TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 7.

Oppgave 1

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $MD^2/3$ (se forelesningene). En ekstra (punkt-)masse m i avstand d gir ganske enkelt et ekstra bidrag md^2, slik at

$$I = \frac{1}{3}MD^2 + md^2.$$

Riktig svar: A.

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\boldsymbol{p}_i = mv\hat{x}.$$

Riktig svar: B.

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls mhp A, dens *banedreieimpuls* mhp A er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i = -d\hat{y} \times mv\hat{x} = mvd\hat{z}.$$

Med impuls i x-retning bidrar ikke x-komponenten av $\boldsymbol{r}$ til dreieimpulsen. Riktig svar: B.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment mhp A som påvirker systemet, og dreieimpulsen mhp A er bevart: $\boldsymbol{L}_f = \boldsymbol{L}_i = mvd\hat{z}$. Riktig svar: B.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvd mhp A rett etter sammenstøtet. Systemet utfører ren rotasjon om A. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}}{I} = \frac{v/d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{z}.$$

Alternativt uttrykt som alternativ D i oppgaveteksten. Riktig svar: D.

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x-retning:

$$\boldsymbol{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\boldsymbol{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\boldsymbol{v} = \omega D\hat{x}$ helt nederst ($y = -D$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega D\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega D\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega d\hat{x}$. Følgelig:

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\frac{1}{2}MD + md\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting for ω fra e) gir

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{mv + MvD/2d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i \, \frac{1 + MD/2md}{1 + MD^2/3md^2}.$$

Riktig svar: A.

g) Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{MD/2md}{MD^2/3md^2} = \frac{3d}{2D}.$$

Dermed: Hvis $d = 2D/3$, er $p_f = p_i$. Treffer kula nøyaktig her, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.
Hvis $d > 2D/3$: Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\boldsymbol{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\boldsymbol{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)
Tilsvarende: Hvis $d < 2D/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.
(I det *videre forløpet*, når tyngdekraften får virke på systemet, med en arm mhp A som ikke er null, har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

h) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2} m v^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2} m (\omega d)^2 + \frac{1}{2} \int_{\text{staven}} dm (\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} \int_{-D}^{0} \frac{M dy}{D} \omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 + \frac{1}{6} M D^2 \omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} m d^2 + \frac{1}{6} M D^2 \right) \frac{(v/d)^2}{(1 + MD^2/3md^2)^2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{K_i}{1 + MD^2/3md^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3md^2/MD^2},$$

og relativ endring, i absoluttverdi, som i alternativ A i oppgaveteksten.

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K / K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K / K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \to \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

Oppgave 2

a) **C**. Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

b) **C**. I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca $4 \cdot 10^5$ m. Dette blir bilimpulsens "arm" a. Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$ kg m^2/s.

c) **A**. Vi har $\tau = I_0\dot{\omega}$, N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$ i SI-enheter. Dessuten er $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$, også i SI-enheter. Dermed må I_0 være lik 1.0, i SI-enheten kg m^2.

3: Svingninger

a) Vi antar at Hookes lov, $F = -kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\omega_0^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$, og dermed med periode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Riktig svar: C.

b) og *c*) Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A\cos\phi$$

og

$$v_0 = -\omega_0 A\sin\phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos\arctan v_0/x_0\omega_0}.$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}.$$

Altså er både A og B riktige svar på oppgavene *b*) og *c*), dvs C er riktig svar.

d) Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\text{max}} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dette gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien. Riktig svar: C.

e) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 B\sin\omega_0 t + \omega_0 C\cos\omega_0 t$$

og dermed, ved hjelp av $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega_0$$

Riktig svar: B.

f) Maksimalt utsving:

$$x_{\text{max}} = A = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0\sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\text{max}} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right)} = v_0\sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0\sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI–enheter underveis. Følgelig er $x_{\text{max}} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\text{max}} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$ cm/s. Riktig svar: A.

g) Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Her har vi valgt positiv y-retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ($g = 0$) er klossens likevektsposisjon $y = 0$. I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen Δy ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta y + mg &= 0 \\ \Delta y &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$z = y - \Delta y$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{z} = -k(z + \Delta y) + mg = -kz$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ omkring likevektsposisjonen $z = 0$, dvs $y = \Delta y = mg/k$. (Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi $\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8\,\text{cm}$.) Riktig svar: A.

h) Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0.5$, der T er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5\cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

i) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1x$ og $-k_2x$. N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{m}\right)x = 0\,.$$

Sammenligning med "standardligningen" $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{altså} \quad \underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er $k = k_1 + k_2$. Riktig svar: C.

j) Når m forskyves x mot høyre, strekkes fjærene x_1 og x_2, og slik at x_1 og x_2 er forskjellige dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -\left(1/k_1 + 1/k_2\right)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\,, \quad \text{altså} \quad \underline{\omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. Riktig svar: B.

k) Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i *a*), og $\underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$. Riktig svar: C.