TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 13.

Oppgave 1
Tyngdekraften har komponent $mg \sin \alpha$ nedover parallelt med skråplanet. Normalkraften fra underlaget er lik tyngdekraftens normalkomponent $mg \cos \alpha$, siden det ikke er noen akselerasjon normalt på skråplanet. Når klossen glir, er det kinetisk friksjon, med friksjonskraft $f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Med konstant hastighet er $f = mg \sin \alpha$, dvs $\mu = \tan \alpha$. Riktig svar: D.

Oppgave 2
Klossen starter med mekanisk energi

$$E = mgh + mv_0^2/2 = mgL \sin \alpha + mv_0^2/2.$$

Den har mistet all denne mekaniske energien, dvs E tilsvarer friksjonsarbeidet

$$W_f = fL = \mu mgL \cos \alpha.$$

Dermed er

$$\mu = E/mgL \cos \alpha = \tan \alpha + v_0^2/2gL \cos \alpha.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 3
Total impuls er bevart i kollisjonen: $mv_0 = 2mv$, dvs $v = v_0/2$. Riktig svar: A.

Oppgave 4
$|\Delta K| = mv_0^2/2 - 2mv^2/2 = mv_0^2/2 - mv_0^2/4 = mv_0^2/4$. Riktig svar: C.

Oppgave 5
De to massene snur i høyden $h = L(1 - \cos \beta)$. Der er potensiell energi lik $2mgh$ og kinetisk energi null. Energibevarelse etter at kollisjonen er over gir da

$$mv_0^2/4 = mgh = mgL(1 - \cos \beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos(1 - v_0^2/8gL).$$

Riktig svar: B.

Oppgave 6
Matematisk pendel med lengde L og små utsving: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Riktig svar: A.

Oppgave 7
De fire punktmassene er alle i avstand d fra aksen, med $d^2 = (a/2)^2 + (a/2)^2 = a^2/2$. Dermed er $I_0 = 4ma^2/2 = 2ma^2$. Riktig svar: B.

Oppgave 8
Steiners sats, med en parallellforskyvning av aksen en lengde $a/2$, gir $I_1 = I_0 + 4m(a/2)^2 = 2ma^2 + ma^2 = 3ma^2$. Riktig svar: C.

Oppgave 9
Steiners sats, med en parallellforskyvning av aksen en lengde $a/\sqrt{2}$, gir $I_2 = I_0 + 4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2 + 2ma^2 = 4ma^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 10
Energibevarelse gir

$$mgh = mv^2/2 + MV^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + MV^2/2,$$

og impulsbevarelse horisontalt gir

$$mv_x = MV.$$

I ligningene over er v_x og v_y klossens hastighetskomponenter målt i labsystemet. Klossens hastighet relativt skråplanet blir ikke den samme som den vi måler i labsystemet, dvs y-komponentene blir like store, $v'_y = v_y$, siden skråplanet bare beveger seg horisontalt, men x-komponentene blir forskjellige, $v'_x = v_x + V$. Klossen befinner seg hele tiden *på* skråplanet, og med 45 graders helningsvinkel er det klart at $v'_y = v'_x$. Med andre ord, $v_y = v_x + V$. Nå har vi 3 ligninger for 3 ukjente, v_x, v_y og V. Vi kan eliminere v_y i energibevarelsesligningen med $v_y = v_x + V = (M/m + 1)V$, og deretter eliminere v_x med $v_x = MV/m$. Den resulterende ligningen for V er

$$mgh = M^2V^2/2m + m(M/m + 1)^2V^2/2 + MV^2/2 = \frac{1}{2}mV^2(1 + 3M/m + 2M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 3M/m + 2M^2/m^2}}\,.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 11
Løsningen her følger i stor grad samme spor som i oppgave 10, men nå har m (ringen) kinetisk energi

$$K_m = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = mv^2/2 + (mr^2)(v'/r)^2/2 = mv^2/2 + m(v')^2/2.$$

Her har vi brukt rullebetingelsen *i skråplanets referansesystem*, $\omega = v'/r$. Sammenhengen mellom ringens hastighet v i labsystemet og v' i skråplansystemet blir som for klossen i oppgave 10, så vi har:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x + V, \\ v'_y &= v_y = v'_x = v_x + V. \end{aligned}$$

Kombinert med (pga impulsbevarelse horisontalt) $v_x = MV/m$ gir dette

$$\begin{aligned} v'_x &= v'_y = v_y = (M/m + 1)V, \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (MV/m)^2 + (M/m + 1)^2V^2, \\ (v')^2 &= (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = 2(M/m + 1)^2V^2. \end{aligned}$$

Energibevarelse gir da

$$mgh = mv^2/2 + m(v')^2/2 + MV^2/2 = \ldots = \frac{1}{2}mV^2(3 + 7M/m + 4M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{3 + 7M/m + 4M^2/m^2}}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 12
Kortvarig støtkraft F tilsier at friksjonskraften f fra underlaget kan neglisjeres gjennom støtet med varighet Δt. Newtons 2. lov gir $F\Delta t = \Delta p = p = MV_0$. Newtons 2. lov for rotasjon, om akse gjennom CM, gir $\tau\Delta t = \Delta L = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0$. Støtkraften F angriper kuleskallet i høyde $H - R$ over sentrallinjen og virker dermed på kuleskallet med et dreiemoment $\tau = F(H - R)$ mhp aksen gjennom CM. Videre er $I_0\omega_0 = (2MR^2/3)(V_0/R) = 2MRV_0/3$ ved ren rulling. Dermed:

$$\frac{MV_0}{\Delta t} \cdot (H - R)\Delta t = 2MRV_0/3 \quad \Rightarrow \quad H - R = 2R/3,$$

dvs $H = 5R/3$. Riktig svar: E.

Oppgave 13
Indre dreieimpuls (spinn):

$$L_s = I_0\omega_0 = \frac{2}{3}MR^2 \cdot \frac{V_0}{R} = \frac{2}{3}MRV_0.$$

Banedreieimpuls:

$$L_b = |\boldsymbol{R}_{CM} \times M\boldsymbol{V}_0| = MRV_0.$$

Som vektorer peker disse to i samme retning, slik at total dreieimpuls blir $L = 5MRV_0/3$. Riktig svar: A.

Oppgave 14

$$L_b = MRV = 4.87 \cdot 10^{24} \cdot 108 \cdot 10^9 \cdot 35.2 \cdot 10^3 = 1.85 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kgm^2/s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 15

$$L_s \simeq \frac{2}{5}MR_0^2\omega_0,$$

som med $M = 4.87 \cdot 10^{24}$ kg, $R_0 = 6052 \cdot 10^3$ m og $\omega_0 = 2\pi/T_s = 2\pi/(243 \cdot 24 \cdot 3600)$ pr sekund gir $L_s = 2.14 \cdot 10^{31}$ kgm^2/s. Riktig svar: B.

Oppgave 16
Elektrisk feltstyrke mellom platene: $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$. Kondensatorens dipolmoment: $p = Qd$. Dermed er $p = \varepsilon_0 EAd$, slik at $p/Ad = p/V = \varepsilon_0 E$ (der $V = Ad$ er volumet mellom platene). Riktig svar: E.

Oppgave 17
Avstanden mellom $-2Q$ og hver av de to Q er d. Avstanden mellom de to Q er $2d\sin\alpha/2$. Total potensiell energi er da

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2d\sin\alpha/2} - 2 \cdot \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{1}{2\sin\alpha/2} - 4\right),$$

slik at $U < 0$ dersom $2\sin\alpha/2 > 1/4$, dvs $\alpha > 2\arcsin(1/8) \simeq 14°$. Riktig svar: B.

Oppgave 18

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1\right),$$

slik at $E(0) = \sigma/2\varepsilon_0$. Riktig svar: D.

Oppgave 19
Det elektriske feltet er null overalt inne i hulrommet og overalt inne i metallet (se forelesningene). Det betyr at hele volumet innenfor $r = 2R$ er et ekvipotensial. Dermed: $E_1 = E_2 = 0$ og $V_1 = V_2$. Riktig svar: A.

Oppgave 20
Kretsens totale motstand er $2R + (1/R + 1/R + 1/R)^{-1} = 7R/3$, slik at total strøm i kretsen er $3V_0/7R$. Denne fordeler seg naturligvis likt på de tre parallellkoblede motstandene, dvs strøm $V_0/7R$ gjennom hver av dem. Riktig svar: E.

Oppgave 21
Anta at det går en strøm I_1 i spole nr 1. Dette skaper et magnetfelt $B_1 = \mu_0(N_1/\lambda)I_1$ overalt inne i spolen (der vi antar lang, tettviklet spole). Det betyr at spole nr 2 omslutter en magnetisk fluks $\phi_2 = N_2B_1A = N_2\mu_0(N_1/\lambda)I_1A$, som igjen betyr at gjensidig induktans er

$$M = \phi_2/I_1 = \mu_0 N_1 N_2 A/\lambda.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 22
Her er maksimal strøm $V_0/R = 4.5$ A. Kretsens tidskonstant er $L/R = 1$ s. En strøm 4.0 A er noe mer enn en andel $1 - 1/e \simeq 0.62$ av maksimal strøm, så det bør ta noe mer enn 1 sekund å oppnå 4.0 A i kretsen. Vi bør nok satse på 2.2 s. Med litt regning: $I(t) = (V_0/R)(1 - \exp(-Rt/L))$, som løst mhp t gir

$$t = \frac{L}{R}\ln\left(\frac{1}{1 - RI(t)/V_0}\right) = 1.0\,\mathrm{s}\cdot\ln 9 = 2.2\,\mathrm{s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 23
Siden $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, har vi $L = 1/\omega_0^2C = 1/4\pi^2f_0^2C$, som med innsetting av oppgitte tallverdier gir $L = 63.1\cdot 10^{-12}$ H. Riktig svar: C.

Oppgave 24
Vi må benytte en kondensator med kapasitans $C = 1/4\pi^2f_0^2L$, som med oppgitte tallverdier gir $C = 25$ nF. Da er i grunnen bare B et aktuelt svar... La oss sjekke at vi får riktig Q-faktor med motstand som i alternativ B: Vi har $Q = \sqrt{L/C}/R$, dvs $R = \sqrt{L/C}/Q = \sqrt{10^{-6}/25\cdot 10^{-9}}/10^4 = 6.3\cdot 10^{-4} = 0.63\,\mathrm{m}\Omega$. Stemmer. Riktig svar: B.