}$$

A) 26 m

Oppgave 5 - 7: Ei lita og kompakt kule ruller uten å gli på en krum bane. Kulas massesenter følger banen

$$y = y_0\,(\xi^4 - 2\xi^2).$$

Her er $y_0 = 0.020$ m, og $\xi = x/x_0$ med $x_0 = 1.00$ m. Koordinatene x og y angir hhv horisontal og vertikal posisjon. Kula starter ved $\xi = -2$ med starthastighet lik null og ruller til $\xi = 1$.

5) Banen er brattest i startposisjonen. **Hva er banens helningsvinkel her (i absoluttverdi, og målt i grader)?**

Vi har $dy/dx = \tan\beta$. Her er $dy/dx = (y_0/x_0)(4\xi^3 - 4\xi)$. I startposisjonen: $dy/dx = 0.020 \cdot (-32 + 8) = -0.48$. Dermed er helningsvinkelen $|\beta| = 26°$.

E) 26

6) Hva er kulas maksimale fart?

Banens to bunnpunkter (og lokalt topp-punkt ved $x = 0$) lokaliseres ved å sette $dy/dx = 0$, dvs

$$dy/dx = (y_0/x_0)(4\xi^3 - 4\xi) = 0.$$

De tre løsningene er $\xi = 0$ og $\xi = \pm 1$, dvs $x = 0$ og $x = \pm x_0$. Farten er maksimal i de to bunnpunktene $\xi = \pm 1$. Energibevarelse gir, med en høydeforskjell $h = 0.18$ m, en maksfart

$$v = \sqrt{10gh/7} = 1.6 \text{ m/s}.$$

C) 1.6 m/s

7) Hva er kulas akselerasjon i $x = 0$?

I $x = 0$ er $dy/dx = 0$ slik at baneakselerasjonen er null og total akselerasjon er lik sentripetalakselerasjonen. Invers krumningsradius er her ganske enkelt lik $d^2y/dx^2 = (4y_0/x_0^2)(3\xi^2 - 1)$ som med $\xi = 0$ blir -0.08 pr meter. (Minustegnet tilsvarer at banen krummer nedover.) Her er $y = 0$ slik at høyden er 0.16 m lavere enn i startposisjonen. Dermed:

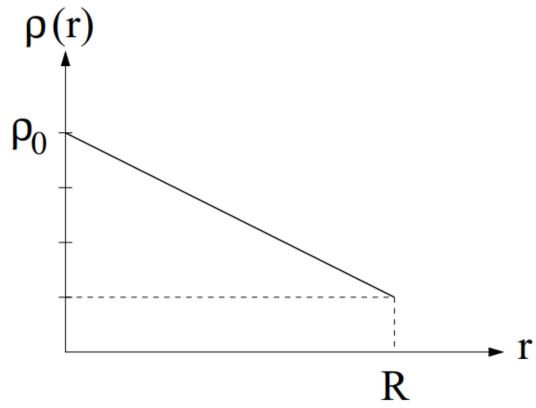
$$a = v^2 y'' = (10 \cdot 9.81 \cdot 0.16/7) \cdot 0.08 = 0.18 \text{ m/s}^2.$$

F) 0.18 m/s^2

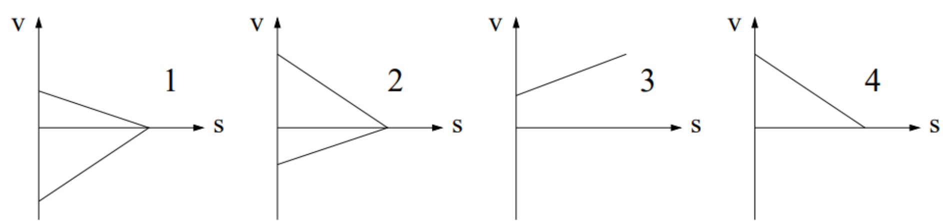
8) Figuren over viser en enkel lineær modell for jordklodens massetetthet ρ som funksjon av avstanden r fra jordas sentrum. Vi antar at jordkloden er ei hard kule med radius R. Med denne modellen kan jordklodens masse skrives på formen $M = \beta\rho_0 R^3$. **Hva blir tallverdien av β?** Oppgitt: $dV = 4\pi r^2 dr$, $dm = \rho dV$

Grafen tilsvarer $\rho(r) = \rho_0(1 - 3r/4R)$. Dermed:

$$M = \int dm = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2(1 - 3r/4R)\,dr = \frac{7\pi}{12}\rho_0 R^3.$$



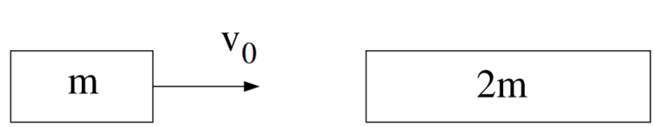
C) $7\pi/12$



9) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene over viser en mulig graf for klossens hastighet v? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

Det er to mulige utfall: Klossen glir oppover med avtagende fart og stopper. Statisk friksjon er tilstrekkelig til at den ikke glir ned igjen. (Graf 4.) Alternativt er statisk friksjon så liten at klossen glir ned igjen med økende fart. (Graf 2.) Pga kinetisk friksjonsarbeid har klossen mistet noe mekanisk energi slik at farten er mindre ved bunnen av skråplanet enn den var ved samme sted på vei opp.

F) Nr 2 og 4



10) Anta at klossene med masse m og $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk. **Hvor stor andel av opprinnelig kinetisk energi er bevart etter kollisjonen?**

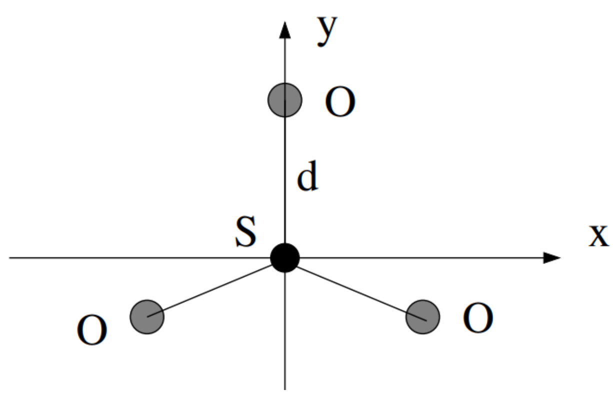
Impulsbevarelse gir $mv_0 = 3mv_1$ slik at felles fart etter kollisjonen er $v_1 = v_0/3$. Kinetisk energi før: $K_0 = mv_0^2/2$. Kinetisk energi etter: $K_1 = 3m(v_0/3)^2/2 = mv_0^2/6$. Andel bevart: $K_1/K_0 = 1/3$.

A) 1/3

11) Anta nå at klossene med masse m og $2m$ kolliderer fullstendig elastisk. **Hvor stor andel av opprinnelig kinetisk energi har klossen med masse m etter kollisjonen?**

Både impuls og kinetisk energi er bevart. Det gir to ligninger med løsning $v_1 = -v_0/3$ og $v_2 = 2v_0/3$ for fart etter kollisjonen for hhv m og $2m$. Andel kinetisk energi i klossen med masse m: $K_1/K_0 = (m(-v_0/3)^2/2)/(mv_0^2/2) = 1/9$.

D) 1/9



Oppgave 12 - 14: Svoveltrioksid, SO_3, er et trigonalt og plant molekyl med S i sentrum. Atomære masser er $16u$ for O og $32u$ for S. Avstanden mellom S og hver av de tre O-atomene er $d = 142$ pm. Vinklene O-S-O er 120°. Anta at molekylet ligger i xy-planet, med S i origo og et av O-atomene på y-aksen. Besvar disse oppgavene i enheten ud^2.

12) Hva er treghetsmomentet I_z mhp z-aksen?

La oss kalle oksygenmassen for $m = 16u$, slik at svovelmassen er $2m$ og hele molekylets masse er $5m$:

$$I_z = 3md^2 = 48ud^2$$

D) 48

13) Hva er treghetsmomentet I_y mhp y-aksen?

$$I_y = 2m(d\cos 30^\circ)^2 = 32u \cdot (\sqrt{3}d/2)^2 = 24ud^2$$

A) 24

14) Hva er treghetsmomentet I_x mhp x-aksen?

$$I_x = md^2 + 2m(d\sin 30°)^2 = md^2 + md^2/2 = 24ud^2$$

A) 24

15) En fallskjermhopper har masse 71 kg og bruker en fallskjerm med masse 14 kg og diameter 11 m. Den resulterende dragkoeffisienten er 1.5. **Hva blir terminalfarten i luft med tetthet 1.23 kg/m^3?**
Oppgitt: Luftmotstanden er $f = 0.5\rho A C_d v_t^2$.

Newtons 1. lov gir $f = (m + M)g$ slik at

$$v_t = \sqrt{8(m + M)g/\rho\pi d^2 C_d} = 3.08 \text{ m/s} = 11 \text{ km/h}.$$

A) 11 km/h

Oppgave 16 - 17: Ei kompakt kule med masse 141 g og diameter 52.5 mm gis et vertikalt støt (oppover) i avstand 13.125 mm fra senterlinjen (som går vertikalt gjennom kulas massesenter). Kraften som virker er konstant lik 150 N og varer i 2.0 ms.

16) Hva er kulas vertikale fart umiddelbart etter støtet?

Newtons 2. lov gir: $F = MV_0/T$, dvs $V_0 = FT/M = 150 \cdot 0.002/0.141 = 2.1$ m/s.

B) 2.1 m/s

17) Hva er kulas vinkelhastighet umiddelbart etter støtet?

Kraften virker i avstand $R/2$ fra senterlinjen, dvs kraftens arm er lik halve radien R. Newtons 2. lov for rotasjon om massesenteret gir: $FR/2 = I_0\omega_0/T$, som med $I_0 = 2MR^2/5$ gir $\omega_0 = 5FT/4MR =$ 101 rad/s.

E) 101 rad/s

Oppgave 18 - 20: Et lodd med masse 100 g henger i ei ideell vertikalstilt fjær med fjærkonstant 25 N/m.

18) Hvor mye er fjæra strukket når loddet henger i ro?

Newtons 1. lov gir: $mg = k\Delta y$, dvs $\Delta y = mg/k = 3.9$ cm.

C) 3.9 cm

19) Loddet settes i vertikale svingninger, og vi observerer at dempingen er svak. **Hva er svingetida (perioden) for loddets svingninger?**

Med svak demping er svingetida $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = 0.40$ s.

B) 0.40 s

20) Anta at dempingskraften er proporsjonal med loddets fart, $f = -bv$, med dempingsfaktor $b = 44$ g/s. **Hvor lang tid tar det før loddets svingeamplitude er redusert til 25% av startverdien?**

$A(t) = A_0 \exp(-\gamma t)$ med $\gamma = b/2m$. Dermed: $0.25 = \exp(-bt/2m)$, dvs $t = (2m/b) \ln 4 = 6.3$ s.

E) 6.3 s