

KLASSISK DYNAMIKK

①

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser, enheter SI-systemet [YF 1]

Eks: Masse ; $m = 79.2 \mu\text{g}$

Størrelse Symbol Måltall (Tallverdi) Enhet

Dekadisk prefiks: $\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$

Notasjon: $[m] = \text{kg}$ ("enheten til masse er kilogram")

Grunnenheter i SI:

lengde: $[l] = \text{m}$ (meter)

tid: $[t] = \text{s}$ (sekund)

masse: $[m] = \text{kg}$ (kilogram)

elektrisk strømstyrke: $[I] = \text{A}$ (ampere)

temperatur: $[T] = \text{K}$ (kelvin)

stoffmengde: $[n] = \text{mol}$

Sammensatte enheter:

hastighet: $[v] = \text{m/s}$

akselerasjon: $[a] = \text{m/s}^2$

Aulede enheter:

kraft: $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

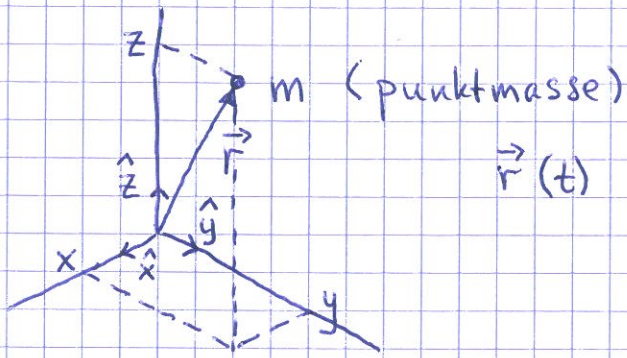
energi: $[W] = \text{Nm} = \text{J}$ (joule)

effekt: $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

Kinematikk [YF 2,3 ; LL 1]

2

(= beskrivelse av bevegelse)



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= m's posisjon ved tid t
i kartesiske koordinater

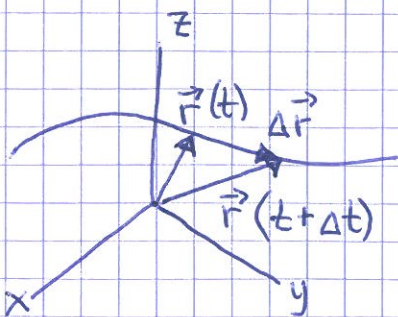
Enhetsvektorer \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} :

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløs})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Banen $\vec{r}(t)$ beskriver m's bevegelse:



$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= \text{forflytningen mellom} \\ &\quad t \text{ og } t+\Delta t \end{aligned}$$

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dus: $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ (da Δt er en skalar)

\vec{v} er tangent til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Vanlig notasjon i fysikk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad osv \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponenter, kartesiske:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad osv$$

$$\text{Tilsvarende: } a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad osv$$

Ser at: $\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

Forventer da:

$\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$

som stemmer:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \dots \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

Generalisering til 3D:

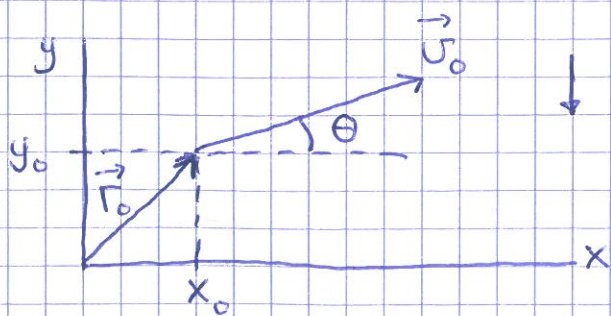
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: Anta konstant \vec{a} og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.
Bestem $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$.

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t ; \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Eks: Kast i tyngdefeltet



Finne $\vec{r}(t)$ og vis at $y(x)$,
banen, er en parabel.

$$\text{Løsn: } x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir $y(x)$ (vis selv)

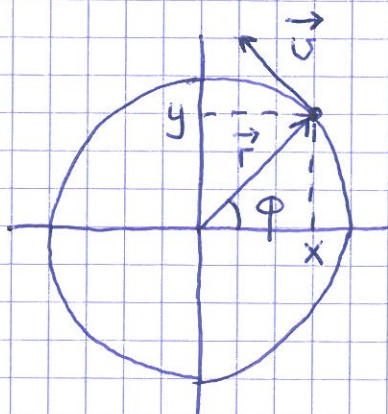
Øving 1: • Kast i motbakke.

• Gitt $a(v)$, hva blir $v(t)$?

Sirkelbevægelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

5



Polarkoordinat:

r = afstand fra origo

φ = vinkel mellem \hat{x} og \vec{r}

($\varphi > 0$ mot klokka)

Fra fig: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\tan \varphi = y/x$,

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (= \text{konst. for sirkelber.})$$

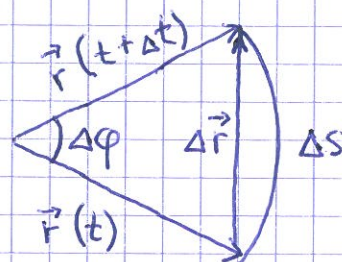
$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius:

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$



Når $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta r = |\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta \varphi$

$$\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$$

Dermed:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta \vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

6

Hvis v og $\omega = v/r$ er konst., har vi uniform sirkelbev., og da er

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt = \omega t, \text{ og med } \varphi(0) = 0 \text{ f\u00e5s}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

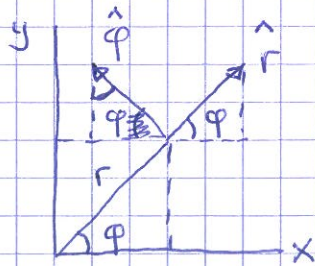
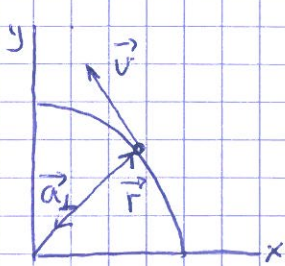
Har da:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}} \quad \text{Sentripetalakselerasjon}$$



$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Ser at: } \vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}, \quad \vec{a}_\perp = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi ogs\u00e5 baneakselerasjon:

$$a_{||} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(v r) = r \frac{dv}{dt} = r \dot{\omega}$$

$$\text{Total akselerasjon: } \vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\varphi}$$

$$\text{Vinkelakselerasjon: } \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

$$\text{Periode: } T = \text{oml\u00f8pstid}; [T] = s$$

$$\text{Frekvens: } f = \text{antall oml\u00f8p pr tidsenhet}; [f] = \text{Hz (henz)} = 1/s$$

$$\Rightarrow v = 2\pi r / T \Rightarrow T = 2\pi r / v = 2\pi / \omega, \quad f = 1/T = \omega / 2\pi$$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

(7)

Ekperimentelle ("empiriske") Lover

N1:
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

Med null netto ytre kraft \vec{F} på et legeme, forblir legemet i ro eller i retlinjet bevegelse med konstant hastighet \vec{v}

N2:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Med netto ytre kraft \vec{F} på et legeme, får legemet en akselerasjon prop. med \vec{F} , $\vec{a} = \vec{F}/m$; $m =$ legemets masse

N3:
$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} , virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Legemene vekselvirker med hverandre.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$

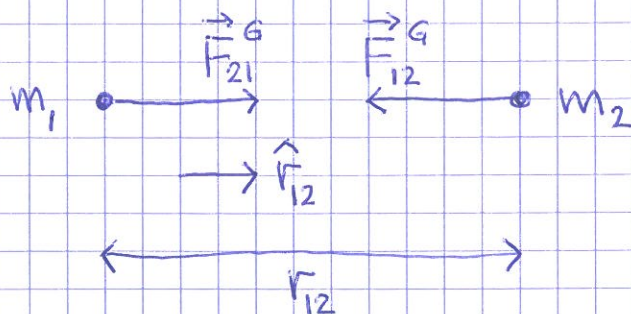
Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5; LL 2.1] ⑧

Viktige i klassisk dynamikk og elektromagnetisme er:

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga ladning

[Har dessuten svake og sterke kjernekrefter med kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, som beskriver hvor radioaktivitet og det faktum at kjernepartikler holdes sammen]

Newton's gravitasjonslov:

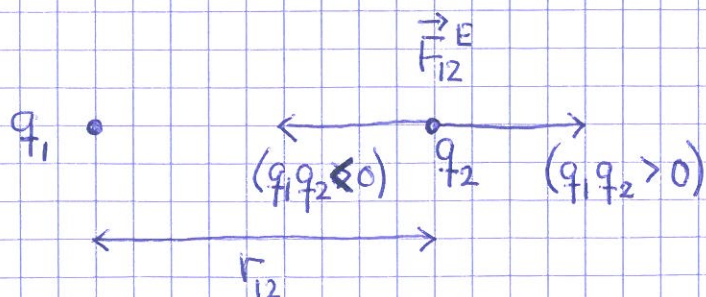


$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

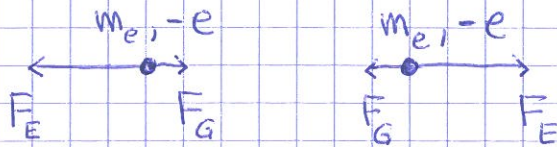
$$[q] = C = A \cdot s \text{ (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Eks: To elektroner



9

$$m_e \sim 10^{-30} \text{ kg}, \quad e \sim 10^{-19} \text{ C}$$

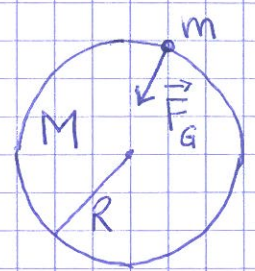
$$\Rightarrow F_E / F_G \sim 10^{43} \Rightarrow F_G \text{ kan neglisjeres}$$

Mellom jorda og månen, derimot, er $F_G \gg F_E$ (selv med nettoladning på f.eks. 10^{10} C på begge)

Mellom "hverdaglige" objekter er typisk $F_E \gg F_G$ (selv med praktisk talt elektrisk nøytrale objekter), men i tillegg kommer F_G fra jorda.

Konklusjon: Både F_G og F_E viktige i hverdagen her på jorda.

Tyngde [YF 4.4; LL 2.5]



Tiltrekkende kraft på m fra jorda:

$$F_G = G \frac{mM}{R^2} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m = 6 \cdot 10^{-24}}{(6370 \cdot 10^3)^2} \text{ (N)}$$

$$= mg$$

med $g = GM/R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon}$

Hvis $F_G = mg$ er eneste kraft på m, får vi (N2)

$$mg = ma$$

dvs

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{"fritt fall"})$$

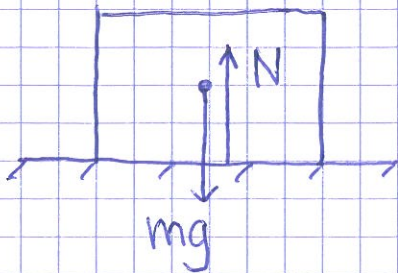
Kontaktkrefter

[YF 4.1; LL3]

(10)

Normalkraft:

N = netto frastøtende coulombkraft
fra underlaget på klossen

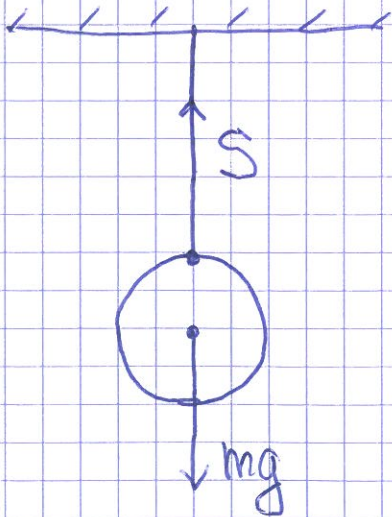


Med klossen i ro gir $N \uparrow$ at

$$N = mg$$

Snordrag:

S = netto tiltrekkende coulombkraft
fra snora på kula

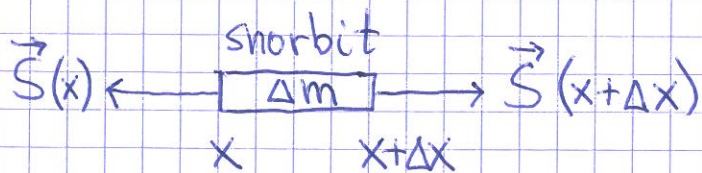


Med kula i ro gir $N \uparrow$

$$S = mg$$

[Oppg: Gjør rede for N_3 (kraft og motkraft)
i disse to tilfellene]

Snordraget \vec{S} er konstant i utstrakte og rette snorer (evt. stenger) som er lette og/eller ikke-akselererte: (11)

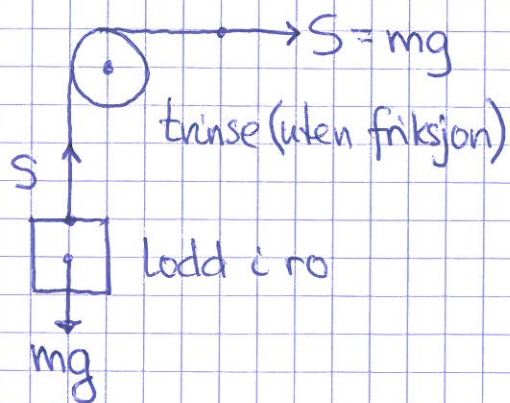


$$N2: \vec{S}(x + \Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

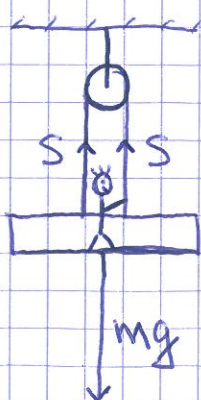
Hvis $\Delta m \approx 0$ eller $\vec{a} = 0$, er $\vec{S}(x + \Delta x) = -\vec{S}(x)$

\Rightarrow Konstant $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Trinser endrer retningen på \vec{S} :



Talje:



$$N1 \Rightarrow 2S = mg$$

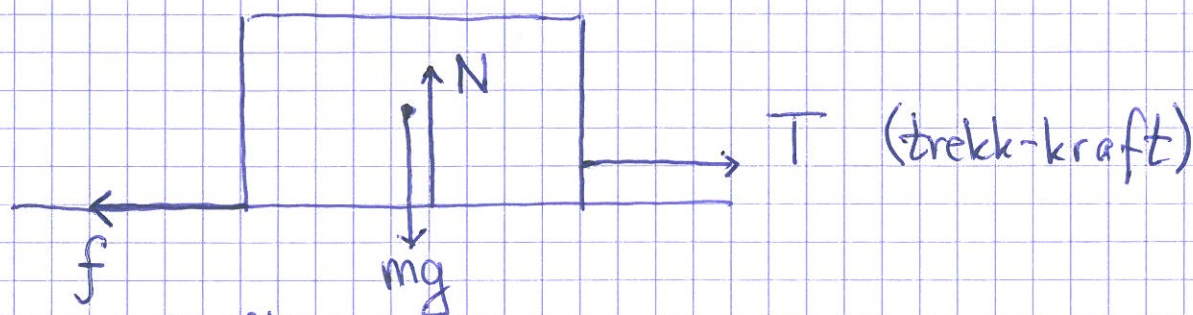
$$S = mg/2$$

Friksjon [YF 5.3 ; LL 3.1]

(12)

Kontaktkrefter rettet mot relativ bevegelse, evt. mot relativ bevegelse som ville finne sted uten friksjon.

Tørr friksjon:



(friksjonskraft, fra underlag på kloss)

Anta at T økes jevnt. Da blir klossen liggende i ro (statisk friksjon) inntil T når en verdi T_s . Hvis $T > T_s$, begynner klossen å gli (kinetisk friksjon), og den akselereres. Ved å variere m , og dermed

$N = mg$, finner vi at T_s , og dermed maksimal statisk friksjonskraft $f_{\max} = T_s$, er proporsjonal med N :

$$f_{\max} = \mu_s N$$

(13)

Her er μ_s = statisk friksjonskoeffisient, et dimensjonsløst tall, bestemt av materialtype og overflatebehandling av kloss og underlag.

Med $T > f_{\max}$ måler vi en friksjonskraft

$$f = T - ma, \quad (N2)$$

og ved å variere m , og dermed $N = mg$, finner vi at

$$f = \mu_k N$$

Her er μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient, dim.løst, og bestemt av materialtyper og overflatebehandling.

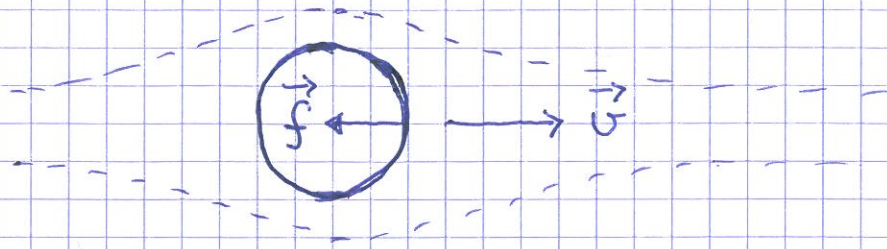
Litt ujevnheter i grenseflatene gir best "grep" i det statiske tilfellet:

kloss
underlag

Med relativ bevegelse (kinetisk tilfelle) "flyter" klossen oppå, og friksjonskraften blir noe redusert.

Ekspenimenter gir da også typisk at $\mu_s > \mu_k$.

Fraksjon i fluider (våt fraksjon) [YF 5.3; LL 8] (15)



- Liten $u \Rightarrow$ laminaer (pen) strømming av fluidet omkring (det symmetriske) objektet

$$\vec{f} = -k \vec{u} = -k u \hat{u}$$

Her avhenger k av fluidets viskositet og objektets størrelse og form

- Stor $u \Rightarrow$ turbulent strømming

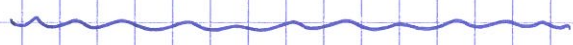
$$\vec{f} = -D u^2 \hat{u} \quad (\text{sånn omtrent})$$

$D =$ "drag" - koeffisient

Newtons lover; løsningsstrategi og eksempler

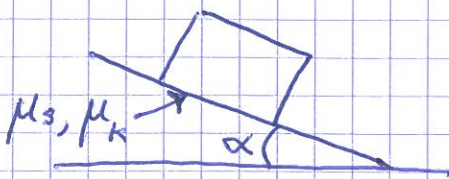
[YF 5 ; LL 3]

- Finn alle ytre krefter \vec{F}_i på legemet
- Tegn "fritt-legeme-diagram", dvs omgivelsene erstattes av krefter på legemet: tyngde $m\vec{g}$, snordrag \vec{S} , normalkraft \vec{N} , friksjon \vec{f} ,
- Velg hensiktsmessig koordinatsystem. Dekomponer.
- Bruk N2 ($\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$) evt N1 ($\sum_i \vec{F}_i = 0$)

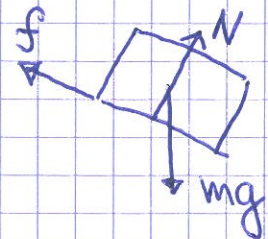


Eks: Kloss(er) på skråplan

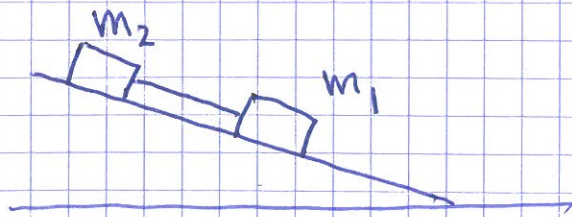
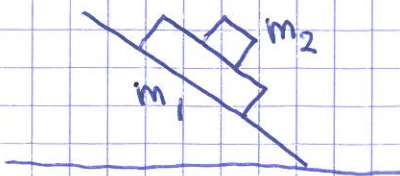
[Ør 2; Lab]



=> Fritt-legeme-diagram:

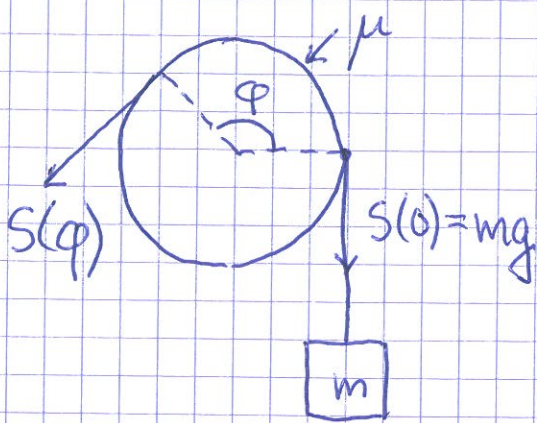


Varianter:



Eks: Snorfriksjon

(17)



$S(\varphi)$ = snordrag med kontaktvinkel φ mellom snor og sylinder

$S_{\min}(\varphi)$ = minimum snordrag for å holde lodd opp

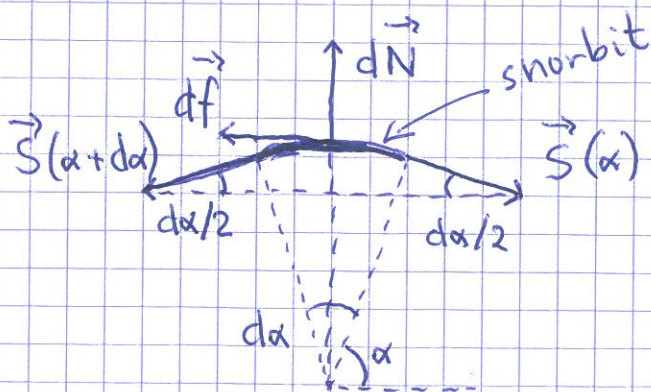
m = loddmasse

μ = statisk friksjonskoeffisient

$S_{\max}(\varphi)$ = max snordrag uten at lodd heises opp

Oppgave: Finn $S_{\min}(\varphi)$ og $S_{\max}(\varphi)$

Strategi: Siden S endres langs kontaktvinkelen, ser vi på liten snorbit mellom vinkel α og $\alpha + d\alpha$:



\vec{S} = snordrag = kraft på snorbit fra resten av snora

$d\vec{N}$ = normalkraft fra sylinder på snorbit

$d\vec{f}$ = friksjonskraft

Når $S(\varphi) = S_{\min}(\varphi)$, er $df = \mu dN$ med retning som i figuren.

Når $S(\varphi) = S_{\max}(\varphi)$, er $df = \mu dN$ med motsatt retning

$$\text{Lodd i ro} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (N1)$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Dekomponerer:

$$\text{Tangentielt: } S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$$

$$\text{Normalt: } S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Når $d\alpha \ll 1$ ("dα → 0"), har vi

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1 \quad \text{og} \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

Dermed:

$$\text{Tangentielt: } S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu dN = 0$$

$$\text{Normalt: } [S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha)] \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\text{Vi har: } S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

Dermed:

Tangentielt : $dS = \mp \mu dN$

Normalt : $S \cdot d\alpha = dN$

Dividerer disse med hverandre:

$$\frac{dS}{S \cdot d\alpha} = \mp \mu \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mp \mu d\alpha$$

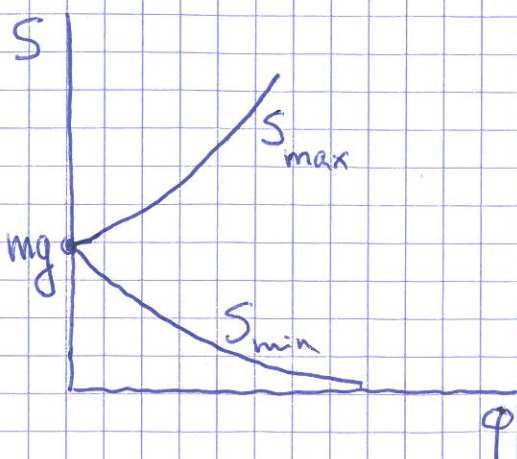
Integrasjon gir:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^\varphi \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = \mp \mu \varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) e^{\mp \mu \varphi} ; S(0) = mg$$

$$\text{Dvs: } S_{\min}(\varphi) = mg \cdot e^{-\mu \varphi} ; S_{\max}(\varphi) = mg \cdot e^{\mu \varphi}$$



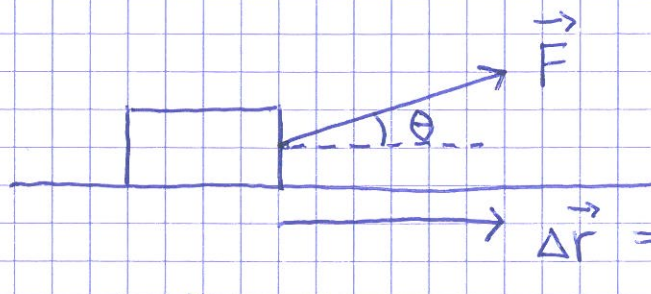
Talløksempel: $\mu = 0.2$ og 2.25 omdreiningar, dvs $\varphi = 9\pi/2$ gir

$$S_{\min} \approx 0.06 \text{ mg}$$

$$S_{\max} \approx 17 \text{ mg}$$

Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

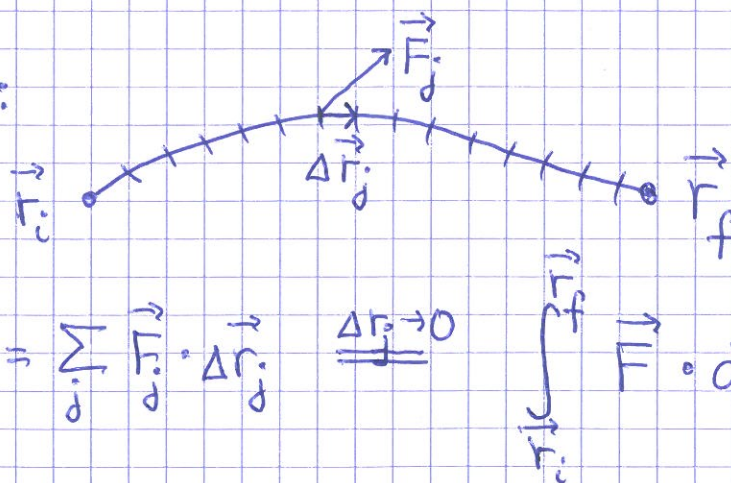
Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta =$ arbeid utført av ytre kraft \vec{F} på legemet

$[W] = N \cdot m = J$ (joule)

Generelt:



$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

= arbeid utført av \vec{F} ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

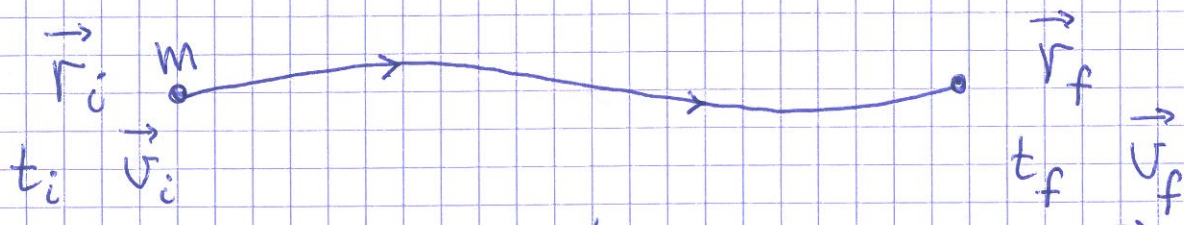
$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$[P] = J/s = W$ (watt)

Eks: Hva er $\langle P \rangle$ på en hybel som bruker 4 MWh el.energi pr år?

Løsn: $\langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / [365 \cdot 24 \text{ h}] = 457 \text{ W} \approx \underline{\underline{0,5 \text{ kW}}}$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

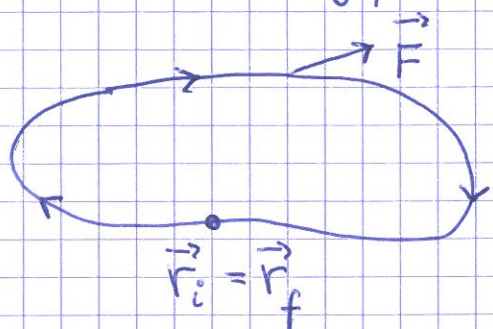
Dermed: $W = K_f - K_i = \Delta K$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3; LL 4.4]

(22)

Et system som ikke taper mekanisk energi til andre energiformer (f.eks. varme) er konservativt



Hvis \vec{F} er konservativ, er $K_f = K_i$ (dvs $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$),
dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Konservativ kraft

Integral rundt lukket kurve

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Når \vec{F} er en konservativ kraft, er potensiell energi

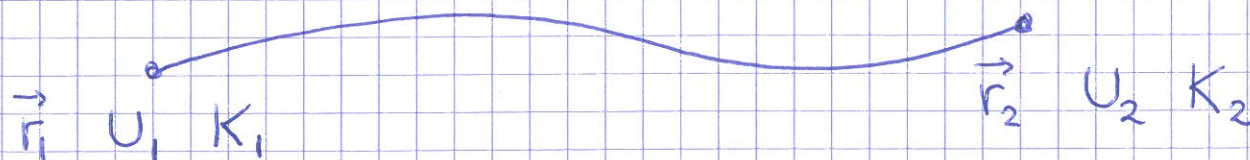
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

Anta kons. system.



$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dus: Total mekanisk energi

$$E = K + U$$

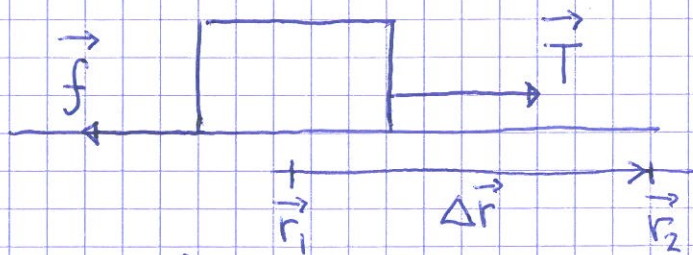
er konstant (bevarer)

i et konservativt system.

Friksjonsarbeid

[YF 7.3; LL 4.5]

24



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid har}$$

retning mot $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f

"går tapt": Mekanisk energi omdannes til varme.

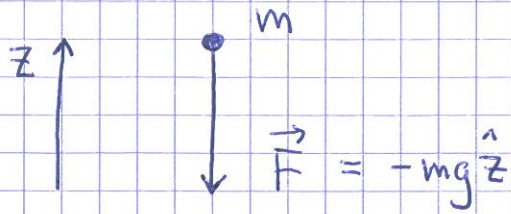
Når $\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er selvsagt også

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0,$$

dvs friksjonskraften \vec{f}

er ikke konservativ.

Eks 1: Fritt fall



Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$; $z < 0$.

Løsn:
$$U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

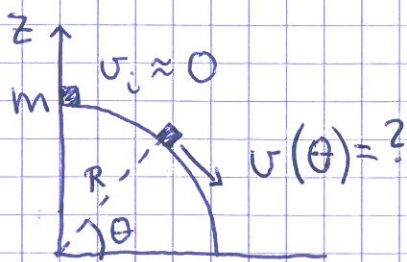
Total mek energi er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2} m v(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Eks 2: Glatt kuleformet tak



Løsn: E er bevart. Anta $U(0) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}}$$

- Hvor mister m kontakten med underlaget? ($N \rightarrow 0$)
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva skjer hvis legemet ruller og "slurer"?

Impuls [YF 8; LL 5]

(26)

[evt. bevegelsesmengde; eng: (linear) momentum]

$$N2: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{hvis} \\ m = \text{konst.} \end{array} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Impuls = masse \cdot hastighet

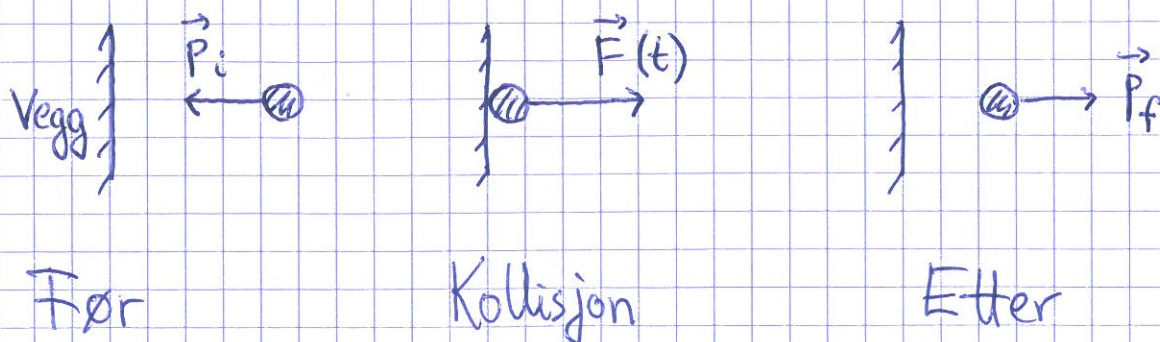
$$\vec{p} = m \vec{v} ; \quad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

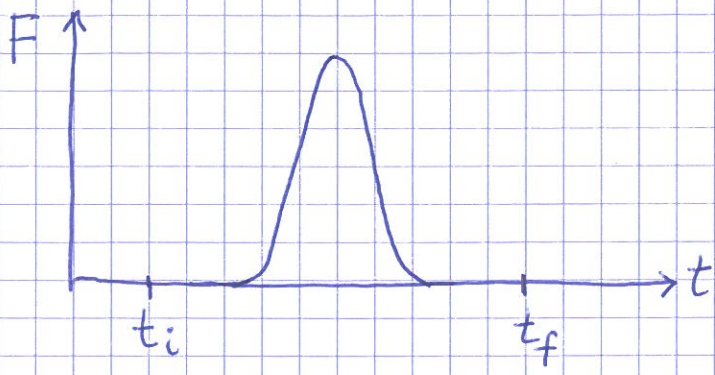
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad N2$$

Impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er legemets impuls bevar.

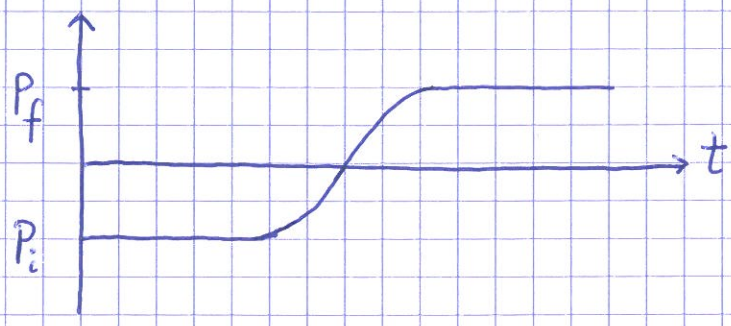
Ytre \vec{F} gir impulsendring:





Impulsendring i kollisjon med vegg:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i \\ &= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \end{aligned}$$



Kollisjoner [YF 8.3, 8.4; LL 5.3]

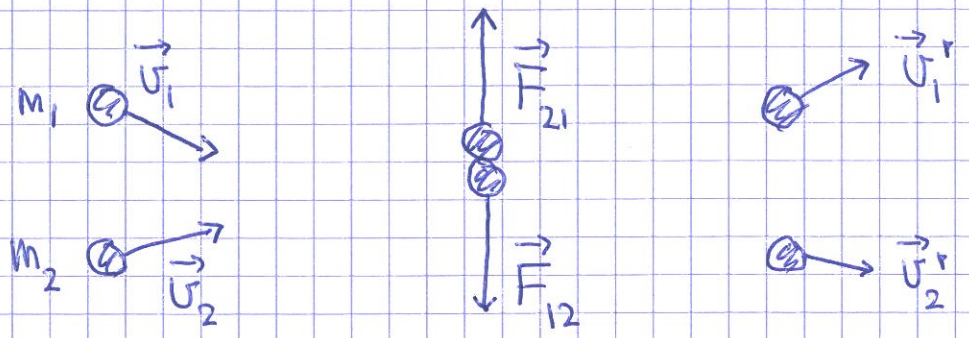
- Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (mek. energi bevart)
- Uelastisk "": $\Delta K < 0$ (" " ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Kolliderende legemer henger sammen, med felles hastighet, etter kollisjonen. Max energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi \rightarrow deformasjon, lyd, varme...

$$\vec{F}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

Indre krefter endrer ikke \vec{p}_{tot} :



Før

Kollisjon

Etter

$$N2: \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt$$

$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Anslå $\langle F \rangle$ (midlere kraft) i et slag på en bordtennisball. ($m = 2.7 \text{ g}$)

(29)

Løsn: Anslår $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t_{(\text{koll})} \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} = \frac{40000 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs, OK å negligjere ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; LL 5.3]

Før: $m \rightarrow u$ $V \leftarrow M$ (i)

Etter: $u' \leftarrow m$ $M \rightarrow v'$ (f)

[I fig: $u, v' > 0$, $u', v < 0$]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mu + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + Mv'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk:

30

$$u' = v' = \frac{mu + MV}{m+M}$$

(b) Delvis uelastisk: Kun 1 lign. ($\Delta p = 0$)
for 2 ukjente (u', v'). Må ha 1 opplysning ekstra.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$:

$$\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} mu'^2 + \frac{1}{2} MV'^2$$

$$\Rightarrow m(u+u')(u-u') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(u-u') = M(V'-V) \quad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow u+u' = V+V'$$

$$\Rightarrow u'-V' = -(u-V) \quad (3)$$

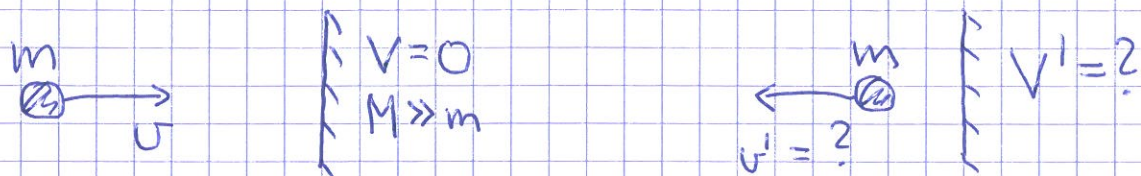
(2) og (3) gir

$$u' = \frac{M}{m+M} \left(2V + u \frac{m-M}{M} \right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left(2u + V \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk.

(31)



Løsn:
$$v' = \frac{M}{m+M} \left(0 + v \frac{m-M}{M} \right) \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = \underline{-v}$$

$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{0}$$

Er $\Delta p = 0$?

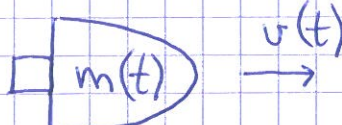
$$\left. \begin{aligned} p = mv, \quad P = MV = 0, \quad p' = mv' = -mv, \\ P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$\left. \begin{aligned} K_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = 0, \quad K'_m = \frac{1}{2}mv^2, \\ K'_M = \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M \left(\frac{m}{M} 2v \right)^2 = 2 \frac{m}{M} mv^2 \approx 0 \end{aligned} \right\} \Downarrow \underline{\Delta K = 0}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

32

Før (t) :  $p(t) = m(t)v(t)$

Efter $(t+dt)$: 

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e}_{v(t)+u}$$

$u =$ eksoshastighet relativt raketten $= v_e - v < 0$

$dm =$ rakettenes masseendring i løpet av $dt < 0$

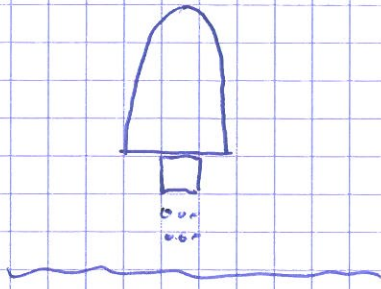
$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{p(t)} + m(t)dv + \underbrace{v(t)dm - v(t)dm}_0 - u dm$$

Med $F_{ytre} = 0$ (outer space) er $p(t+dt) = p(t)$

$$\Rightarrow m dv = u dm$$

$$\Rightarrow \underbrace{m dv/dt}_{m \cdot a} = u \underbrace{dm/dt}_{F_{skyv}} = \underbrace{u \dot{m}}_{> 0}$$

I tyngdefeltet :



$$F_{ytre} = -mg$$



Total kraft på (rest-)raketten blir

$$F_{skjv} + F_{ytre} = u\dot{m} - mg$$

Som gir

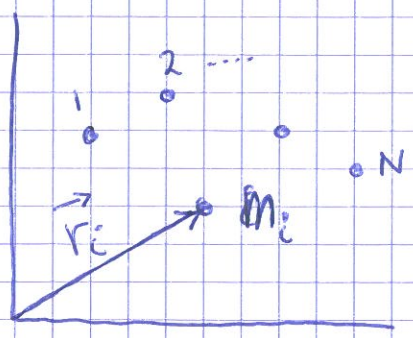
$$ma = u\dot{m} - mg \quad (N2)$$

Hittil : "Punktmasser"

Nå : Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt

[YF 8.5, oppg 8.115+8.116; LL 5.6, 5.8, 6.]

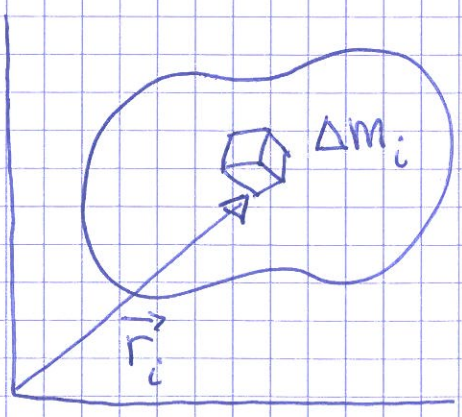


Massesenter (CM) for N
 punktmasser m_1, m_2, \dots, m_N i
 posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

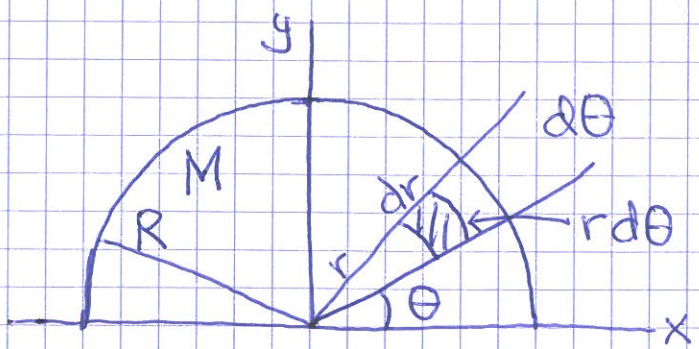
↑
 integral over der vi har masse

3D: $dm = \rho dV$, $\rho =$ masse pr volumenhet,
 $dV =$ volumelement

2D: $dm = \sigma dA$, $\sigma =$ masse pr flateelement,
 $dA =$ flateelement

1D: $dm = \lambda dl$, $\lambda =$ masse pr lengdeenhet,
 $dl =$ linjeelement

Eks: Halvsirkulær tynn skive



$$dA = dr \cdot r d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{r dr d\theta}{\frac{1}{2} \pi R^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\theta + \hat{y} r \sin\theta$$

$$\vec{R}_{CM} = \hat{x} X_{CM} + \hat{y} Y_{CM} ; X_{CM} = 0 \text{ pga symmetri}$$

$$Y_{CM} \approx R/2 \text{ (rektangel } \begin{matrix} 2R \\ \bullet \\ R \end{matrix} \text{ gir } Y_{CM} = R/2)$$

Exp. gir $Y_{CM} \approx 7R/18$ (papp og pinne!)

(36)

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \int r \sin \theta \frac{dA}{A} =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_{\uparrow (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R}}$$

Vis selv:

Halvsirkulær tynn stang: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$ (1D)

Kompakt halvkule: $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$ (3D)

[Tips: Omdreining av skiva rundt y-aksen gir halvkule, med volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$.

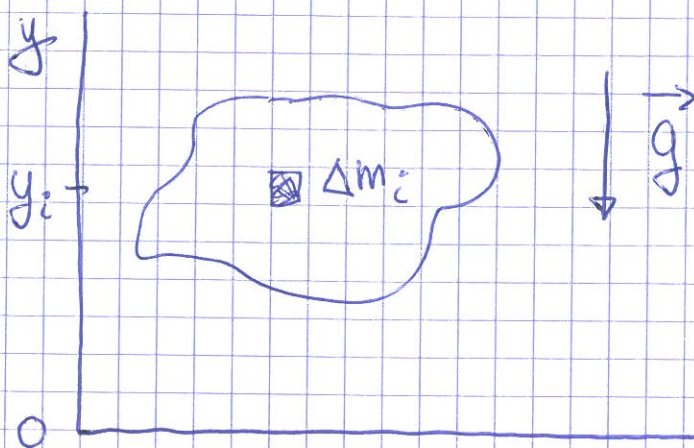
Integrasjon over r fra 0 til R og over θ

fra 0 til $\pi/2$ (hvorfor ikke π ?!) får med

all massen. Volum av halvkule kjenner du (?)]

Potensiell energi U for partikkelsystem i tyngdefeltet

37



Velger $U(0) = 0$

$$U = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \Delta m_i g y_i$$

Hvis $g = \text{konst.}$:

$$U = g \sum_i \Delta m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

det samme som om hele massen $M = \sum_i \Delta m_i$

var samlet i høyden Y_{CM} !

(Og da f.eks. i nettopp \vec{R}_{CM})

[Dette har vi antatt "hele livet".

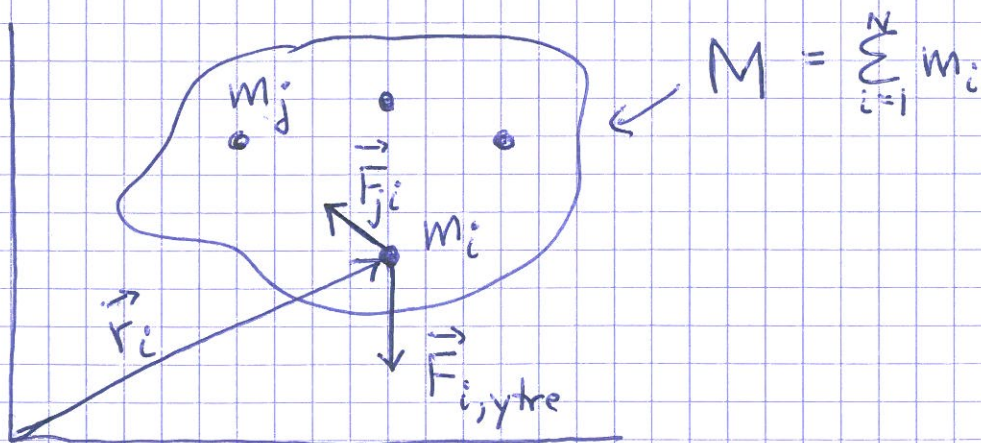
Nå vet vi at det er OK!]

Tyngdepunktbevegelsen [YF8.5; LLS.8]

Skal se at: $M \ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{F}_{ytre}$

Dvs:

Tyngdepunktet \vec{R}_{cm} beveger seg som om hele massen M var samlet i \vec{R}_{cm} og ble utsatt for summen av alle ytre krefter, \vec{F}_{ytre} , som virker på systemet!



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft p\aa } m_i}$$

Legg sammen N2 for alle massene:

(39)

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i, \text{ytre}}}_{\substack{= \text{netto ytre} \\ \text{kraft } \vec{F}_{\text{ytre}} \\ \text{p\aa systemet}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N, N-1} + \vec{F}_{N-1, N}}}} \\ &= 0 \quad (\text{pga N3})\end{aligned}$$

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{\text{CM}} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

Dermed:

$$\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ytre}}}$$

Bevegelse i tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

- Rotasjon om CM
- Vibrasjon relativt CM

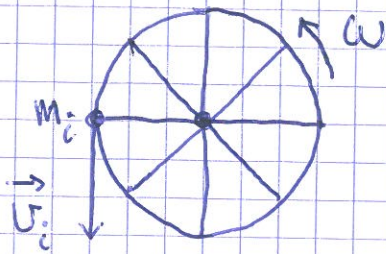
Stive legemer:

Kun translasjon av CM + rotasjon om CM

ROTASJON [YF 9,10; LL 6 (5)] (40)

Innledning:

- Roterende hjul



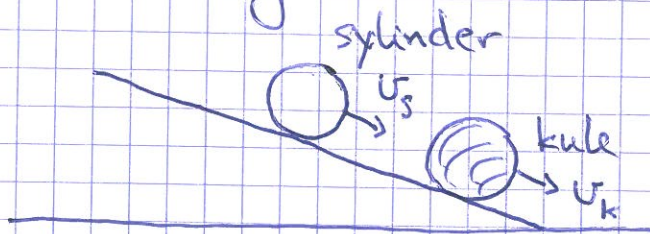
$$CM \text{ i ro} \Rightarrow K_{\text{trans}} = 0, \text{ men} \\ K_{\text{rot}} \neq 0$$

Impuls?

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \text{ men}$$

$$\underline{\text{dreieimpuls}} \neq 0$$

- Rulling



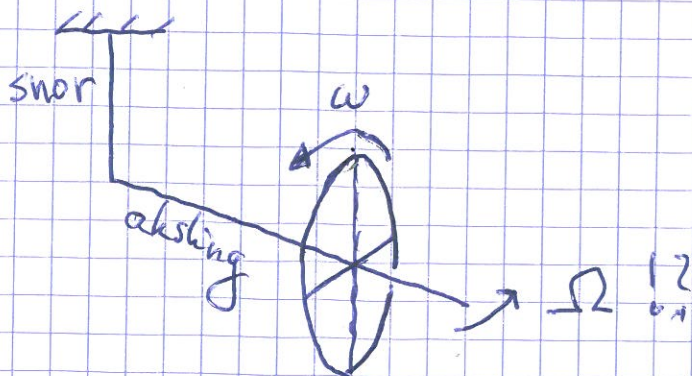
Hvor angriper kreftene?

Dreiemoment!

Hvorfor er $v_k > v_s$?

Friksjonens rolle

- Mer komplisert dynamikk

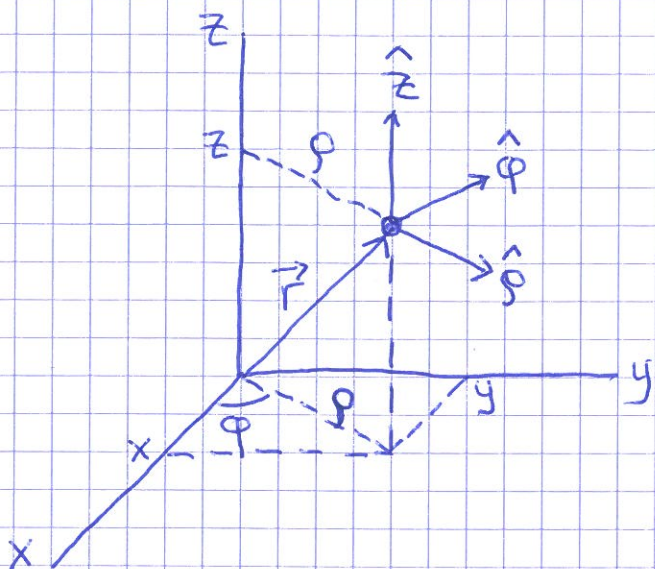


Preesjon
Gyroskop

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(41)

Antar rotasjon om gitt akse, z-aksen, og bruker sylinderkoordin. (= polarkoord. + z)



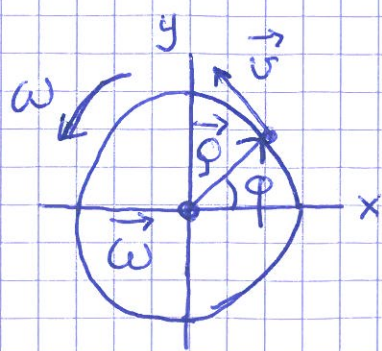
$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Lar vinkelhastigheten bli vektor som peker langs rotasjonsaksen:



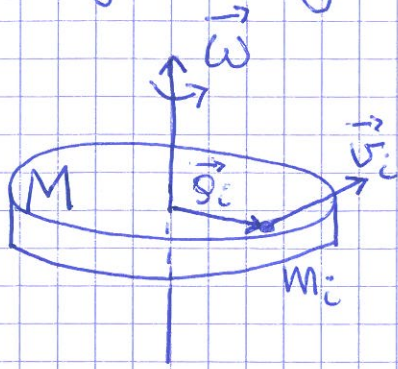
$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} \quad (= \omega \hat{\omega}), \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \rho \omega \hat{\phi}$$

Ser at $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ gir riktig

retning ($\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$) og tallverdi ($v = \omega \rho$)

Rotasjonsenergi [YF 9.4; LL 6.4]



$$K = K_{rot} = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

Tregghetsmoment [YF 9.4; LL 6.3]

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \text{legemets tregghetsmoment mhp gitt akse}$$

Med kont. massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm \quad \text{og} \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm}$$

(der ρ = avstand fra aksen til dm)

Dermed:

$$\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Kinetisk energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6] (43)

Generell bevegelse: Translasjon av CM + Rotasjon om CM

$$\Rightarrow K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$


M = massen, $V = \vec{R}_{\text{CM}}$,

I_0 = treghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhast. for rot. omkring " " "

Eksempler på beregning av I [YF 9.6; LL 6.3]

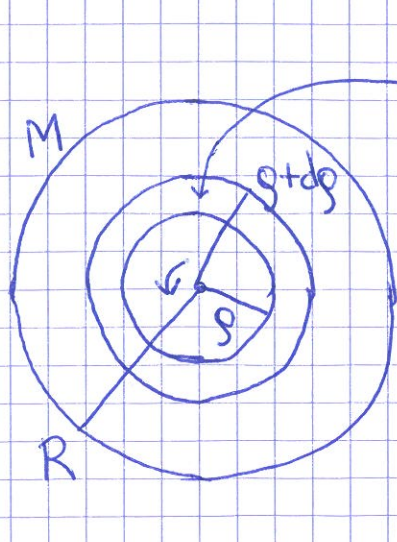
Eks 1: Ring (evt. sylinderskall)



A diagram of a ring with mass M and radius R . The center of mass is at the center, and the radius is labeled R .

$$I_0 = \int_{\text{ring}} r^2 dm = R^2 \int_{\text{ring}} dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

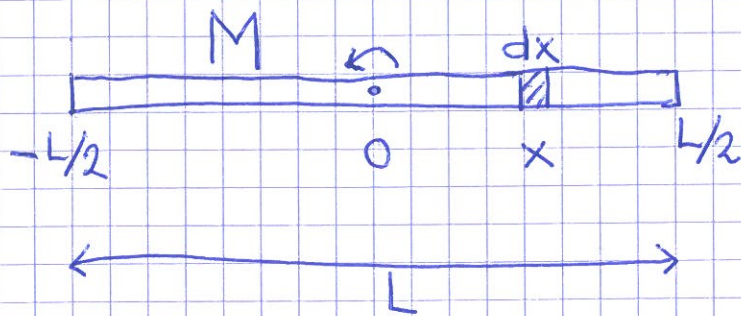
Eks 2: Sirkuler skive (evt. kompakt sylinder)



A diagram of a circular disk with mass M and radius R . A differential ring of radius r and thickness dr is shown. The center of mass is at the center.

$$\begin{aligned} dI_0 &= dm \cdot r^2; \quad dm = M \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} \\ \Rightarrow I_0 &= \int dI_0 = \int_0^R M \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} r^2 \\ &= \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{R^4/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \end{aligned}$$

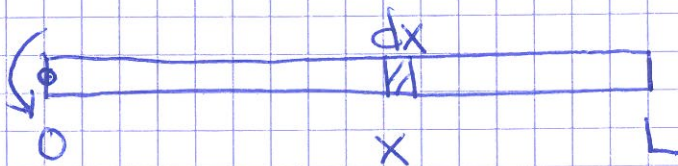
Eks 3: Tynn stang



$$g = x, \quad dm = M dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Mhp akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

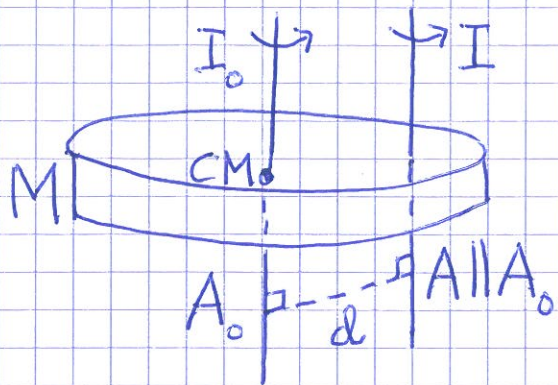
Eks 5: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 6: Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats

[YF 9.5; LL 6.3]

(45)



$$I = I_0 + Md^2$$

Eks 1: Tynn stang



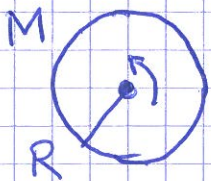
$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$

$$d = L/2 \Rightarrow$$



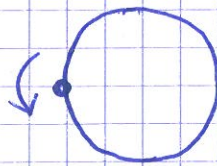
$$I = I_0 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eks 2: Kuleskall



$$I_0 = \frac{2}{3} MR^2$$

$$d = R \Rightarrow$$

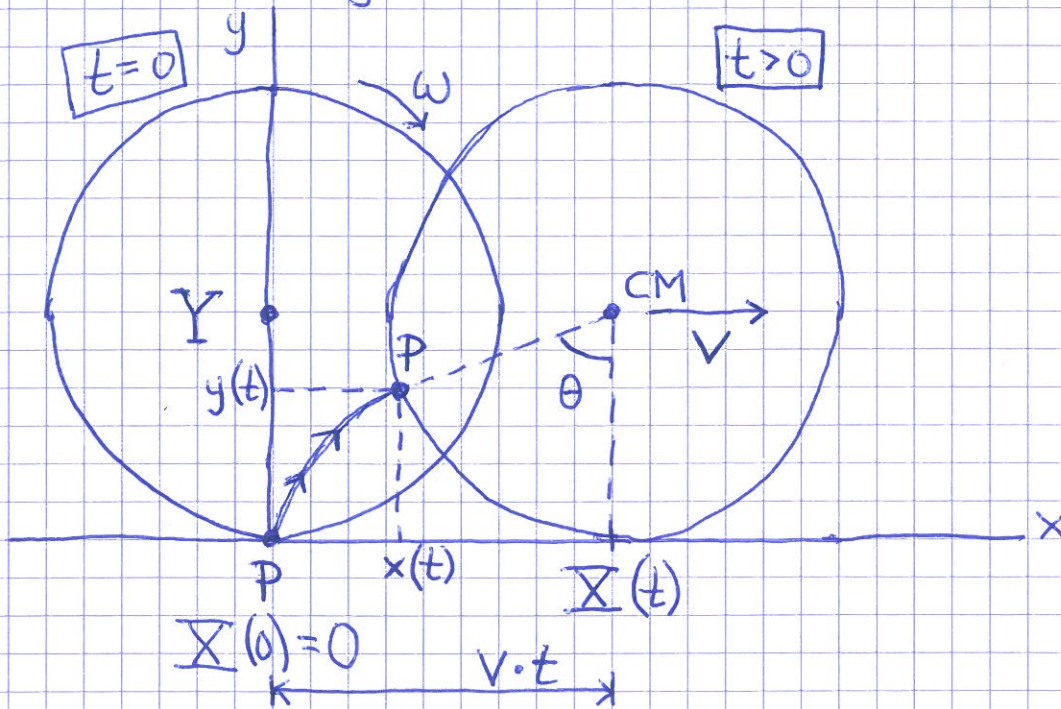


$$I = I_0 + MR^2 = \frac{5}{3} MR^2$$

Rulling og sluring [YF 10.3; LL 6.7]

46

Ren rulling



P = punkt på periferien; $(x(t), y(t))$ = banen til P

$$V = \dot{R}_{CM} = \dot{X} \quad ; \quad Y = R$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$X = V \cdot t = R \cdot \theta$$

$$V = \dot{X} = R \dot{\theta} = R \omega$$

$$A = \ddot{X} = \dot{V} = R \ddot{\theta} = R \dot{\omega} = R \alpha$$

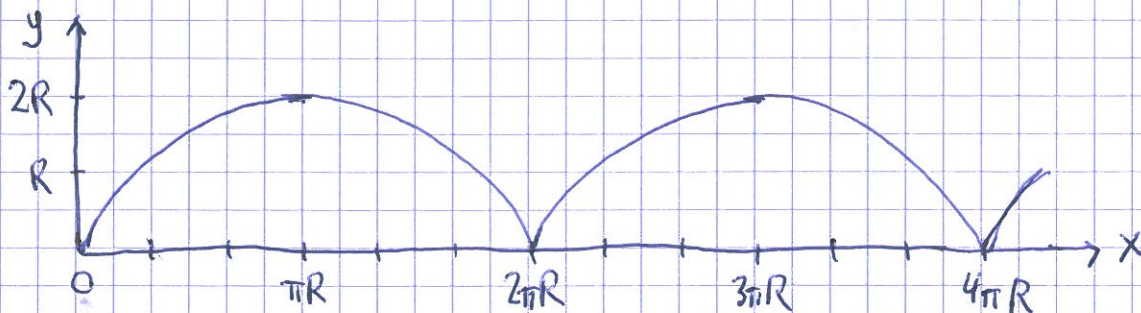
Rullebetingelser:

$$V = R\omega, \quad A = R\alpha$$

Banen til P :

$$x = X - R \sin \theta, \quad y = R - R \cos \theta$$

Sykloide:

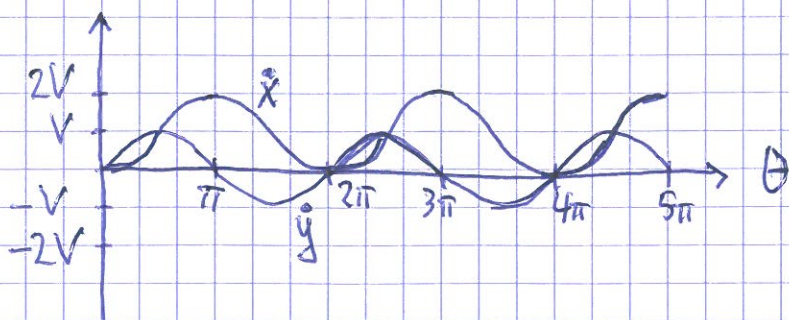


Hastigheden til P :

$$\dot{x} = \dot{X} - R\dot{\theta} \cos \theta = V(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$$



K ved ren rulling:

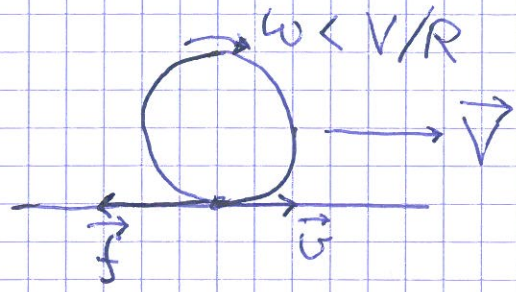
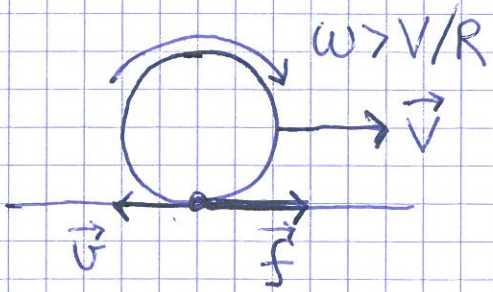
$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (c=1 \text{ for ring etc}) ; \quad \omega = V/R$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} cMR^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2}}$$

Sluring

$\omega \neq V/R \Rightarrow$ relativ hastighet $v = V - \omega R \neq 0$
mellom legeme og underlag \neq kontaktpunktet

\Rightarrow legemet roterer og glir ; legemet slurer



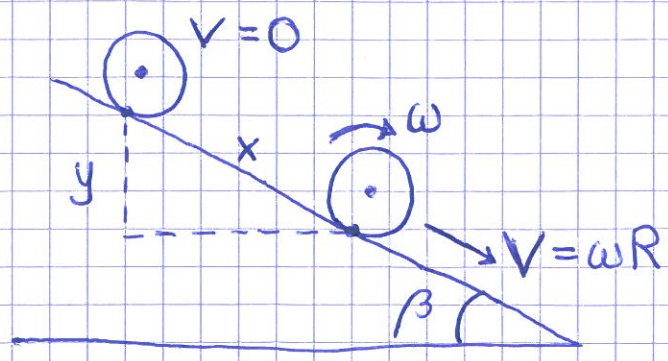
Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ ($f = |\vec{f}| = \mu_k N$)

Hvis ren rulling, $v = 0$: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$

Statisk friksjon $f \leq \mu_s N$; \vec{f} rettet mot "tenkt
relativhast." \vec{v} hvis det ikke hadde vært friksjon.

[I praksis litt tap av mek. energi også ved
ren rulling pga "rullefriksjon".]

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



$M =$ masse, $R =$ radius, $I_o = cMR^2$

Finn \dot{V} , samt minste
 tillatte μ_s for ren rulling.

Exp viser: $\dot{V}(\text{kule}) > \dot{V}(\text{skive}) > \dot{V}(\text{kuleskall}) > \dot{V}(\text{hul synder})$

Løsning: E er bevart $\Rightarrow Mgy = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$

(49)

$$y = x \sin \beta$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gx \sin \beta / (1+c)} \quad \left. \vphantom{\Rightarrow V} \right\} \Rightarrow \text{exp. er forklart!}$$

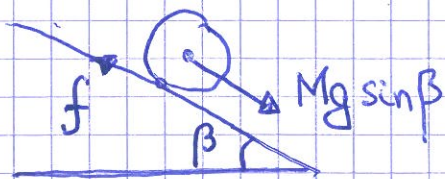
Objekt	kule	skive	kuleskall	hul sylinder
c	2/5	1/2	2/3	1

Akselerasjonen:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{x} ; \quad \frac{d}{dt} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{\sqrt{2gx \sin \beta / (1+c)}}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{g \cdot \frac{\sin \beta}{1+c}}}$$

Hvis bare $G_{||} = Mg \sin \beta$ virket langs skråplanet, ville \dot{V} ha blitt $g \sin \beta$. Friksjon f , rettet oppover skråplanet, reduserer \dot{V} med faktoren $1/(1+c)$:



$$Mg \sin \beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg \sin \beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow f = Mg \sin \beta \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1+c} \right\} = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

Men: $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$

\Rightarrow Ren rulling bare mulig hvis

$$\mu_s Mg \cos \beta \geq \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

$$\underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

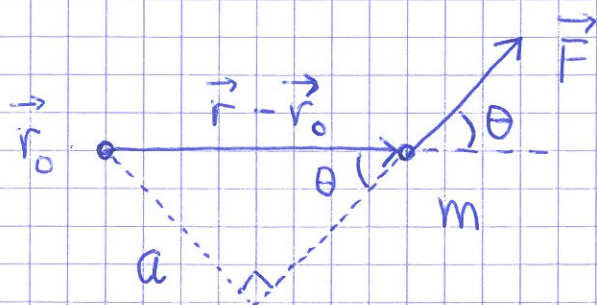
Kule (kompakt): $\mu_s \geq \frac{2}{7} \tan \beta$ osv.

Rotasjonsdynamikk

50

Dreiemoment

[YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

= \vec{F} 's dreiemoment på m ,
relativt valgt referanse-
punkt \vec{r}_0

Retning:

$$\vec{\tau} \perp \vec{F} \quad \text{og} \quad \vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

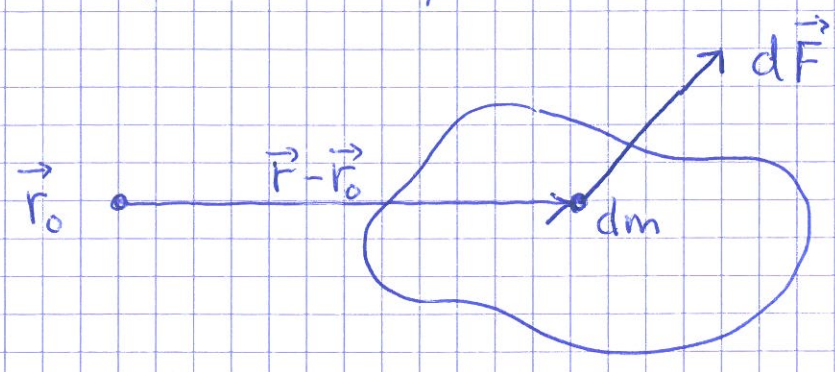
(ut av planet
i figuren)

Absoluttverdi:

$$\begin{aligned} |\vec{\tau}| &= |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta \\ &= a \cdot F \end{aligned}$$

(= arm \cdot kraft)

For partikkelsystem:



$$d\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

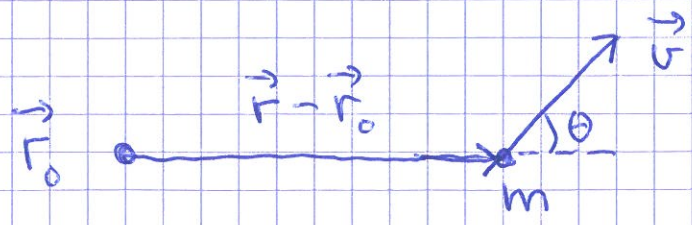
$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

= totalt dreiemoment på legemet, relativt \vec{r}_0

Fra før: Netto ytre $\vec{F} \Rightarrow$ endring i impulsen \vec{p}

Nå: Netto ytre $\vec{L} \Rightarrow$ endring i dreieimpulsen \vec{L}

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$$

= m's dreieimpuls, relativt \vec{r}_0

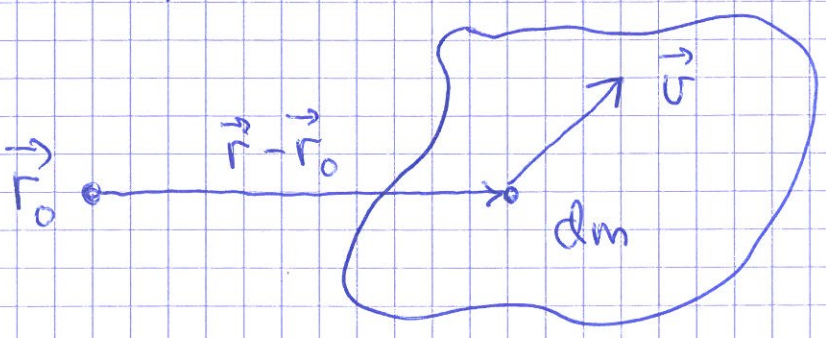
Retning:

$$\vec{L} \perp \vec{p} \text{ og } \vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

Absoluttverdi:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta = a \cdot p \text{ (arm} \cdot \text{impuls)}$$

For partikkelsystem:



$$d\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{p} = dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

= legemets totale dreieimpuls, relativt \vec{r}_0

N2 for rotasjon [YF 10.5; LL 6.6]

(53)

$$N2: \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

Anta fast \vec{r}_0 , evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$, for da er $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} = m \underbrace{\dot{\vec{v}} \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\stackrel{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} \stackrel{(def)}{=} \vec{\tau}$$

For partikkelsystem:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\stackrel{N2}{=} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt} \quad N2, \text{ rotasjon}$$

der

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på legemet

\vec{L} = legemets dreieimpuls

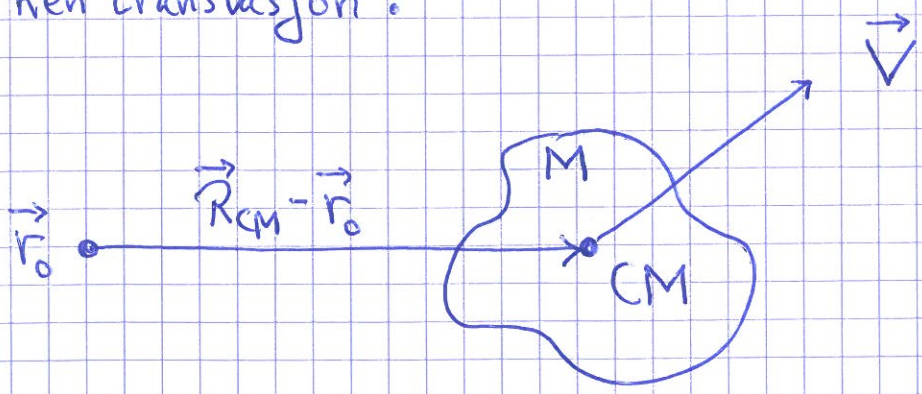
NB: Samme ref.punkt \vec{r}_0 i $\vec{\tau}$ og \vec{L} !

Bevaringslover, oppsummert

- $\vec{F}_{ytre} = 0$ (isolert system) $\Rightarrow E_{(total)}, \vec{p}$ og \vec{L} bevart
(ingen ytre krefter)
- Konservativt system \Rightarrow mek. energi $E = K + U$ bevart
- $\sum \vec{F}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ bevart
- $\sum \vec{\tau}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ bevart

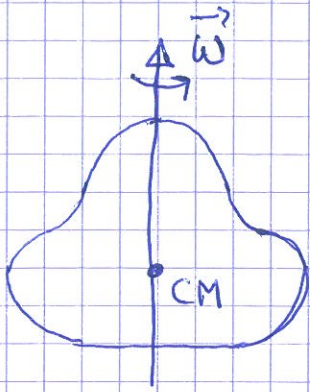
\vec{L} for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

Ren translasjon:



\vec{L}_b def. $= M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$
 $=$ banedreieimpuls

Ren rotasjon; om akse gjennom CM:



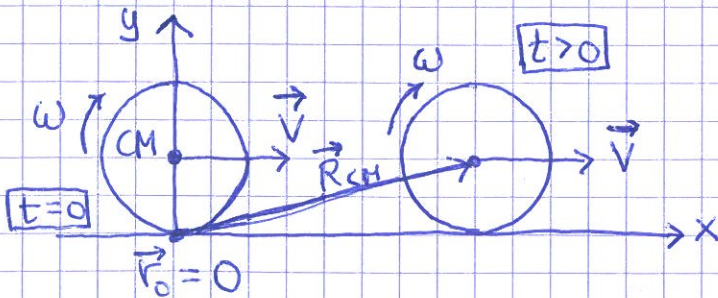
Med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen er

$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} =$ indre dreieimpuls, spinn; uavhengig av \vec{r}_o .

Total dreieimpuls for stivt legeme:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{V} + I_o \vec{\omega}$$

EkS: Snookerkule, masse M, radius R, $I_o = \frac{2}{5}MR^2$



$$\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$$

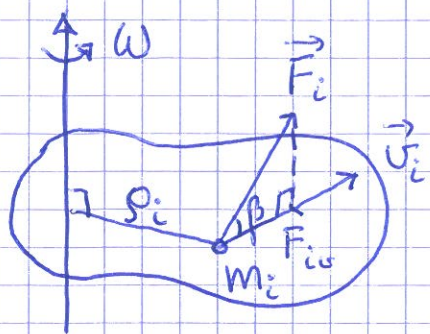
$$\vec{L} = ?$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_o \vec{\omega} \\ &= \underline{\underline{-MRV \hat{z} - \frac{2}{5}MR^2 \omega \hat{z}}} \end{aligned}$$

hvis ren rulling: $V = \omega R \Rightarrow \vec{L} = -\frac{7}{5}MR^2 \omega \hat{z}$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering

(56)



$$\begin{aligned}\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i &= F_i v_i \cos\beta \\ &= F_{i\omega} v_i\end{aligned}$$

Skal se at $\tau = I \dot{\omega}$ ved å regne ut to forskjellige uttrykk for effekten som tilføres det stive legemet.

$$\begin{aligned}P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \stackrel{N2}{=} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \stackrel{5.21}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (= \frac{dK}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = I \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}\end{aligned}$$

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\omega} v_i = \left\{ \sum_i F_{i\omega} r_i \right\} \omega = \tau \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad (\text{N2, rot. om akse } \omega \text{ (fast orientering)})$$

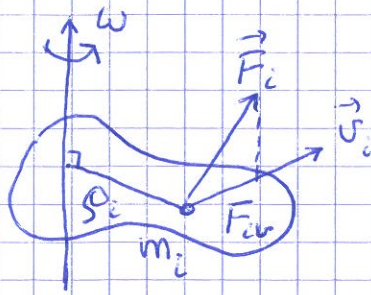
der $\tau = \sum_i F_{i\omega} r_i =$ ytre dreiemoment på legemet,
(her referert til rotasjonsaksen, og ikke et ref. punkt \vec{r}_0)

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \text{legemets treghetsmoment}$$

mhp den ~~væg~~ fast orienterte rot. aksen

Arbeid utført ved rotasjon [YF 10.4; LL 6.4]

(57)



$$\text{Fra sist: } P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \tau \omega$$

$$\text{med } \tau = \sum_i F_{i\phi} r_i$$

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad \omega = d\phi/dt$$

$$\Rightarrow \text{Tilført effekt: } \boxed{P = \tau \omega}$$

$$\text{Utført arbeid ved rotasjon } d\phi: \quad \boxed{dW = \tau d\phi}$$

$$[\text{Sammenlign translasjon: } P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}]$$

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme er ^(og ferdig!) i ro, dus

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0,$$

bare dersom

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Netto ytre kraft

$$\text{og} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

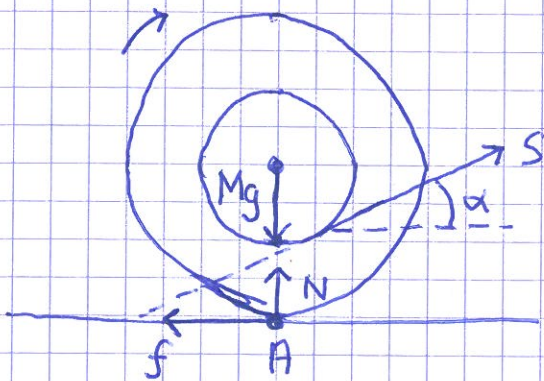
Netto ytre dreiemoment

Rotasjon, eksempler

Eks 1: Snelle



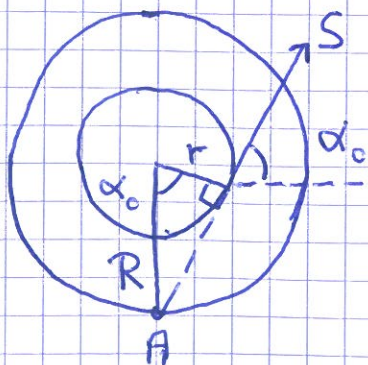
Løsn: Kun S har arm mhp kontaktpunktet A:



Liten $\alpha \Rightarrow \vec{\tau}_A$ inn i planet
 \Rightarrow Rotasjon med klokka
 \Rightarrow Ruller mot høyre

Stor $\alpha \Rightarrow$ Omvendt

Statisk likevekt hvis forlengelse av \vec{S} gjennom A:

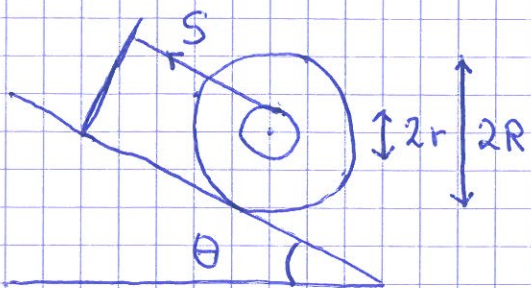


$$\cos \alpha_0 = r/R$$

Snelle i ro inntil $S \geq \frac{\mu_s Mg}{\frac{F}{R} + \mu_s \sqrt{1 - r^2/R^2}}$

(Vis dette)

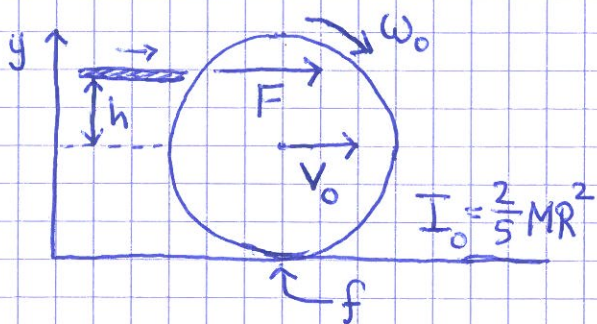
Eks 2: Snelle på skråplanet



Find vinkel θ_0 når snella begynner å gli.
 Hva er S når den glir?
 Hva er a når den glir?

Strategi: N_1 langs skråplanet og $N_1, \text{rot. om CM}, f = f_{\text{max}} \Rightarrow \theta_0$
 N_2 ——— " ——— og N_2 ——— " ———, $f = \mu_k N \Rightarrow a$

Eks 3: Snooker [LL 6.7]



Kort støt:

$$N_2: F \Delta t = \Delta p = M v_0$$

$$N_2, \text{rot om CM: } \tau \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

$$\tau = F h \quad (F \gg f)$$

Stor $h \Rightarrow \omega_0 > v_0/R \Rightarrow$ skring og \vec{f} mot høyre

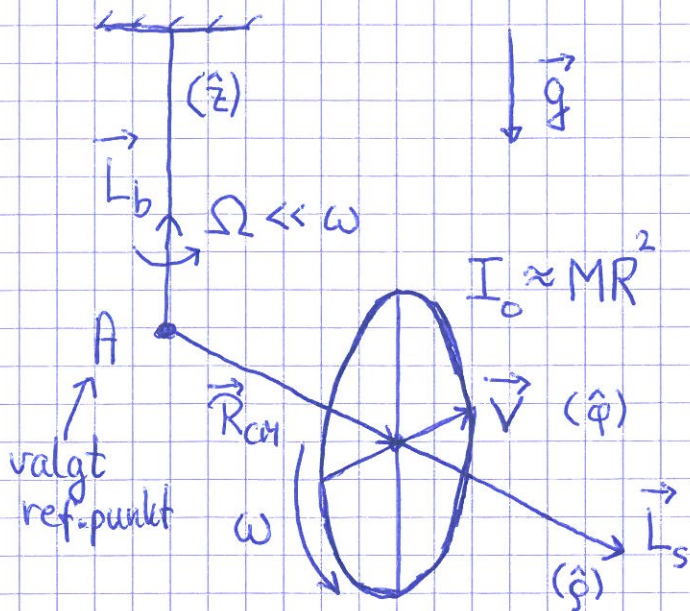
Liten $h \Rightarrow$ omvendt

$h = h_0 \Rightarrow v_0 = \omega_0 R$ og ren rulling umiddelbart

Etter hvert ren rulling uansett!

Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]

(60)



Exp:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

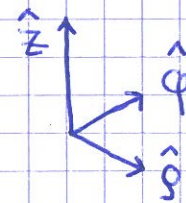
$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \dots$$

$$\boxed{\omega = ?}$$

Løsn:
$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

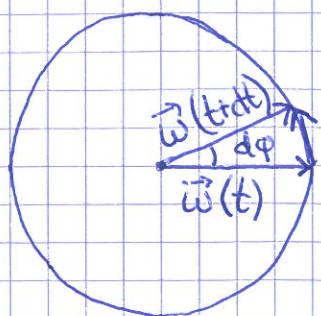
$$L_b = R_{CM} M V \ll L_s = MR^2 \omega$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} \\ &= R_{CM} M g \hat{\phi} \end{aligned}$$



N2, rot. mhp A:

$$\vec{L}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \approx \frac{d\vec{L}_s}{dt} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \left(\frac{d\vec{L}_b}{dt} \approx 0 \right)$$



$$d\vec{\omega} = \omega d\phi \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow R_{cm} Mg = I_o \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

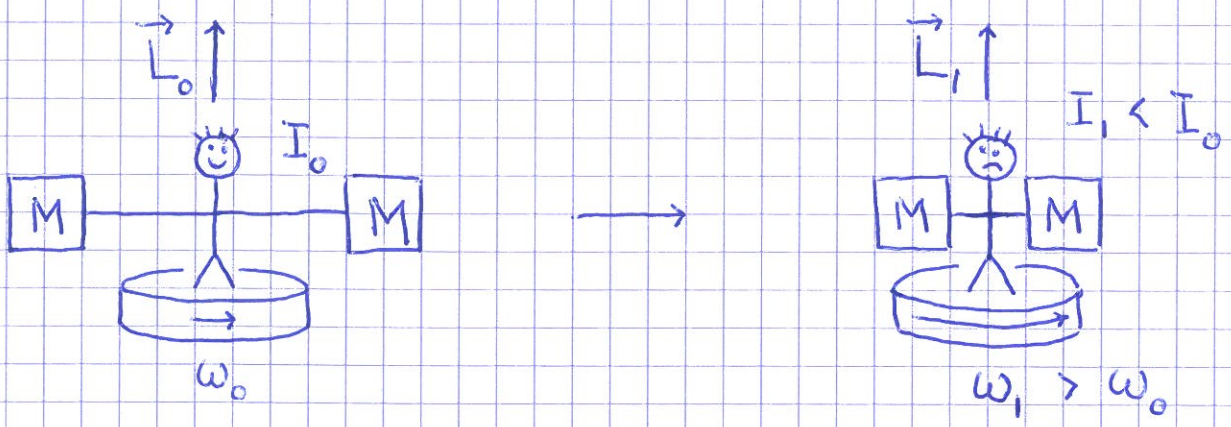
$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}$$

$$\Rightarrow T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}$$

Tallverdi: $T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ s}$

Eks 5: Piruett

[YF 10.6; LL 6.5]

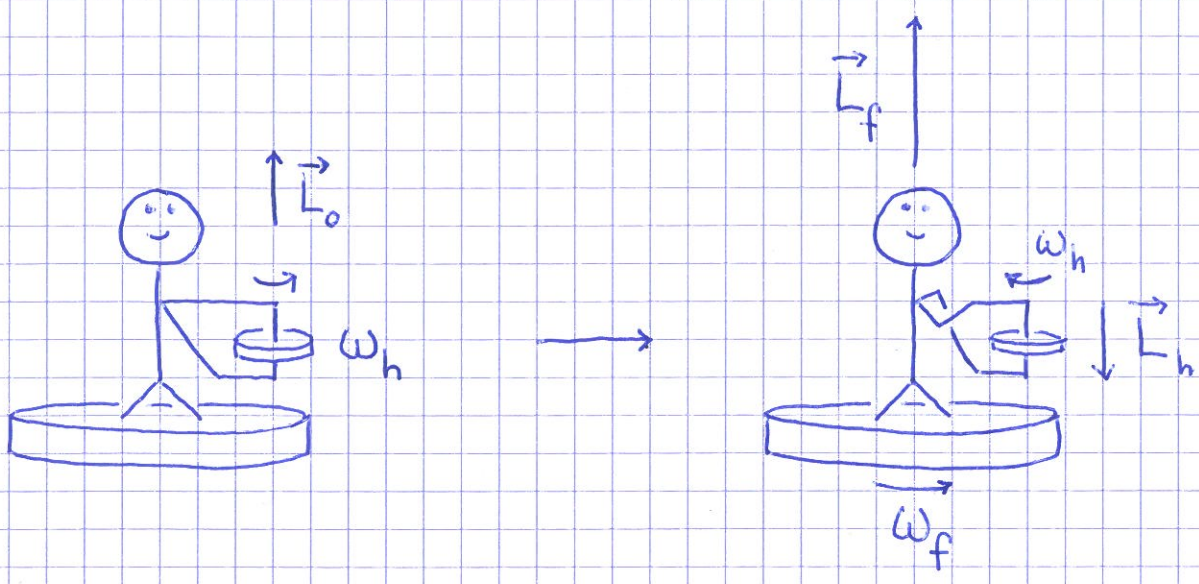


$$\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_o$$

$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_o \omega_o \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_o}{I_1} \omega_o > \omega_o$$

[K øker! hvorfor/hvordan?]

Eks 6: Dreieimpulsbevarelse for roterende foreleser



$$\vec{L}_{\text{system}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_f + \vec{L}_h = \vec{L}_o$$
$$\vec{L}_h = -\vec{L}_o$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f = 2\vec{L}_o$$

SVINGNINGER

[YF 14; LL 9]

63

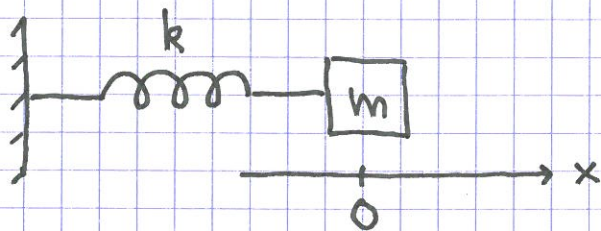
= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller ...

Harmonisk oscillator

[YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ($F = 0$) med m (CM) i $x = 0$

Strukket fjær, $x > 0$:

Sammenpresset fjær, $x < 0$:

Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

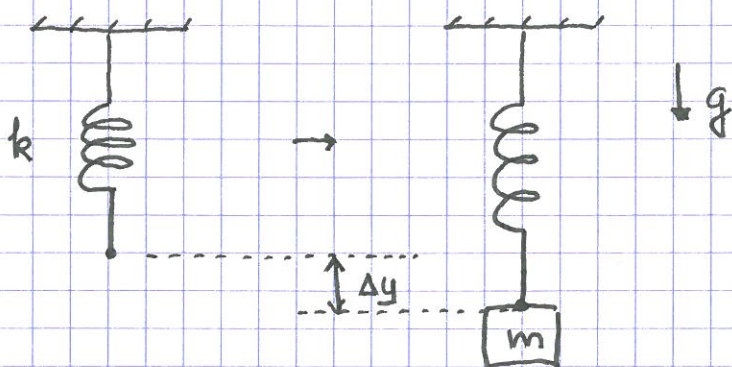
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k \times \hat{x}}$$

Fjærkonstanten: k

$$[k] = \text{N/m}$$

Vertikalt i tyngdefeltet:

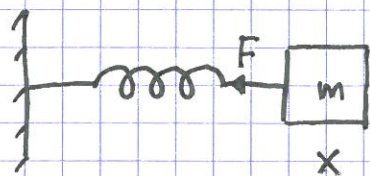
64



Likevekt:

$$k \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$



$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Innfør $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Enkel harm. osc.
i en dimensjon

Løsning: Frie svingninger uten damping.

Ser at både $\sin \omega_0 t$ og $\cos \omega_0 t$ løser ligningen, siden
 $\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega_0 t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$, og tilsvarende for $\cos \omega_0 t$.

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{evt} \quad x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

Int.konst. A, φ evt. B, C fastlegges med 2 initialbetingelser,

f.eks: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ gir relasjoner
mellom A, φ og B, C]

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

65

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkel-frekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning ; $[T] = s$

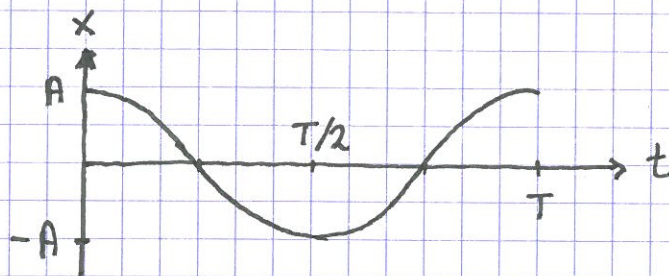
$f = 1/T$ = frekvens = svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

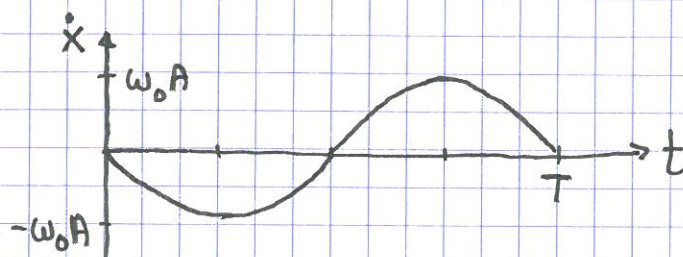
φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:

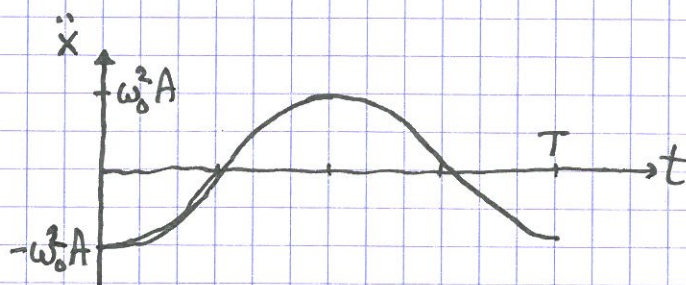
$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega_0 A \sin \omega_0 t \\ &= \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t \\ &= -\omega_0^2 x \\ &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi) \end{aligned}$$



Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]



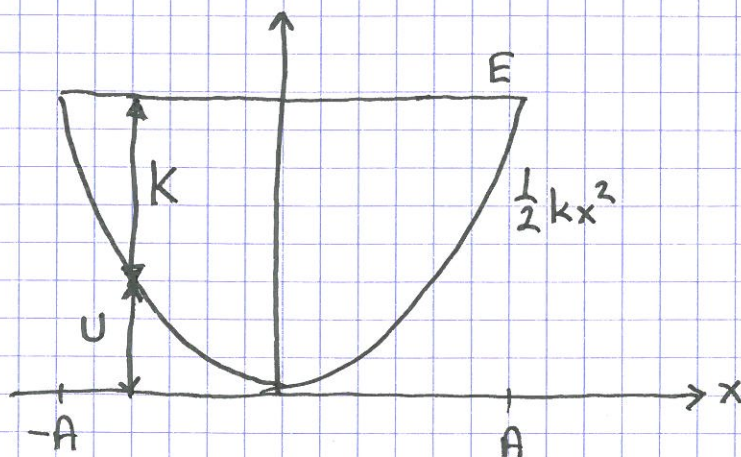
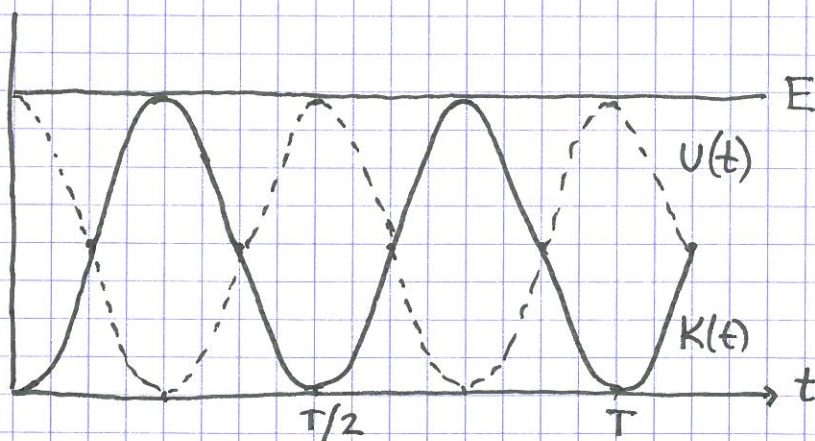
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

⇒ Systemet er konservativt, dvs E er bevaret (mek. energi) :

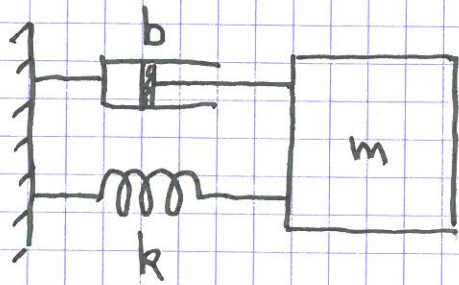
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.}$$



Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

67

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs friksjon i fluid (langsom bevegelse).



Netto kraft på m:

$$-kx - b\dot{x}$$

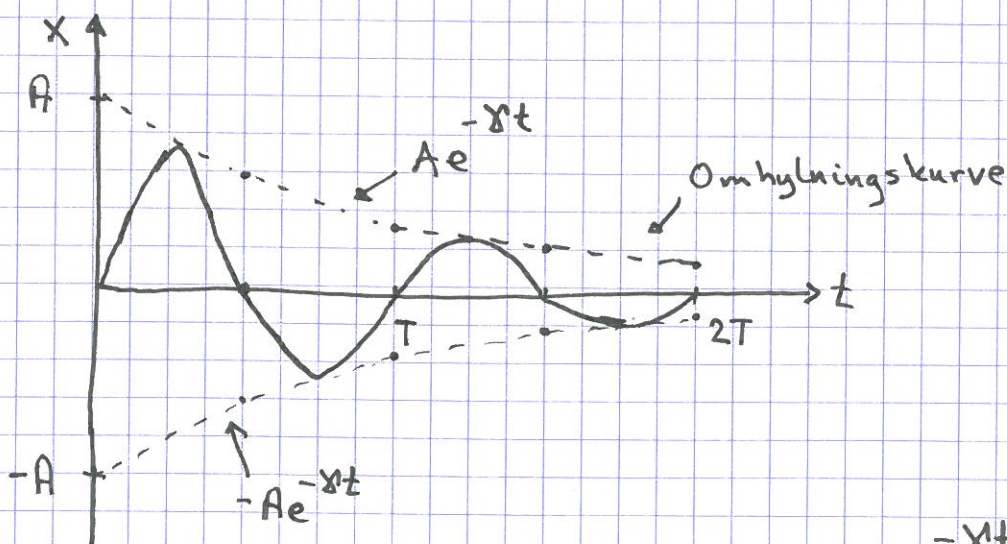
$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \gamma = b/2m, \quad \omega_0^2 = k/m$$
$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsning:

Underkritisk (svak) demping, $\gamma < \omega_0$ ($b < 2\sqrt{k \cdot m}$)

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$



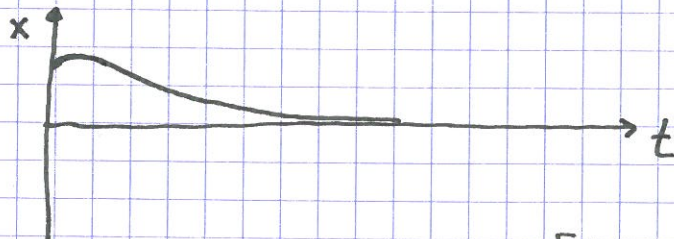
\Rightarrow Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$:

68

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

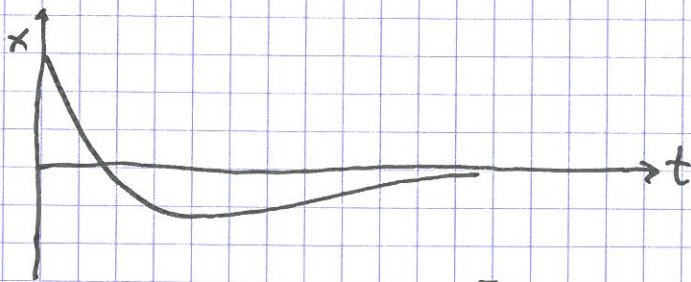


Ingen svingninger

[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$]

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$]

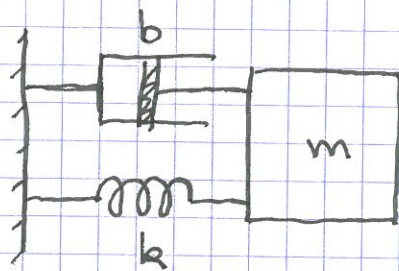
Eks: Støtdempere i (f.eks.) bil.

Mest behagelig med $\gamma \approx \omega_0$ på humpete veier

Tvingen svingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

06.10.14



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\gamma = b/2m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \text{slik at}$$

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (\text{homogen løsn.})$$

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{partikulærløsn.})$$

I starten bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $t \gg 1/\gamma$ slik at $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ og $x_h \rightarrow 0$.

Da er $x(t) = x_p(t)$.

$$\text{Vi gjetter } x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \right\}$$

Resonans: Anta svak damping, $\gamma \ll \omega_0$. Da blir $A(\omega)$ stor hvis $\omega \approx \omega_0$, dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens ω lik systemets egenfrekvens (resonansfrekvens) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$A(\omega) \rightarrow \infty$ dersom $\gamma \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \omega_0$

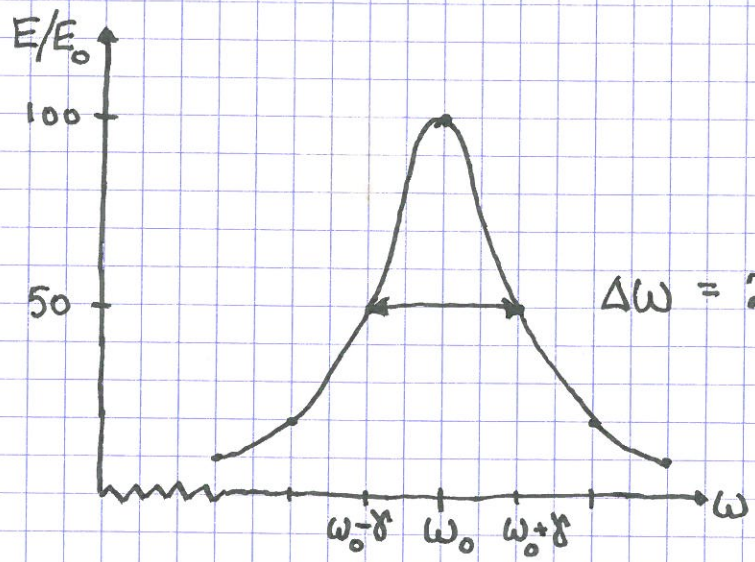
[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \frac{F_0^2}{2k} \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

dimensjonsløs funksjon av ω



Anta $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma = \text{halvverdi-bredden}$

Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

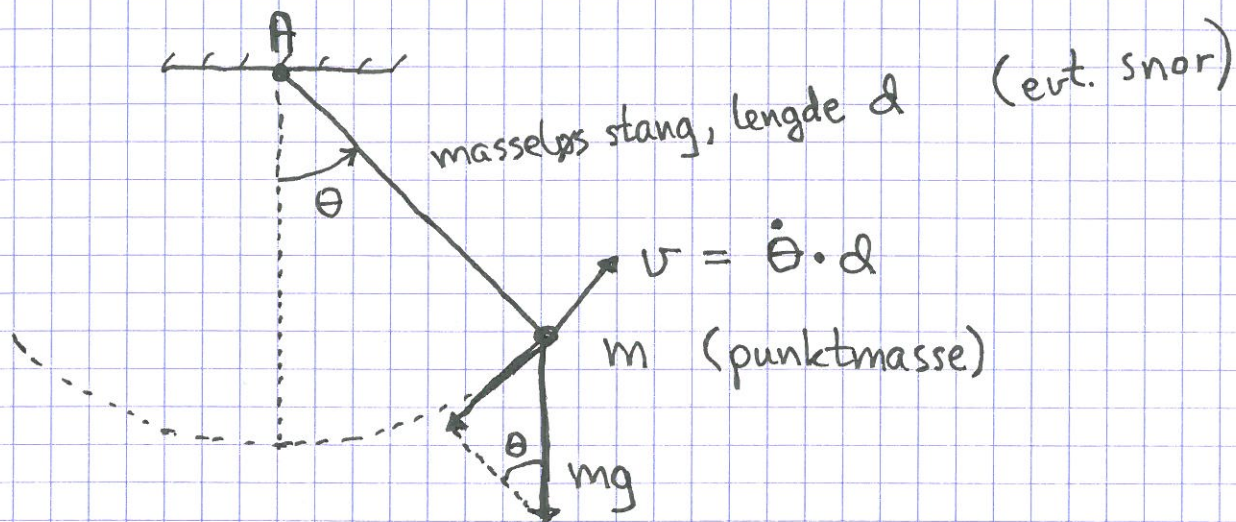
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad [Q \text{ for } \underline{q}uality!]$$

Dvs: Mindre damping \Rightarrow Smalere resonans \Rightarrow Større Q-verdi

[Her er $Q = 10$]

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]

71



N2 || sirkelbanen:

$$-mg \sin \theta = m a_{||} = m \dot{v} = m \cdot l \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs $|\theta| \ll 1$.

Da er $\sin \theta \approx \theta$, og vi har enkel harm. osc:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

$$\text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde $\sin \theta$ i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik:

Anta kjente startbetingelser $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$

72

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d} \cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{||} \Rightarrow dv = a_{||} \cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{||} \cdot \Delta t \stackrel{(\text{her})}{=} -g \sin\theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d} \Delta t ; v(\Delta t) \approx v_0 - g \sin\theta_0 \cdot \Delta t$$

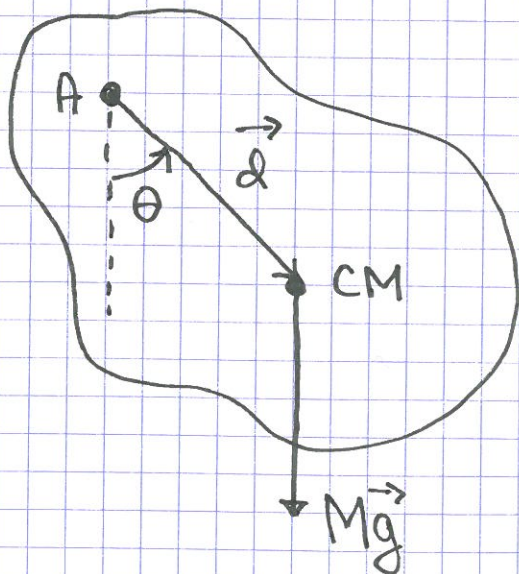
$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d} \Delta t ; v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin\theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

osv. osv. [Eulermetoden]

09.10.14

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme. Masse M .
Kan svinge (friksjonsfritt) om
akse gjennom A . Tregkrets-
moment I mhp rot.aksen.

Med ~~A~~ som ref. punkt
(ref.akse) er CM i
posisjon d

Bestem svingeperioden T .

(Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$)

Ytre krefter: $M\vec{g}$, og \vec{F}_A = kraften fra akslingen på legemet. \vec{F}_A er ukjent, både abs.verdi og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er \vec{F}_A lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og dermed med null komponent normalt på snora/stanga, slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med fysisk pendel har \vec{F}_A generelt komponenter både parallelt med \vec{d} (se fig) og normalt på \vec{d} .]

Men: \vec{F}_A har ingen arm relativt akse gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment mhp denne akse.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

[Fortegnet: $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$ er rettet inn i planet, dvs tyngdens dreiemoment gir reduisert vinkelakselerasjon når vinkelen θ er ~~negativ~~ positiv, som i figuren.]

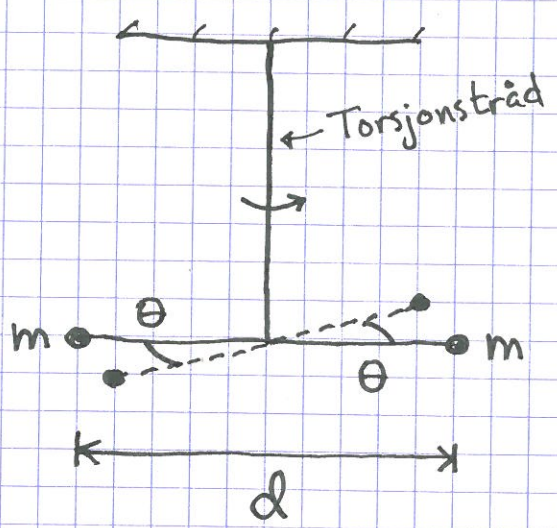
$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med $\omega_0^2 = Mgd / I$

$$\Rightarrow T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / Mgd}$$

Steiners sats $\rightarrow 2\pi \sqrt{(I_0 + Md^2) / Mgd}$ ($\rightarrow \infty$ når $d \rightarrow 0$, som ventet)

Torsjionspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde d og to masser m i hver ende; treghetsmoment $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$] med dreiemoment τ prop. med vridningen θ

$$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta \quad [YF: \text{æ} ; LL: \Gamma]$$

N2, rot. om trådens akse: $\tau = I \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$$\Rightarrow \text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{I/D}$$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

D = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{N \cdot m} = \frac{1}{J}$$

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Hovedtema:

- I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer [YF 21-24; LHL 19-20]
- II. El. strøm, DC-kretser [YF 25-26; LHL 22-22]
- III. Magnetostatikk. Magnetisme [YF 27-28; LHL 23, 26]
- IV. E.m. induksjon. AC-kretser [YF 29-31; LHL 24, 25, 27]

[Ikke Gauss' lov og Ampere's lov]

Plan: Rød tråd fra Coulombs lov til hvordan kretselementer som motstand (R), kondensator (C) og induktans/spole (L) virker.

I. Elektrostatikk [YF 21-24; LHL 19-20]

Elektrisk ladning [YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = Atomer

Atom = Kjerne + Elektroner

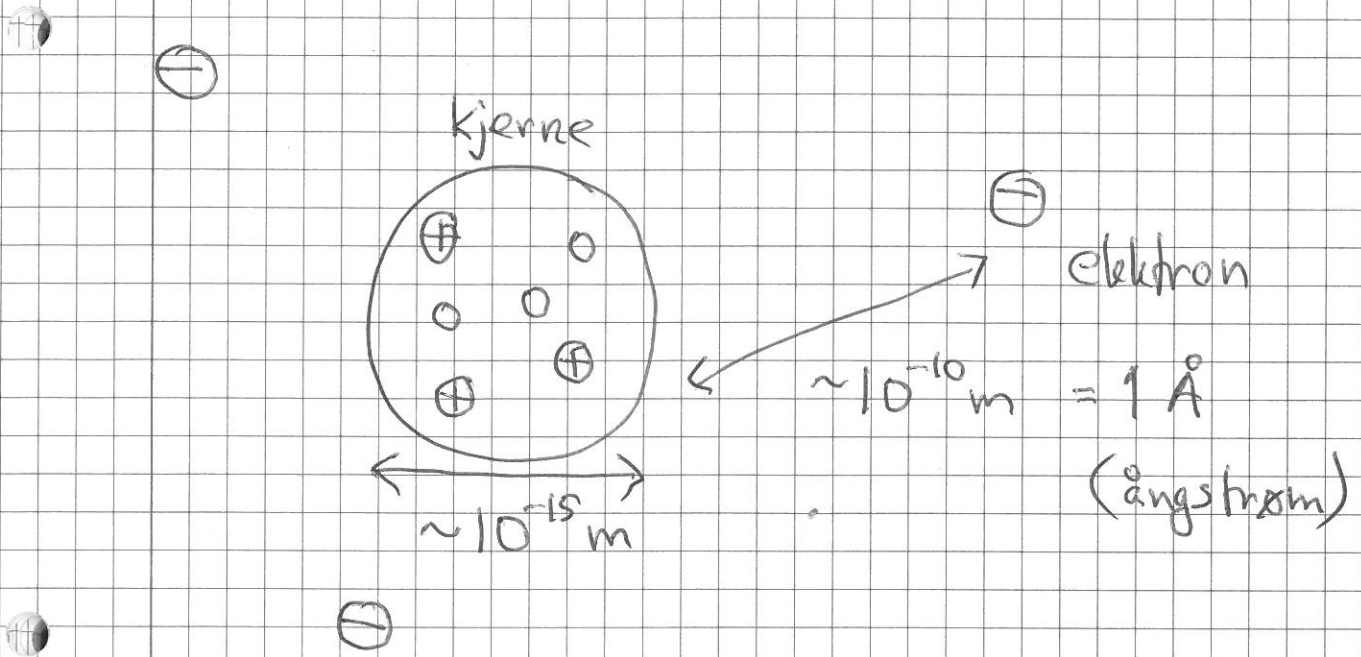
Kjerne = Protoner + Nøytroner (=kjernepartikler)

En kjernepartikkel = Tre kvarker

Elektroner og kvarker er elementærpartikler.

Atom:

76



Elementarpartiklene har kvantisert ladning

(og masse):

[Kvarker har $q_k = -\frac{e}{3}$ eller $+\frac{2e}{3}$.]

- Elektron: \ominus $q_e = -e$ $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Proton: \oplus $q_p = +e$ $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Neutron: \circ $q_n = 0$ $m_n \approx \text{---||---}$

Exp: Kvantisert elektronladning påvist av

R. Millikan i oljedråpeforsøk [NP 1923]

[NP = NobelPris]

Nøytrale atomer med atomnummer Z har

(77)

• Z protoner og Z elektroner

$$\Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$$

Ioner er atomer og molekyler med overskudd eller underskudd av elektron(er):

• Eks:

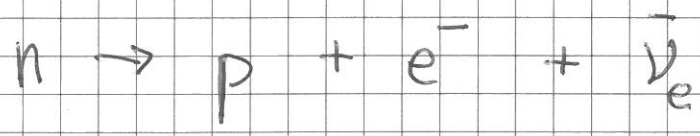
O^{2-} = oksygenatom med 2 ekstra elektroner,
dvs ladn. $-2e$

O_2^- = O_2 -molekyl med 1 ekstra elektron,
dvs ladn. $-e$

Ladningsbevarelse:

Netto ladning i et lukket system er konstant

Eks: I β -decay omdannes et nøytron (n) til et proton (p) og et elektron (e^-), samt et nøytrald antineutrino ($\bar{\nu}_e$),



Ladning før: $Q = q_n = 0$

Ladn. etter: $Q = q_p + q_{e^-} + q_{\bar{\nu}_e}$
 $= e - e + 0 = 0$

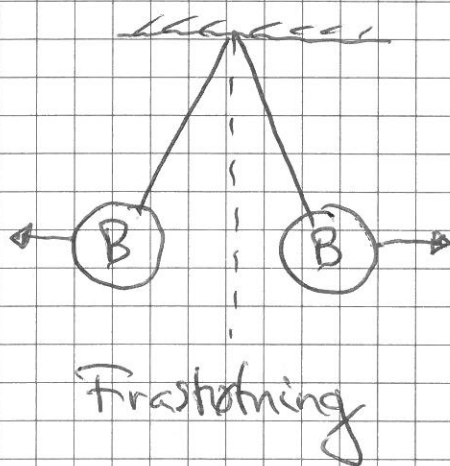
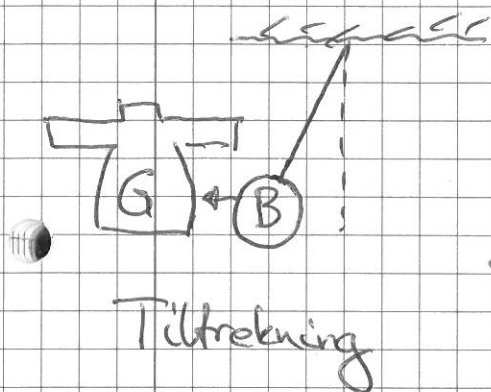
\Rightarrow Netto el. ladn. er bevart.

[Med krårker: Nøytronet består av 1 "up"- og 2 "down"-krårker, der $q_u = -e/3$, $q_d = 2e/3$.

En "down" omdannes til "up", og vi får et proton bestående av 2 up og 1 down.]

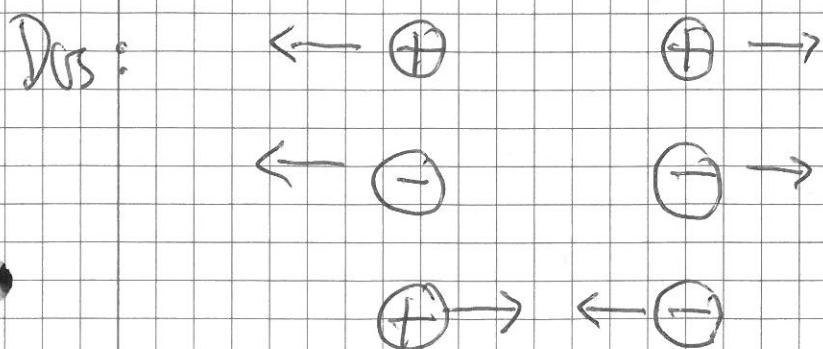
Kvalitativ påvisning av ladning:

- Gnidning av 2 ballonger mot genser viser at vi har både tiltrekkende og frastøtende elektriske krefter:



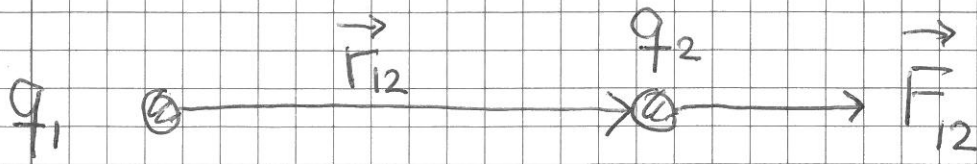
Konkluderer med:

- To typer ladning; kaller dem positiv og negativ
- Ladninger av samme type frastøter hverandre
- Ladn. av ulik type tiltrekker hverandre



Coulombs lov [YF 21.3; LHL 19.3] (80)

- Exp. med ladde kuler (Coulomb ca 1785)



Observerte: [~ betyr her "prop. med"]

- $F_{12} \sim q_1 \cdot q_2$
 - $F_{12} \sim 1/r_{12}^2$
 - $\vec{F}_{12} \sim \hat{r}_{12}$
- absoluttverdi
- retning

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = K_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{Coulombs lov}$$

Dus nøyaktig samme form som Newtons gravitasjonslov,
 $\vec{F}_{12} = -G(m_1 m_2 / r_{12}^2) \hat{r}_{12}$.

- Da er det felles klart at Newtons 3.lov også må
- gjelde for Coulomb-krefter: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Enhet for ladning [YF 21.3; LHL 19.1] (81)

• $[q] = C$ (coulomb)

- Med basis i måling av strømstyrke I med SI-enhet A (ampere):

$1 C = 1 A \cdot s =$ mengde ladning som passerer tverrsnitt av leder pr sekund når $I = 1 A$.

- Med basis i egenskapene til tomt rom (vakuum) er $K_e = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$, der ϵ_0 er permittiviteten til vakuum:

$1 C =$ ladningen til hver av to like ladninger som i innbyrdes avstand 1 m frastøter hverandre med en kraft $8.98755 \cdot 10^9 N$.

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{m}^2 \text{ N}$$

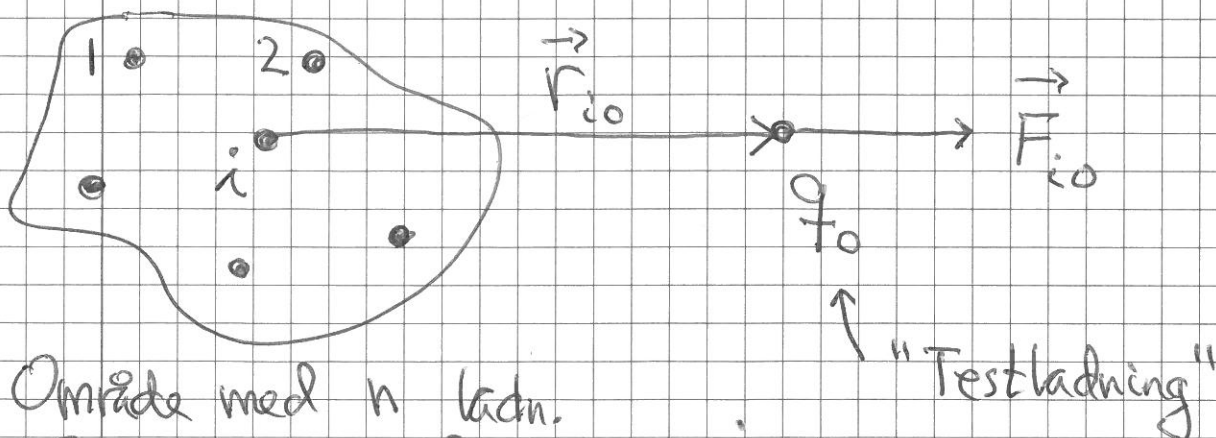
$$K_e = 8.98755 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \text{ N} / \text{C}^2 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \text{ N} / \text{C}^2$$

• Elementarladningen har da verdien

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Elektrisk kraft fra flere ladninger

[YF 21.3 ; LHL 19.3]



Område med n ldn.

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Som i mekanikken gjelder

superposisjonsprinsippet (SPP)

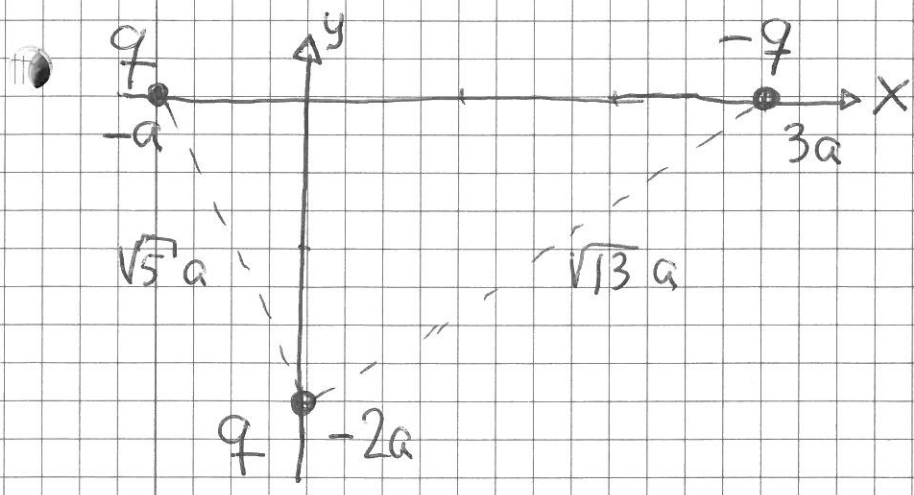
dvs total kraft \vec{F}_0 på q_0

finnes ved å addere enkeltkreftene

\vec{F}_{i0} vektorielt ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\Rightarrow \vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q_0}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

Eks. med $n=2$:



Finn kraft \vec{F}
 på q i $(0, -2a)$
 fra de to andre!

Løsning:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q \cdot q}{5a^2} \cdot \frac{a\hat{x} - 2a\hat{y}}{\sqrt{5}a} + \frac{q \cdot (-q)}{13a^2} \cdot \frac{(-3a\hat{x} - 2a\hat{y})}{\sqrt{13}a} \right\}$$

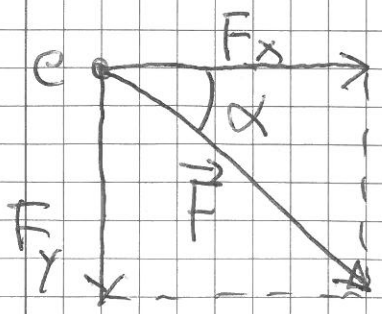
$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ \hat{x} \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{3}{13\sqrt{13}} \right) + \hat{y} \left(-\frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{13\sqrt{13}} \right) \right\}$$

Anta $q=e$ og $a = 1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$: Da blir

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6^2 \cdot 10^{-38}}{10^{-20}} = 23 \cdot 10^{-9} \text{ N, og}$$

$$\vec{F} = (3.53 \hat{x} - 3.13 \hat{y}) \text{ nN}$$

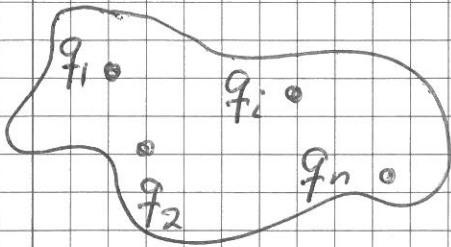
$$F = |\vec{F}| = \underline{4.72 \text{ nN}}$$



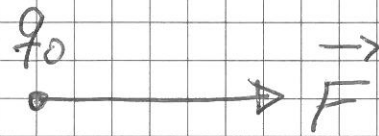
$$\alpha = \arctan \frac{3.13}{3.53} \approx \underline{42^\circ}$$

Elektrisk felt

[YF 21.4; LHL 19.4] (84)



Område med n
(referanse-)ladninger
 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$



Testladning q_0
i posisjon B

\vec{F} = kraft på q_0 fra $\{q_1, \dots, q_n\}$

Elektrisk felt \vec{E} i punkt B fra
ladn. $\{q_1, \dots, q_n\}$ er definert som kraft

pr ladningsenhet :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0}$$

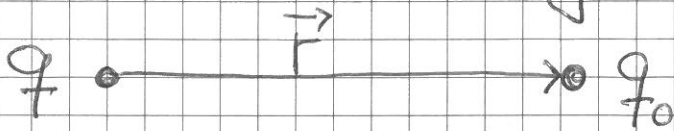
Enhet: $[E] = N/C$

Retning:

$$q_0 > 0 \Rightarrow \vec{E} \sim \vec{F}$$

$$q_0 < 0 \Rightarrow \vec{E} \sim -\vec{F}$$

\vec{E} fra punktladning [YF 21.4; LHL 19.5] (85)

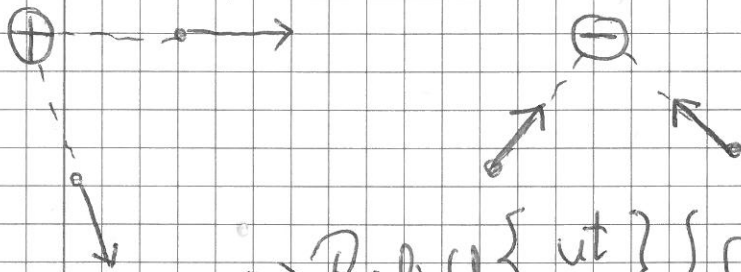


El. felt fra q , i afstand \vec{r} :

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

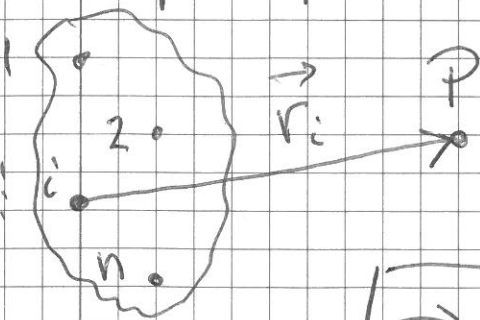
(Dvs:
uafhængig av
om q_0 er
der eller ikke!)

• Rekning:



→ Radielt $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut} \\ \text{inn} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{fra} \\ \text{mot} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{array} \right\}$ ladning

• \vec{E} fra flere punktladninger:



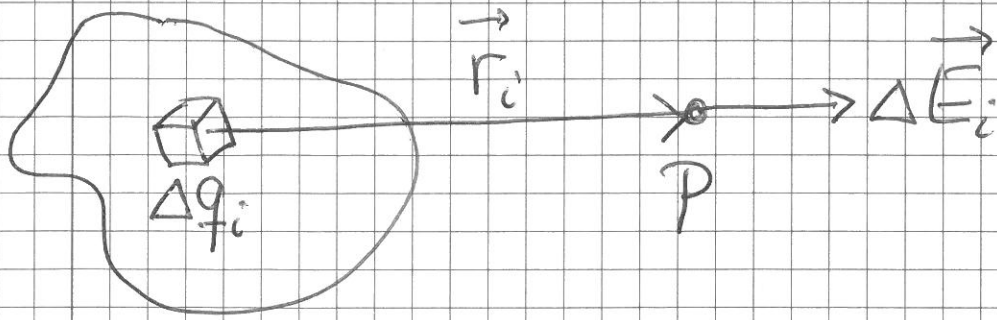
El. felt, fra $\{q_1, \dots, q_n\}$,
i position P :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

• Dvs $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, SPP gjelder for \vec{E} hvis det
gjelder for \vec{F} !

\vec{E} fra kontinuert ladningsfordeling

[YF 21.5 ; LHL 19.5]



Liten ladning Δq_i gir bidrag

$$\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

til totalt felt i posisjon P

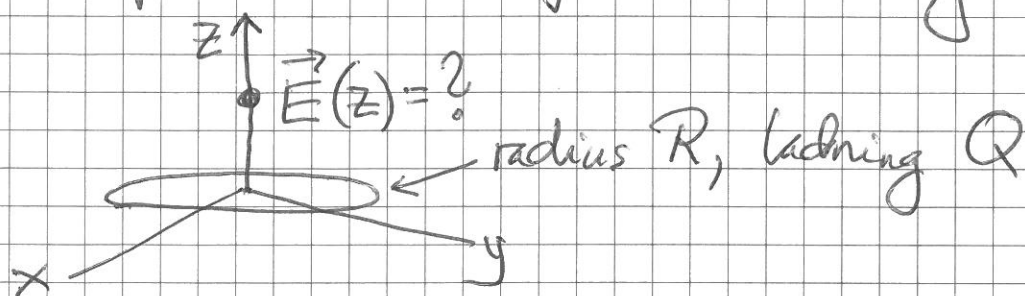
\Rightarrow Totalt felt i P blir:

$$\vec{E} = \sum_i \Delta \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$\xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow 0} \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Exs: \vec{E} på akse til jevnt ladet ring

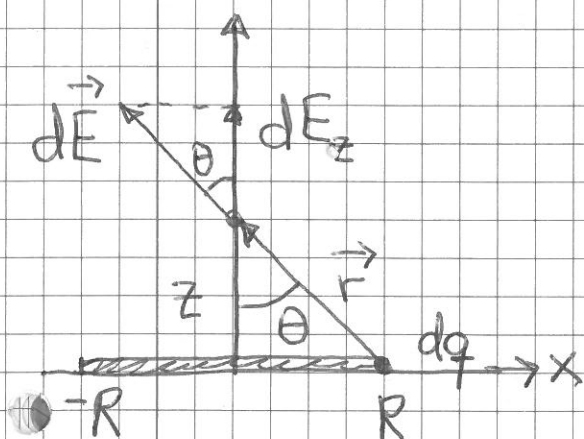
(87)



Løsning:

Pga symmetri er $E_x = E_y = 0$, dvs $\vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$

• Bidrag til E_z fra liten bit med ladning dq (lokalisert f.eks. på x-aksen):



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = dE \cdot \hat{r}$$

$$dE_z = dE \cdot \cos\theta = dE \cdot \frac{z}{r}$$

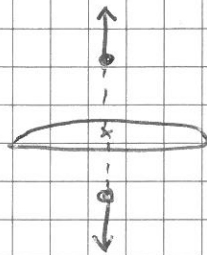
$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = Q$$

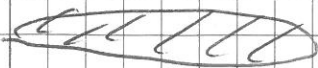
$$= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Sjekk av utregnet svar:

- Enhet: $[E_z] = [Q/\epsilon_0 z^2]$, OK
- $E_z(0) = 0$, OK
- $E_z(z \gg R) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, OK, "ser" da essensielt en punktladning Q i origo
- $E_z(z) = -E_z(-z)$, OK:



Øving 8: Bestem \vec{E} på akseu til jevnt ladd sirkulær skive.



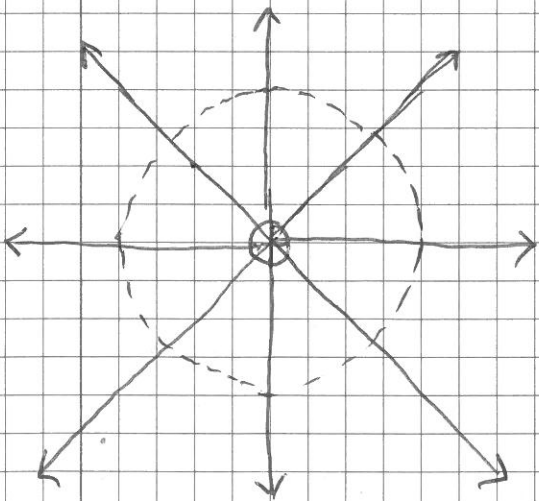
Sentralt eksempel for å forstå

kretselementet (parallelplate-) kondensator.

Feltlinjer for \vec{E} [YF 21.6; LHL 19.6] (89)

- Gir bilde av \vec{E} i et område
- $\vec{E} \parallel$ feltlinjene
- Feltstyrken $E = |\vec{E}|$ prop. med tettheten av feltlinjer, dvs # feltlinjer som krysser flate, pr flateenhet, $E \sim N/A$

Eks: Punktladning q



N feltlinjer (her: $N=8$)
Krysser kuleflaten; retning
radieelt utover når $q > 0$
(innover hvis $q < 0$)

Feltlinjetetthet på kuleskallet:

$$N/A = N/4\pi r^2 \sim 1/r^2$$

Feltstyrke på kuleskallet:

$$E = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \sim 1/r^2$$

$$\Rightarrow E \sim N/A,$$

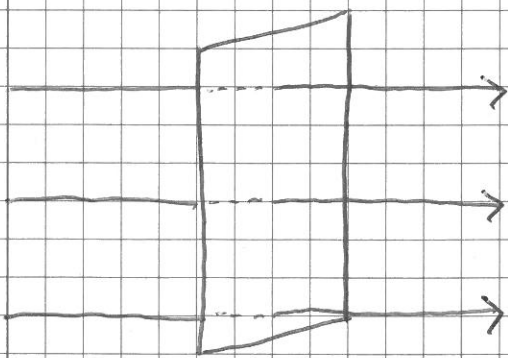
OK!

Dermed: Feltinger starter på

- positiv ladning og ender på negativ ladning; eventuelt kan de ende eller starte uendelig langt borte.

Elektrisk fluks

- [Strengt tatt ikke pensum, men siden magnetisk fluks er pensum, og sentralt i forbindelse med induksjon, tar vi med litt her og nå!]



Uniformt

$\vec{E} \perp$ flate S med areal A.

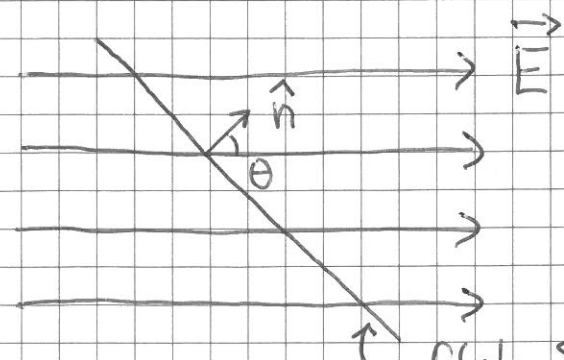
Da er elektrisk fluks gjennom S:

$$\Phi_E = E \cdot A$$

Siden $E \sim N/A$, blir $\Phi_E \sim N$

(fluks gjennom S prop. med # feltinger gjennom S)

• Uniformt \vec{E} , flate på skrå:



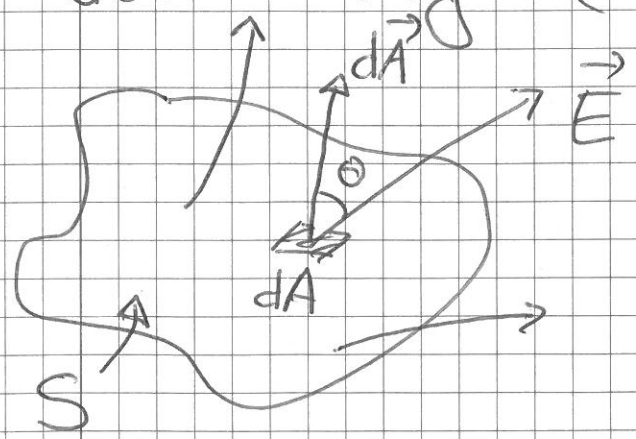
flate S , areal A , vinkel θ mellom \vec{E} og flatenormalen \hat{n} (\hat{n} = enhetsvektor \perp flaten S)

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos \theta$$

$$= \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot A = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

med "arealvektor" $\vec{A} = A \cdot \hat{n}$

• Generalisering (vilkårlig \vec{E} og S)



$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Elektrisk dipol. Dipolmoment

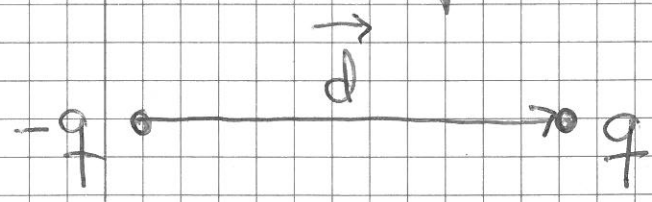
[YF 21.7 ; LHL 19.10]

- De fleste molekyler er dipoler (H_2O osv)
- Alle molekyler (og atomer) blir dipoler i et ytre elektrisk felt

⇒ Åpenbart viktig for å forstå

• materialers elektriske egenskaper!

Enkleste eksempl:



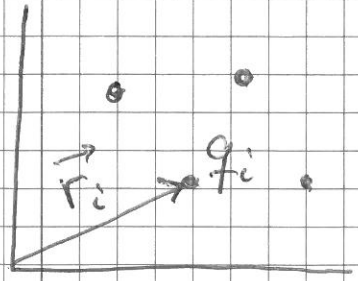
Dipol bestående av 2 punktladninger $\pm q$

Dipolmoment:
$$\vec{p} = q \vec{d}$$

Enhet: $[p] = C \cdot m$

Merk: Netto ladning $Q = 0$ for en el. dipol, alltid.

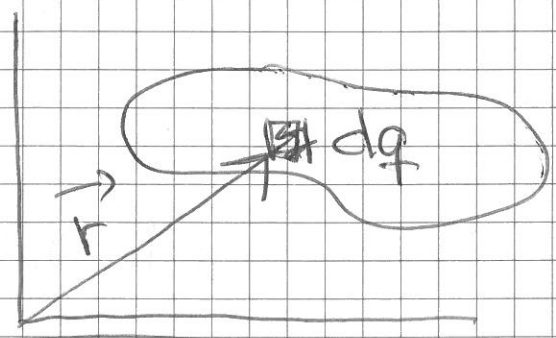
System med flere punktladninger:



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

$$(Q = \sum_i q_i = 0)$$

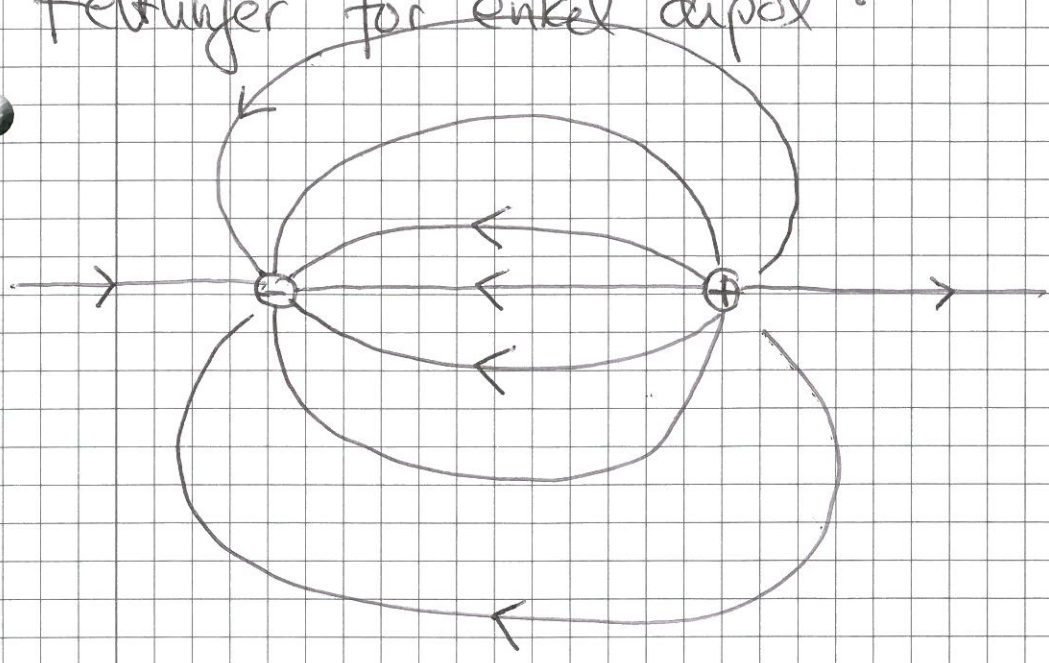
System med kontinuert ladningsfordeling:



$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

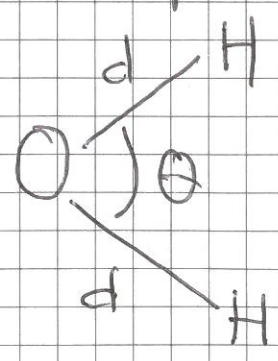
$$(Q = \int dq = 0)$$

Feltlinjer for enkel dipol:



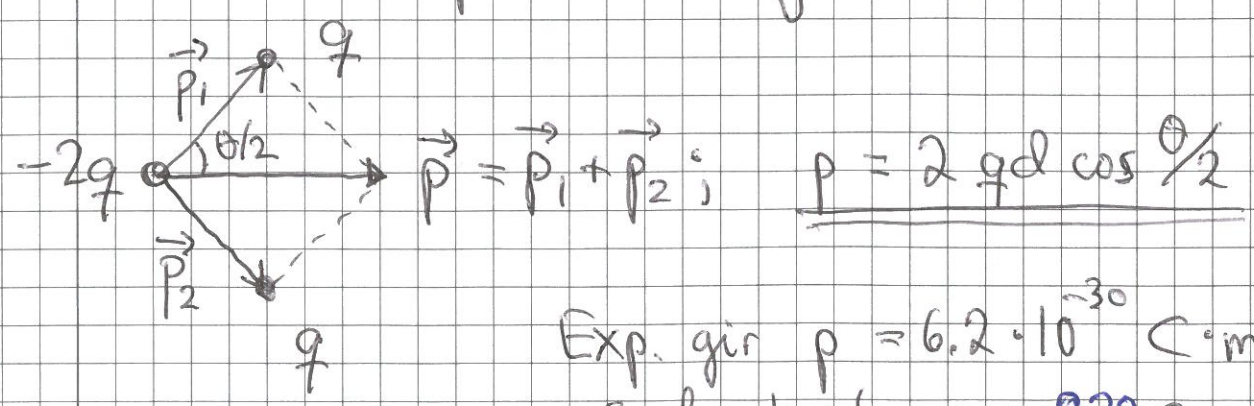
Et par eksempler!

Eks 1: \vec{p} for H_2O -molekylet



$d = 0.96 \text{ \AA}$
 $\theta = 104.5^\circ$

Modell med punktladninger:



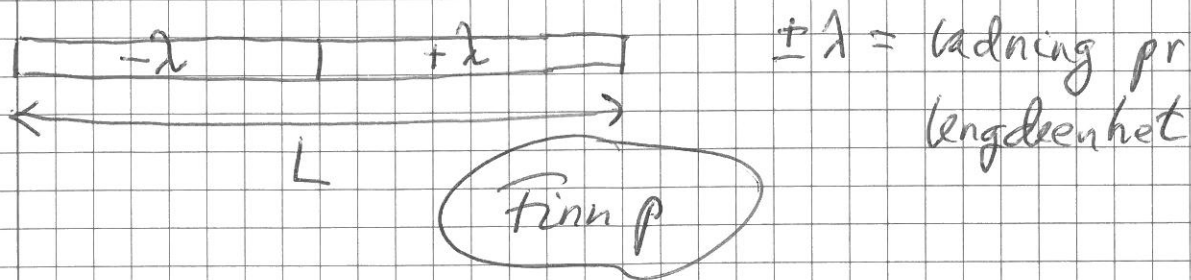
$p = 2 q d \cos \frac{\theta}{2}$

Exp. gir $p = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$;
 må da bruke $q \approx 0.33 e$.

[Har egentlig en "sky" av elektronkthet i hele molekylet!]

Eks 2: Stavedipol

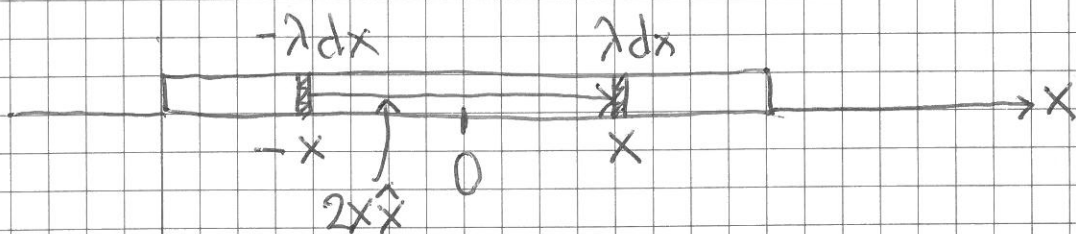
95



Løsning: Lite ladningspar (liten dipol)

$\pm dq = \pm \lambda dx$ i inbyrdes avstand

$2x$ har dipolmoment $d\vec{p} = \lambda dx \cdot 2x \cdot \hat{x} :$



⇒ Hele staven har dipolmoment

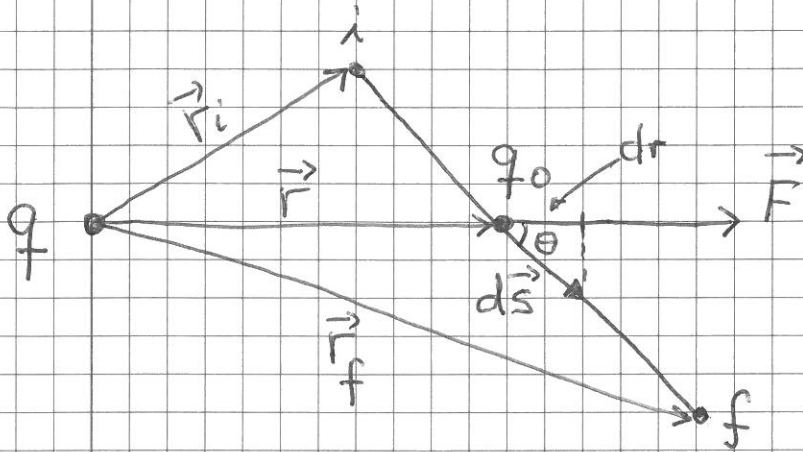
$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} \lambda dx \cdot 2x \hat{x}$$

$$= 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

$$[\text{Enhetsjeld: } [\lambda L^2] = \frac{C}{m} \cdot m^2 = (C \cdot m), \text{ OK}]$$

Elektrisk potensial [YF 23.2; LHL 19.9] (96)

- Pot. energi U for (testladn.) q_0 i \vec{E} -felt fra (referanseladn.) q :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos\theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{(def)}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} F \cdot dr$$

$$= - \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \underbrace{\frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r_f}}_{U_f} - \underbrace{\frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i}}_{U_i}$$

- Naturlig å velge $U = 0$ for $r \rightarrow \infty$; da er $U(r) = q \cdot q_0 / 4\pi\epsilon_0 r$ pot. energi for par av ldn. q og q_0 i innbyrdes avstand r .

Definerer nå elektrisk potensial V som

pot. energi U pr ladn.enhet:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} U/q_0$$

Enhet: $[V] = \text{J/C} = \text{V (volt)}$

Coulombpotensialet:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potensial i avstand r fra punktladning q

Slik $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$ er definert

blir

$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

= pot. forskjellen mellom posisjon i (initial) og f (final).

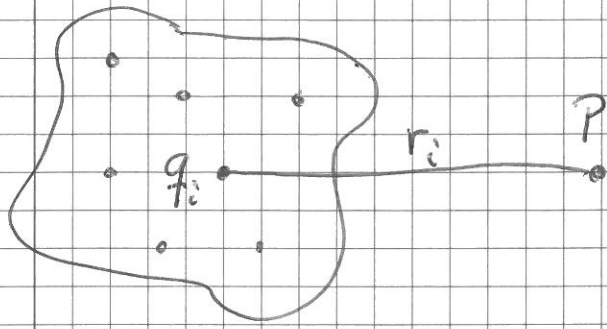
⇒ Alternativ enhet for \vec{E} : $[E] = \text{V/m}$

Alt. energienhet: 1 eV (elektronvolt) = endring i

pot. energi når ladning $q=e$ flyttes fra posisjon i der pot. er V_i til pos. f der pot. er $V_f = V_i + 1\text{V}$.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

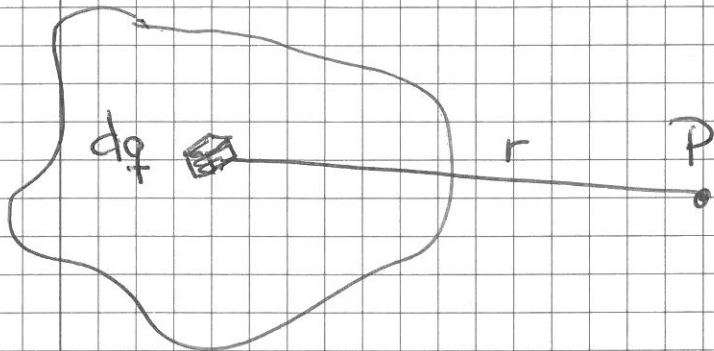
Potensial fra flere punktladninger:



$$V_P = \sum_i V_P^i$$

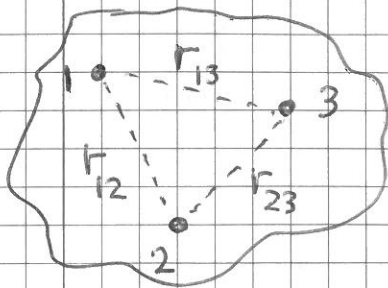
$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Pot. fra kont. ldn.-fordeling:



$$V_P = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Pot. energi for ladningssystem [YF 23.1; LHL 19.9 20.3]



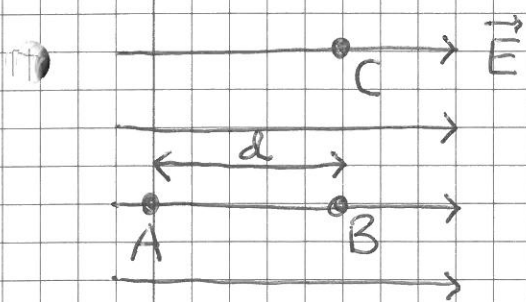
Alle ldn. i systemet vekselvirker parvis \Rightarrow Total U, relativt "referansesystemet" der alle q_i er ∞ langt fra hverandre, blir:

$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^n U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Eks 1: ΔV i uniformt \vec{E} -felt

99

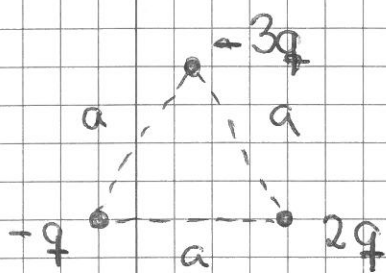


$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= -E \int_A^B ds = \underline{\underline{-E \cdot d}}$$

mens $V_C - V_D = - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underline{\underline{0}}$ fordi $\vec{E} \perp d\vec{s}$

Eks 2: U for tre punktladninger



Anta $q = e$ og $a = 5 \text{ \AA}$.
Bestem U , i både J og eV.

Løsning:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left\{ (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \right\} = - \frac{5q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$= -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 1.6^2 \cdot 10^{-38}}{5 \cdot 10^{-10}} \text{ J} = \underline{\underline{-2.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}}$$

$$= - \frac{2.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = \underline{\underline{14.4 \text{ eV}}}$$

Beregning av \vec{E} fra V

[VF 23.5; LHL 19.9]



$$d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \quad (\text{"veidement"})$$

$$dV = V(\vec{r} + d\vec{s}) - V(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Generelt, for $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$, har vi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$= \nabla f \cdot d\vec{s}$$

der $\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$

= gradienten til f

Dermed: $dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$

og det følger at

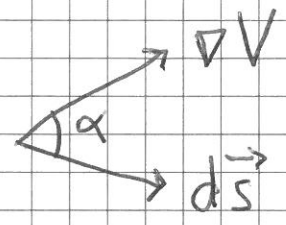
$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

$E_x = -\partial V / \partial x$ osv

Dessuten: $\vec{F} = q_0 \vec{E} = -q_0 \nabla V = -\nabla U$

Betydning av ∇V :

$dV = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$



⇒ max dV når $d\vec{s} \parallel \nabla V$ ($\alpha=0$)

⇒ ∇V er vektor i retning av max økning i V, med absoluttverdi lik endring i V pr lengdeenhet

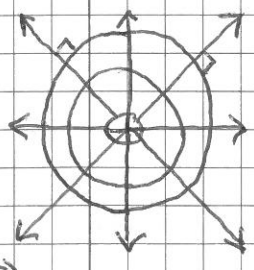
Ekvipotensialflater [YF 23.4; LHL 19.11]

= flater (ert. kurver) med konstant V

⇒ $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ når forflytning $d\vec{s}$ er på ekvipotensialflaten ⇒ $\vec{E} \perp d\vec{s}$

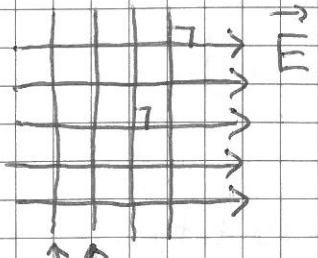
⇒ $\vec{E} \perp$ ekvipotensialflate

Eks 1: Punktladning



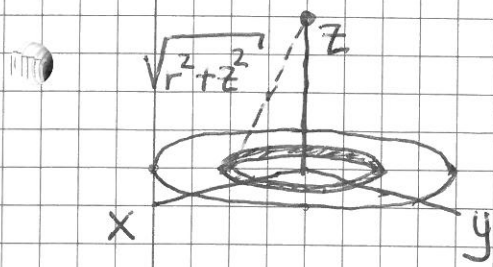
\vec{E} radielt ⇒ Ekvipot. fl. er kuleskall

Eks 2: Uniformt \vec{E} -felt



Ekvipot. fl. er plan $\perp \vec{E}$

Eks: V og \vec{E} på akse til jevnt ladet skive (102)



$\sigma =$ ladning pr flateenhet

$R =$ skivas radius

$[Q = \sigma A = \sigma \pi R^2 = \text{skivas ladning}]$

Bidrag dV til $V(z)$ fra smal ring med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r dr$, ladning $dq = \sigma dA$, avstand $\sqrt{r^2 + z^2}$ til punkt på z -aksen:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{R^2 + z^2} - z \right\} \quad \text{Jf. 80.8}$$

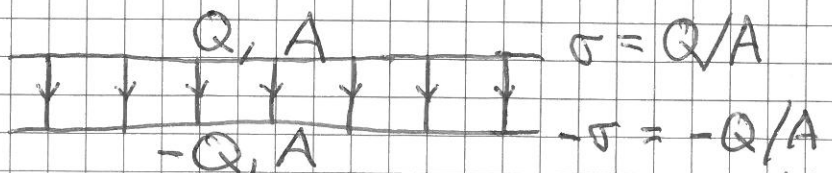
$$\Rightarrow \vec{E}(z) = -\nabla V(z) = -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = -\hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right\}$$

Viktig "grensetilfelle": $R \gg z$, dvs meget stort plan, evt. meget nært det ladde planet.

Da er $z/\sqrt{R^2 + z^2} \approx z/R \ll 1$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} ; \text{ dvs } \underline{\text{uniformt}} \text{ elektrisk felt!}$$

Plattekondensator:



$$\sigma = Q/A$$

$$-\sigma = -Q/A$$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ mellom de to platenes (tilnærmet uniformt)}$$

Materialets elektriske egenskaber

Ledere (Metaller): γ_F 22.5 ; LHL 19.8

Dielektrika (Isolatorer): γ_F 24.4, 24.5 ; LHL 20.5

Ledere

Har frie, mobile ledninger som bevæger sig i lederen/metallet hvis de påvirkes af kræfter.

• $\vec{E} = 0$ inni metallet (i elektrostatisk tilstand)

Hvis $\vec{E} \neq 0$, er $\vec{F} = q\vec{E} \neq 0$ på fri ledning q , dvs vi har ikke tilstand!

• Netto ledning må ligge på overflaten på metalstykket

Pga at $F(r) \sim 1/r^2$ er ledningsdensiteten $\rho = 0$ inni metallet

• $\vec{E} \perp$ overflaten på metaloverflade, og $|\vec{E}| = \sigma/\epsilon_0$

Her er $\sigma =$ ledn. pr f.teenhed på metallets overflade.

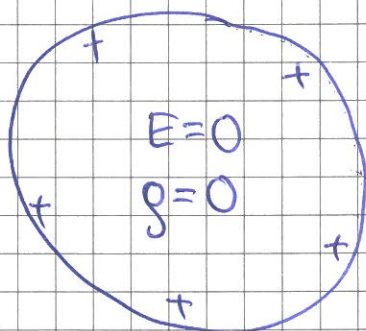
Hvis $E_{\parallel} \neq 0$, er $F_{\parallel} = qE_{\parallel} \neq 0$, dvs ikke tilstand!

- Et metallstykke er et ekvipotensial i likevekt

Med $d\vec{S}$ i/på metallstykket er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$,
 da $\vec{E} = 0$ inni og $\vec{E} \perp d\vec{S}$ på overflaten.

- Metall med hulrom har $E=0$ i hulrommet og all netto ladning på ytre overflate

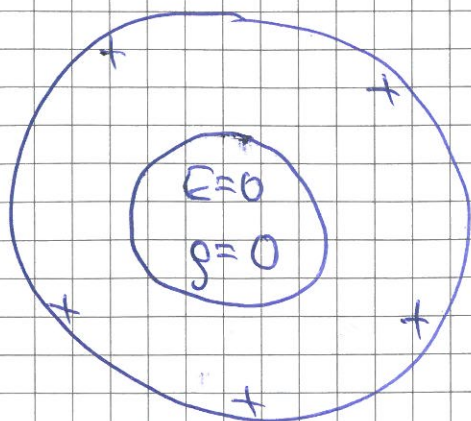
Bevis:



Kompakt metallbit

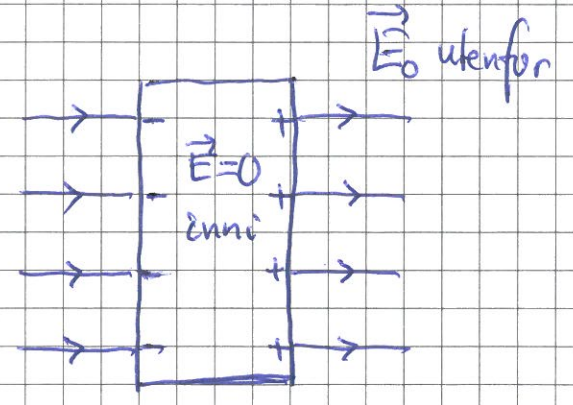
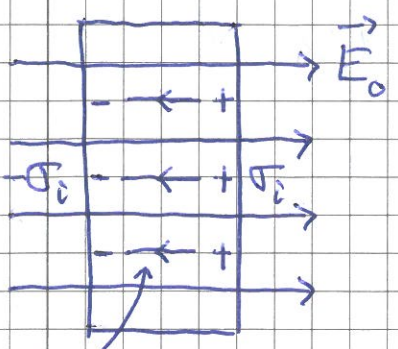


Fjern negtral metallbit inni;
 endrer da verken \vec{E} eller g



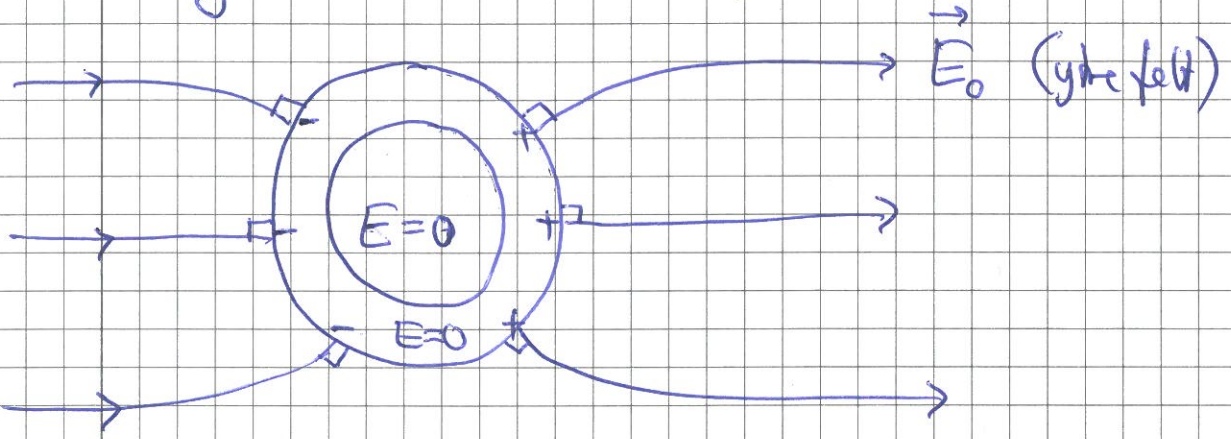
Metallbit ^m/hulrom

Metall i ytre felt \vec{E}_0

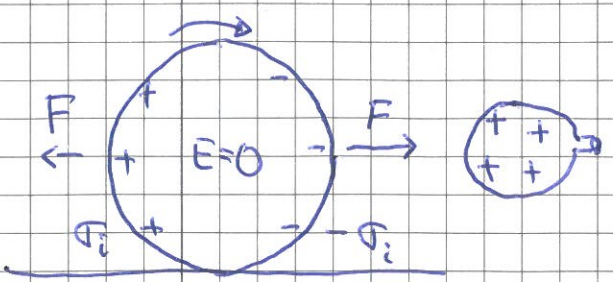


Indusert felt $\vec{E}_{ind} = -\vec{E}_0$
 inni pga indusert
 overflateledning $\pm \sigma_i$

Faradaybur (leder i hulrom):



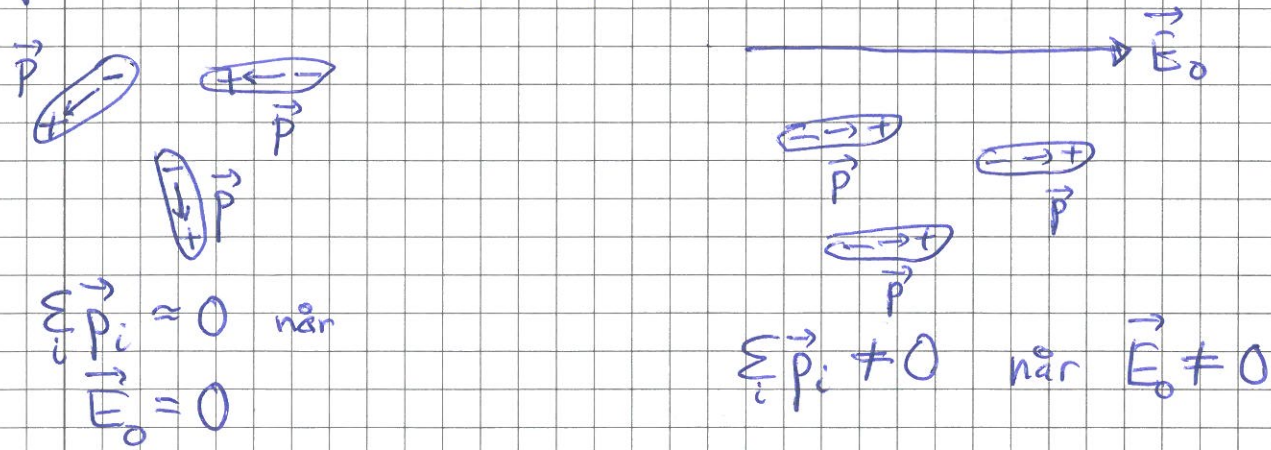
Ølboks i ytre felt fra ladd ballong:



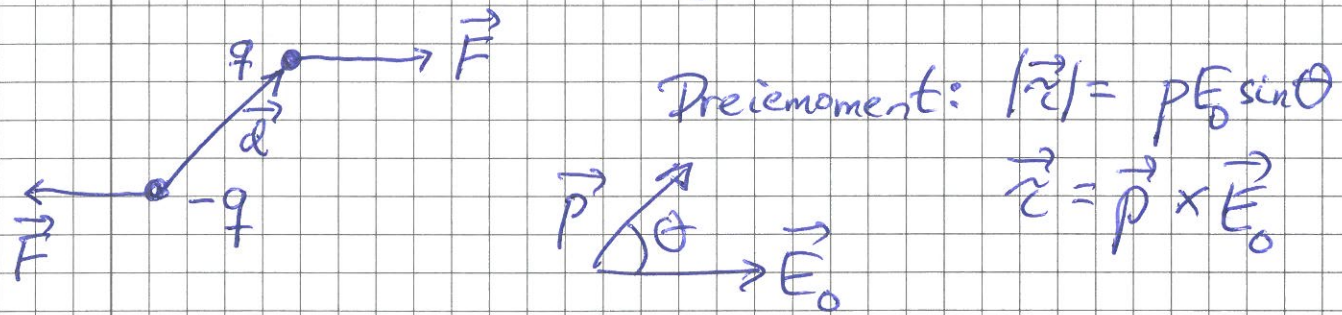
Netto feltreking pga
 konkre anstand til $-\sigma_i$
 enn til $+\sigma_i$

Isolatorer

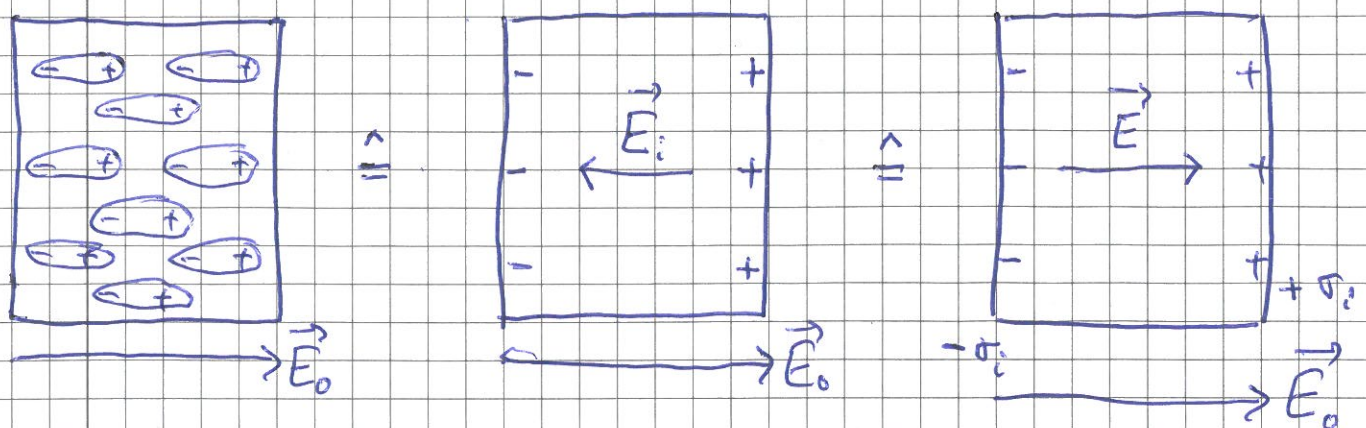
Ingen frie ladninger, men "bundet" ladning som polariseres i ytre felt \vec{E}_0 :



Ytre felt $\vec{E}_0 \Rightarrow$ Innretning av dipoler: [0r9 Nr 3]



Netto makroskopisk effekt av ytre \vec{E}_0 :



- $\rho = 0$ inni; induert nettledning $\pm \sigma_i$ p\u00e5 overflaten
- indusert felt \vec{E}_i inni \Rightarrow svekket felt inni: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$
 $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i|$

Isolatorens relative permittivitet (ert. dielektriske konstant) ϵ_r def ved

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$$

$$[\epsilon_r] = 1$$

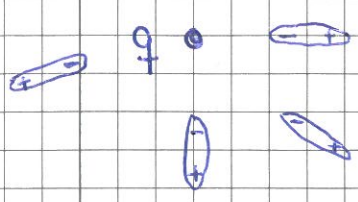
Stoffets permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Stoff	ϵ_r	Stoffets permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$
Vakuum	1	ϵ_0
Tørr luft	1,00054	$1,00054 \epsilon_0$
Plast	2-6	$(2-6) \cdot \epsilon_0$
Rent vann	80	$80 \epsilon_0$
Perfekt metall	∞	∞

Felt fra ladning q i vakuum: $E_{vac}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Felt i dielektrikum med relativ perm. ϵ_r :

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_r} E_{vac}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$



Svekket felt pga polarisering av mediet rundt q

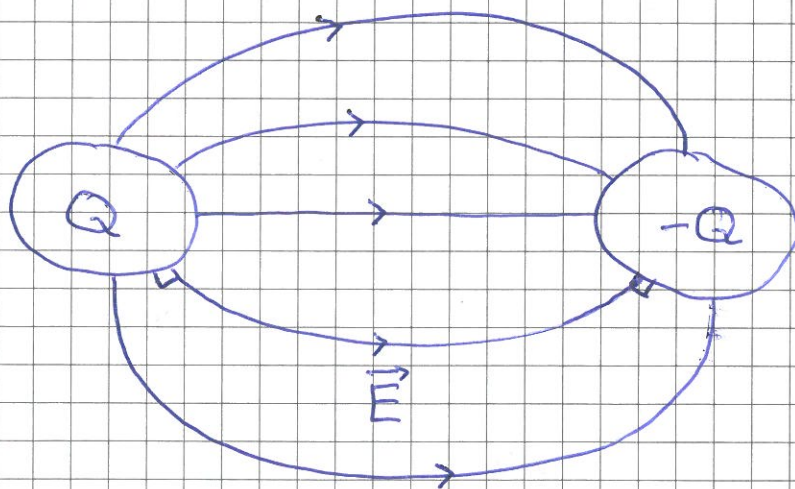
Lysfarten i vakuum: $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s; i dielektrikum: $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$

Brytningsindeksen til et stoff: $n = \sqrt{\epsilon_r}$

Kondensator og kapasitans [YF 24; UHL 20]

108

Kondensator = To ledere med ladning $\pm Q$:



Coulombs lov $\Rightarrow E$ prop. med Q

$$\Rightarrow V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

også prop. med Q

Kondensatorens kapasitans:

$$C = Q/V$$

• $[C] = \frac{C}{V} = F$ (farad)

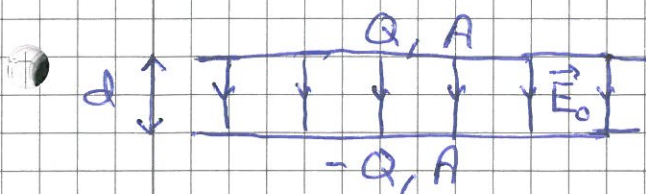
• Kretssymbol:

• Lagrer ladning og energi

• C afhænger af utforming og medium mellem lederne

• Beregning af C : Antag $\pm Q$ og regn ud V ; da er $C = \frac{Q}{V}$

Plattekondensator:



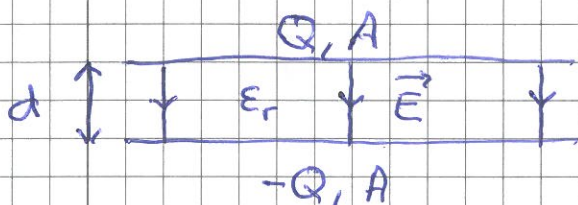
$$d \ll \sqrt{A} \Rightarrow \text{uniformt } E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0} \quad \text{mellom plattene}$$

$$\Rightarrow V_0 = E_0 d = \frac{Q d}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

↑ medium ↑ geometri

Hvis fylt med dielektrikum med relativ perm. ϵ_r :



$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 = \frac{Q/A}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow V = E d = \frac{Q d}{\epsilon_r \epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

↑ medium ↑ geometri

Dvs: Kapasitansen er økt med faktor $\epsilon_r > 1$

$$\text{Eks: } A = 1 \text{ cm}^2, d = 1 \text{ mm}, \epsilon_r = 4 \Rightarrow C \approx 3.5 \text{ pF}$$

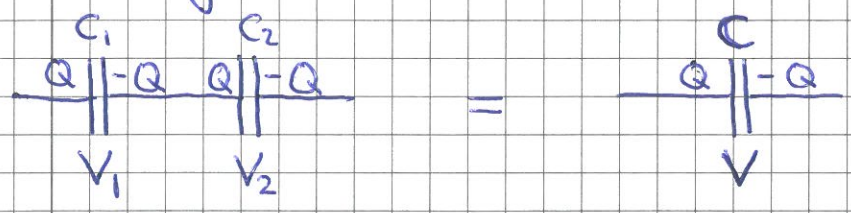
$$[C = 1 \text{ F}, d = 1 \text{ mm og } \epsilon_r = 4 \text{ krever areal } A \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m}^2 !]$$

$$\text{Når } [C] = \text{F}, \text{ har vi } [\epsilon] = [C \cdot d/A] = \underline{\text{F/m}}$$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2; LHL 20.2]

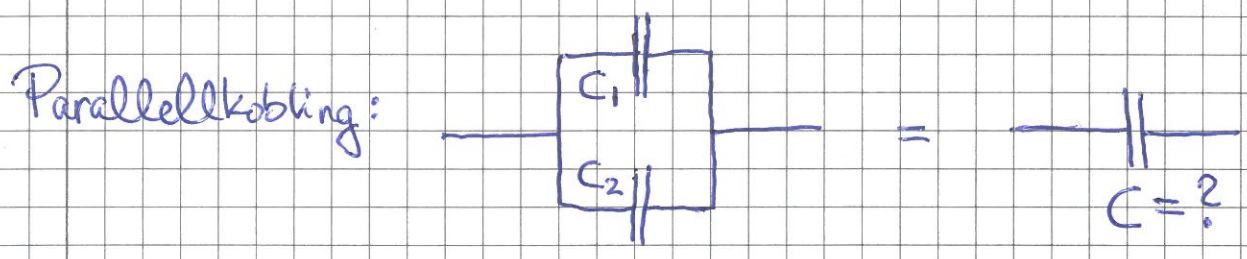


Lik ladning $\pm Q$:

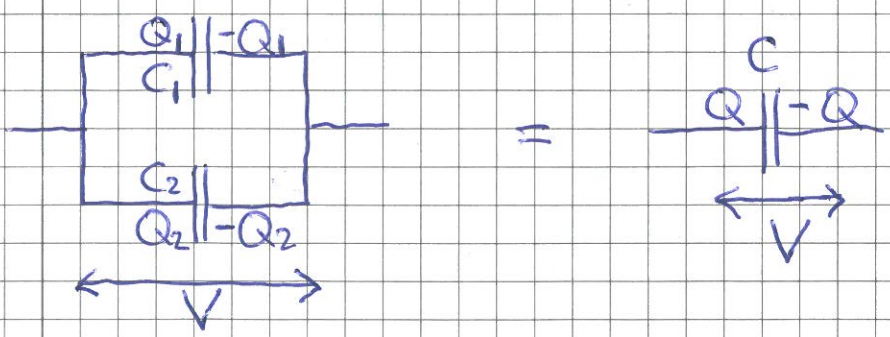


$$\Rightarrow V_1 + V_2 = V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N stk i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{i=1}^N C_i^{-1}}$



Likt potensial fall (lik spenning) V :

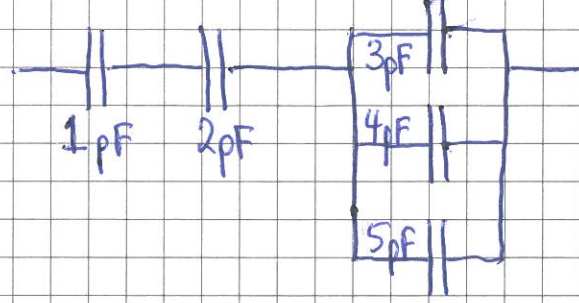


$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q \Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V$$

$$\Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Med N stk i parallell: $\boxed{C = \sum_{i=1}^N C_i}$

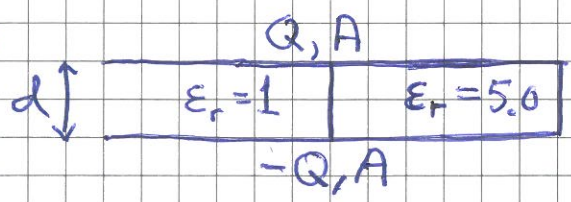
Eks 1:



Total $C = ?$

Løsning: $C = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3+4+5} \right\}^{-1} \text{ pF} = \left(\frac{19}{12} \right)^{-1} \text{ pF} = \underline{\underline{\frac{12}{19} \text{ pF}}}$

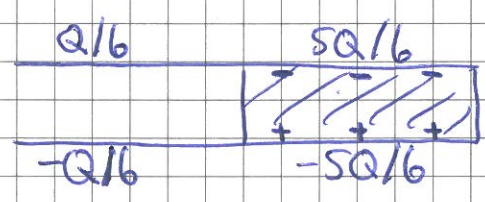
Eks 2:



$d = 1 \text{ mm}, A = 2 \text{ cm}^2$

$C = ?$

Løsning: Konstant potensial på gitt leder \Rightarrow samme (totale) elektriske felt i venstre og høyre halvdel $\Rightarrow Q/6$ og $5Q/6$ på hver venstre og høyre halvdel, fordi dielektrikum til høyre svekker feltet med faktor $1/\epsilon_r = 1/5$:

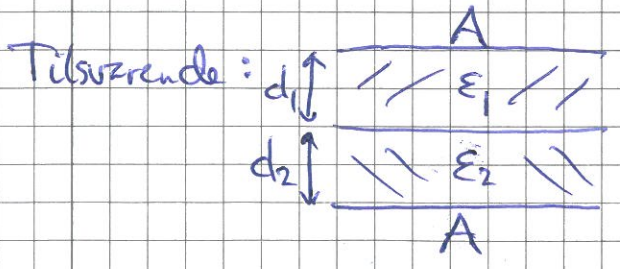


$E = \sigma/\epsilon_0 = \left(\frac{Q/6}{A/2} \right) / \epsilon_0 = \frac{Q}{3\epsilon_0 A}$

$V = Ed = \frac{Qd}{3\epsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \underline{\underline{\frac{3\epsilon_0 A}{d}}}$

\Rightarrow Som parallellkobling av $\frac{A/2}{\epsilon_0} \uparrow d$ og $\frac{A/2}{5\epsilon_0} \uparrow d$:

$C = \epsilon_0 \frac{A/2}{d} + 5\epsilon_0 \frac{A/2}{d} = \underline{\underline{\frac{3\epsilon_0 A}{d}}}$

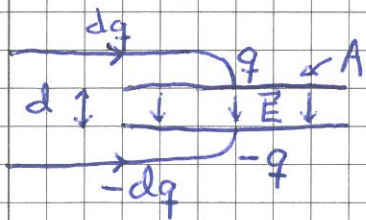


$\hat{=}$ Seriekobling av to med likt areal, fylt med henvis d_1 og d_2

Energi i \vec{E} -felt [YF 24.3; LHL 20.4]

1/2

Opplading av kondensator gir økt potensiell energi U som lagres i \vec{E} -feltet:



Økning fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ øker pot.energi med

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

\Rightarrow Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi:

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{1}{2} CV^2$$

Med $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = Ed$:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{(Ad)}$$

= volum mellom platenes, der $E \neq 0$

\Rightarrow Energi pr volumenhett i elektrisk felt er

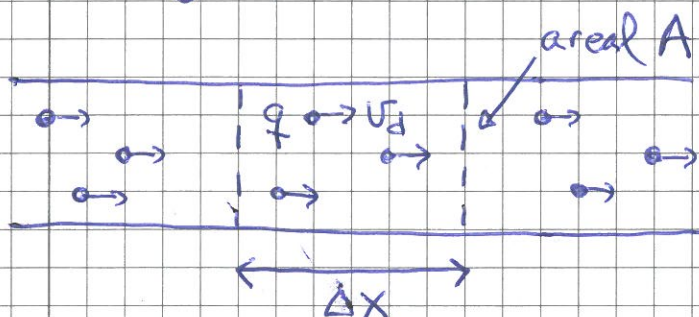
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(Gjelder generelt)

Elektrisk strøm [YF 25,26; LHL 21,22]

(13)

Strøm og strømteethet [YF 25.1; LHL 21.1]



Leder med n frie ladninger q pr volumenhed, med midlere driftshastighed v_d langs lederen

Elektrisk strøm (-styrke):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

= ladning som passerer tværsnittet af lederen pr tidsenhed

$$[I] = \text{C/s} = \text{A} \quad (\text{ampere})$$

På tid $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_d}$ passerer ladning

$$\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V = q \cdot n \cdot \Delta x \cdot A$$

tværsnittet med areal A

$$\Rightarrow I = \frac{q n \Delta x A}{\Delta x / v_d} = n q v_d A$$

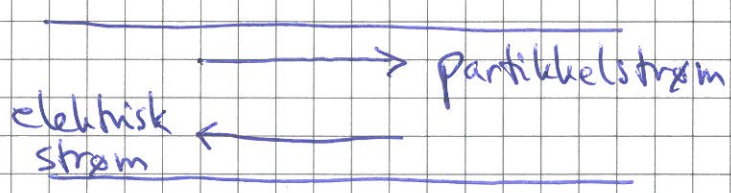
Strømtetthet:

$j = I/A = \text{strøm pr flateenhet}$

$[j] = A/m^2$

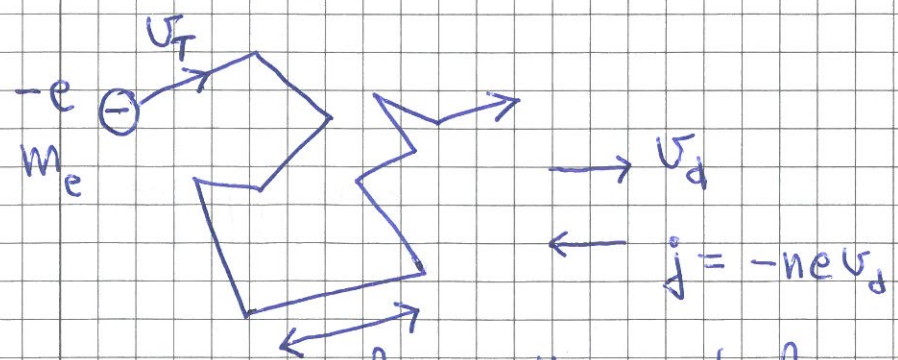
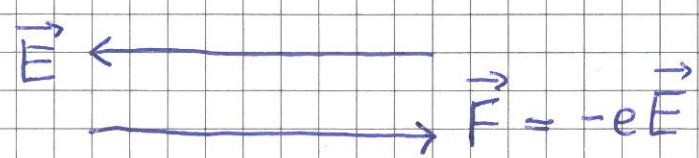
$\Rightarrow j = \frac{nq v_d A}{A} = nq v_d$ [Strømtetthet = $\frac{I}{A} = nq v_d$]

I metall: $q = -e \Rightarrow j = -ne v_d$



Ohms lov [YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

Frie elektroner kolliderer i metallet:



$d = \text{midlere avstand mellom kollisjoner}$

$\tau = d/v_T = \text{midlere tid}$

Medlere elektronhastighet v_T ved temperatur T :

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s}$$

ved $T = 300 \text{ K}$ ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)

$$\Rightarrow \tau = \lambda / v_T \sim 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 10^{-14} \text{ s}$$

$$N2: F = m_e a \Rightarrow -eE = m_e \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx m_e \frac{v_d}{\tau}$$

$$\Rightarrow v_d \approx - \frac{e\tau}{m_e} E$$

$$\Rightarrow j = -nev_d = \frac{ne^2\tau}{m_e} E$$

Ohms lov (p\u00e5 "mikroskopisk" form):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

med konduktivit\u00e9t (elektrisk ledningsevne)

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (\text{Paul Drude ca 1900})$$

$$[\sigma] = [j/E] = (\text{A/m}^2) / (\text{V/m}) = \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{m}} \quad (= \frac{\text{C}^2 \text{s}}{\text{kg m}^3})$$

Eks: Ansl\u00e5 σ i Cu. Ansl\u00e5 v_d n\u00e5r $E = 1 \text{ mV/m}$.

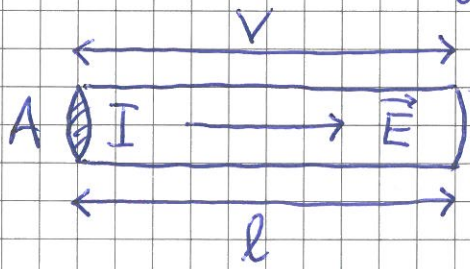
L\u00f8sn: $m_{\text{Cu}} \approx 63 \text{ g/mol}$; $8.96 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow 8.5 \cdot 10^{28} \text{ Cu pr m}^3$

Antk 1 frit elektron pr Cu $\Rightarrow \sigma \sim 2.4 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

$\sigma_{\text{exp}} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ved 20°C

$v_d \sim e\tau E / m_e \sim 10^{-6} \text{ m/s}$ (!) $\ll v_T \sim 10^5 \text{ m/s}$

En motstand er en (typisk dårlig) leder med tverrsnitt A , lengde l :



$$V = E \cdot l, \quad j = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \frac{V}{l}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma A}{l} \cdot V = G \cdot V$$

$$V = \frac{l}{\sigma A} \cdot I = R \cdot I$$

med

$$G = \frac{\sigma A}{l} = \text{lederens } \underline{\text{konduktans}}$$

$$R = G^{-1} = \frac{l}{\sigma A} = \text{lederens } \underline{\text{resistans}} \quad (\text{"motstand"})$$

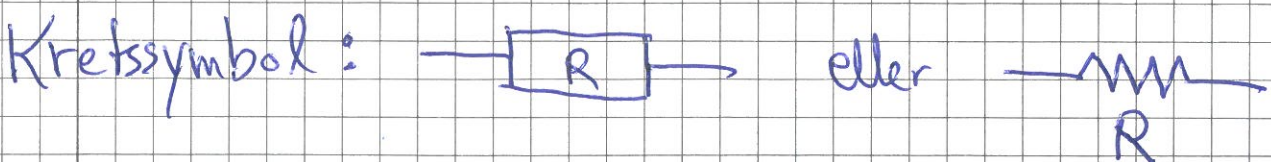
$$g = \sigma^{-1} = \text{materialets } \underline{\text{resistivitet}}$$

Enheter:

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (ohm)} \Rightarrow [G] = \Omega^{-1}$$

$$\Rightarrow [g] = \Omega \text{ m} \Rightarrow [\sigma] = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

σ og g er materialspezifiske, G og R er også avhengig av lederens dimensjoner



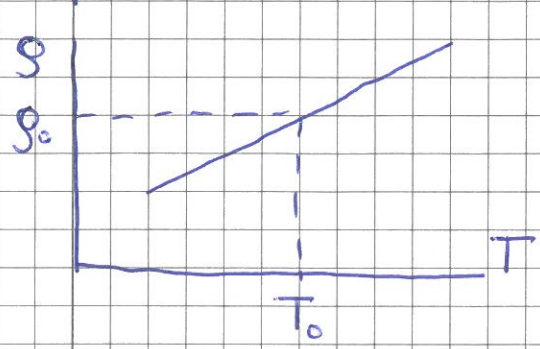
$\sigma(T)$ [YF 25.2; LHL 21.2, 21.5]

[Dinde: $\sigma = 1/\tau = m_e/n e^2 \tau$]

Metaller

Større $T \Rightarrow$ Flere kollisjoner \Rightarrow Større σ

Empirisk:



$$\sigma(T) = \sigma_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\alpha_{Al} \approx \alpha_{Cu} \approx \alpha_{Ag} \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$$

([T] = K (kelvin))

(Dvs: $\tau \sim 1/T$)

Hal-ledere (Si, Ge, GaAs, ...)

- Isolator ved $T=0$
- Større $T \Rightarrow$ Flere frie ladninger \Rightarrow Redusert σ



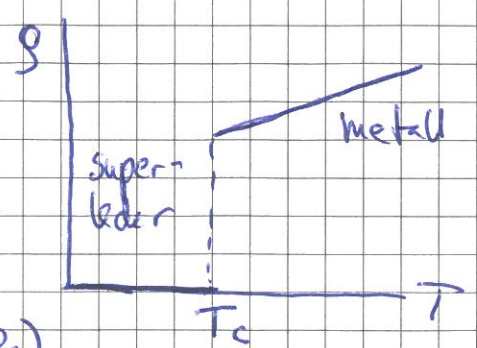
$$\tau \sim 1/T, n \sim e^{-T_g/T}$$

$$\Rightarrow \sigma \sim T e^{T_g/T}$$

$$Si: k_B T_g \approx 0.55 \text{ eV}; T_g \approx 6400 \text{ K}$$

Superledere

- $\sigma = 0$ for $T < T_c =$ kritisk temp.
- metall for $T > T_c$



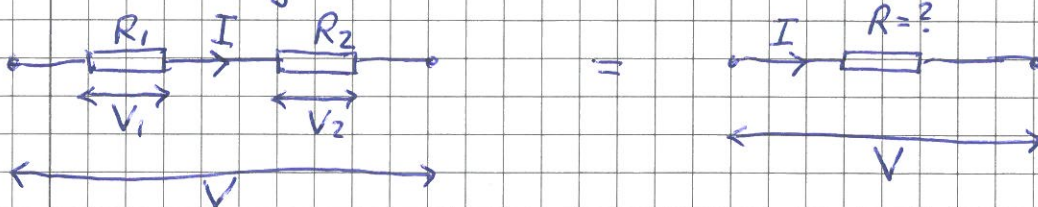
• 1911: Hg, $T_c = 4.12 \text{ K}$

• 2015: H₃S (?), $T_c = 203 \text{ K}$ ($p = 150 \text{ GPa}$)

Kobling av flere motstander [YF 26.1; LHL 21.3]

118

Seriekobling:

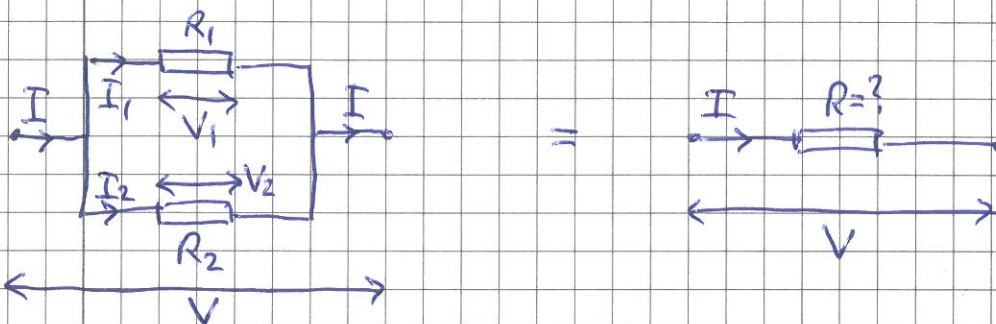


$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I ; \quad V = R I$$

$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

$$N \text{ i serie: } \boxed{R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:



$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ; \quad I = V \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

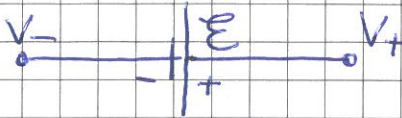
N i parallell:

$$\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

DC - kretser [YF 26 (25); LHL 22]

(119)


(DC = direct current = likestrøm)

Likespenningskilde: 

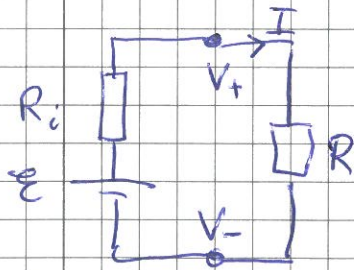
Størger for spenning (= potensialforskjell) $\mathcal{E} = V_+ - V_-$ mellom polene

\mathcal{E} = elektromotorisk spenning (ems)
= tilført energi pr ladningsenhet

Eksempler: kjemisk batteri, solcelle, ...

Reell kilde:  R_i = indre motstand i spenningskilden

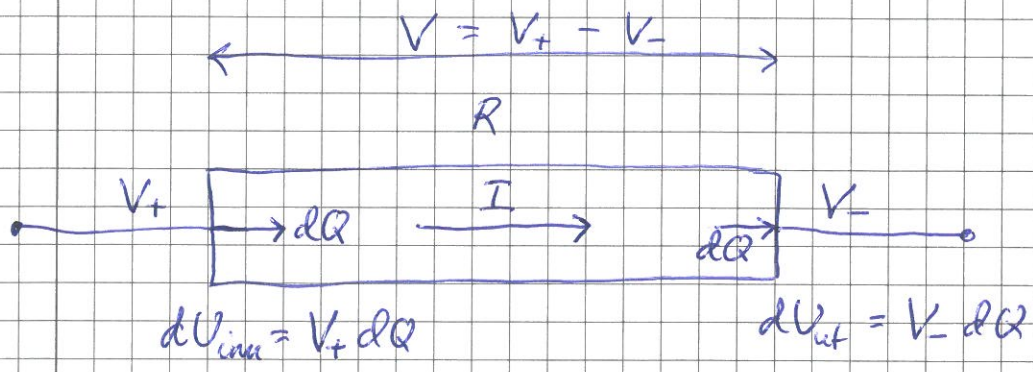
Ideell kilde: $R_i = 0$



$$\mathcal{E} = R_i I + RI$$

$V_+ - V_- = \mathcal{E} - R_i I$ = spenning levert av reell kilde ($< \mathcal{E}$ når $I > 0$)

Elektrisk effekt [YF 25.5; LHL 22.2]



Effekttyp i motstanden: [El. energi \rightarrow Varme]

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{inn} - dU_{ut}}{dt} = \frac{V_+ dQ - V_- dQ}{dt} = V \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{VI}}$$

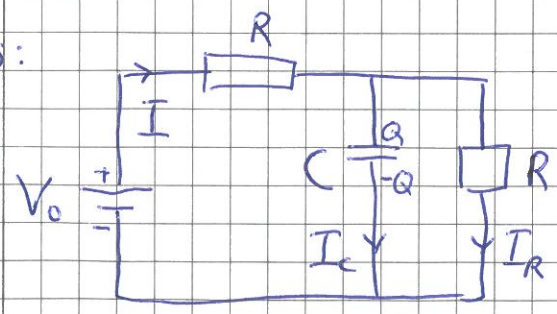
Med ohmsk motstand: $P = VI = RI^2 = V^2/R$

Kirchhoffs regler [YF 26.2; LHL 22.3]

Pga ladningsbevarelse: $\sum_j I_j = 0$ i alle knudepunkt ("K1")

Pga energibevarelse: \sum potensfaldninger = 0 for alle sløjfer ("K2")

Eks:



$$K1 \Rightarrow I = I_C + I_R$$

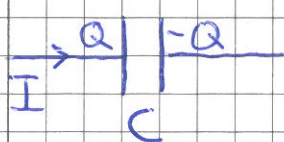
$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - Q/C = 0$$

$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - RI_R = 0$$

RC-krets [YF 26.4; LHL 22.4]

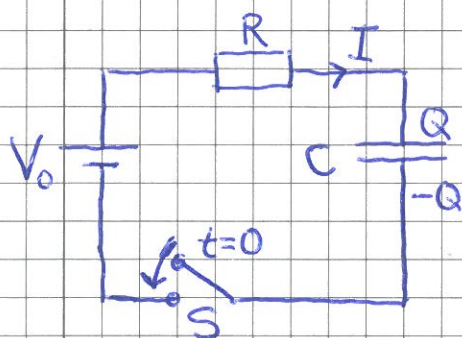


$$V = RI$$



$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}; \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

Opplading av kondensator i RC-krets:



- $Q(0) = 0$
- S lukkes ved $t=0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} + V_0 = -\frac{Q - V_0 C}{C}$$

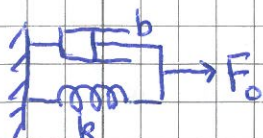
$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right] = -\frac{t}{RC}$$

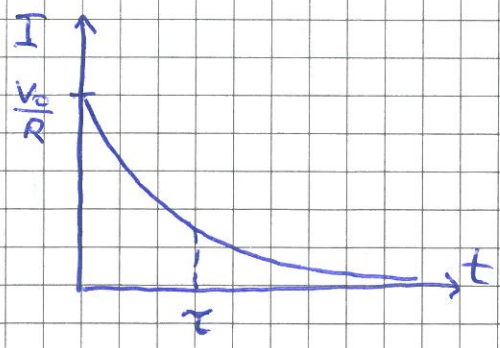
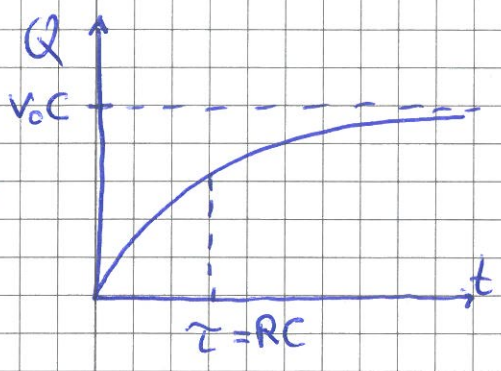
$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$

Mekanisk analogi: $F_0 - b\dot{x} - kx = m\ddot{x} \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0$



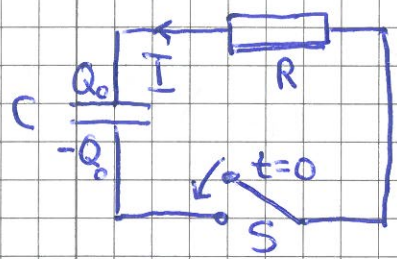
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k} \{ 1 - e^{-kt/b} \}; \quad \dot{x}(t) = \frac{F_0}{b} e^{-kt/b}$$



$\tau = RC =$ kretsens tidskonstant = karakteristisk tid for opladning og ukladning av kondensator i RC-krets.

$$Q(t=3\tau) = V_0 C (1 - e^{-3}) \approx 0.95 V_0 C$$

Utladning av kondensator i RC-krets:

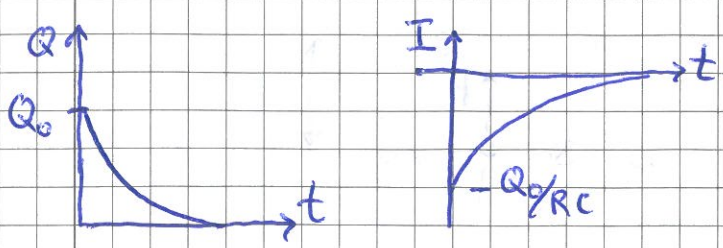


- $Q(0) = Q_0$
- S lukkes ved $t=0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2 \Rightarrow -\frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \underline{Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}} \quad ; \quad \underline{I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}}$$

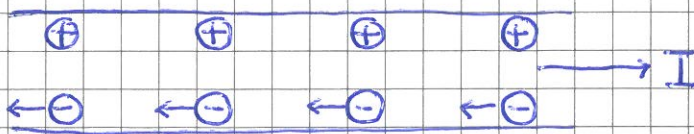


[Råd: Bruk alltid $I = + \frac{dQ}{dt}$. Får minustegn i $I(t)$ hvis vi velger feil retning på I .]

Magnetostatikk [YF 27,28 ; LHL 23]

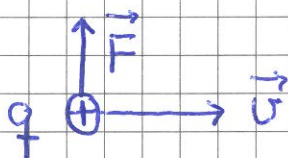
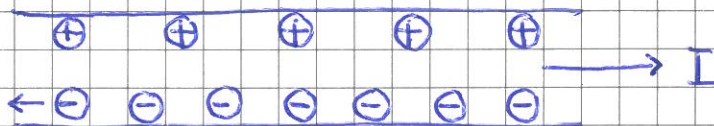
123

Coulombs lov og Einsteins relativitetsteori
nødvendig gjør magnetfelt og magnetisk kraft:



q_0 \oplus
(i ro)

q_0 ser nøytral strømførende leder $\Rightarrow F = 0$



q ser negativt ladet strømførende leder, fordi \ominus har større relativ hastighet enn \oplus , dermed størst lengdereduksjon for avstanden mellom \ominus

(Einstein: $x = x_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; $u =$ relativ hastighet; $c =$ lyshastigheten)

$\Rightarrow q$ merker elektrisk kraft \vec{F}

V_i , som er i ro relativt lederen, kaller dette en magnetisk kraft \vec{F}_m , som uttrykkes via et magnetfelt \vec{B} , som skapes av strømmen I

Magnetisk kraft [YF 27.2; LHL 23.4]

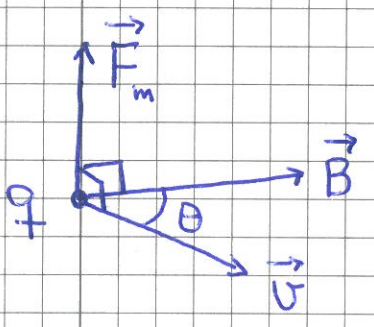
En ladning omgir seg med elektrisk felt \vec{E}

\Rightarrow elektrisk kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$ på (en annen) ladning q

En strøm omgir seg med magnetfelt \vec{B}

\Rightarrow magnetisk kraft $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ på

(en annen) ladning q i bevegelse med hastighet \vec{v}



$$F_m = qvB \sin \theta$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{B} \quad \text{og} \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

Enhet: $[B] = \left[\frac{F}{qv} \right] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T$ (tesla)

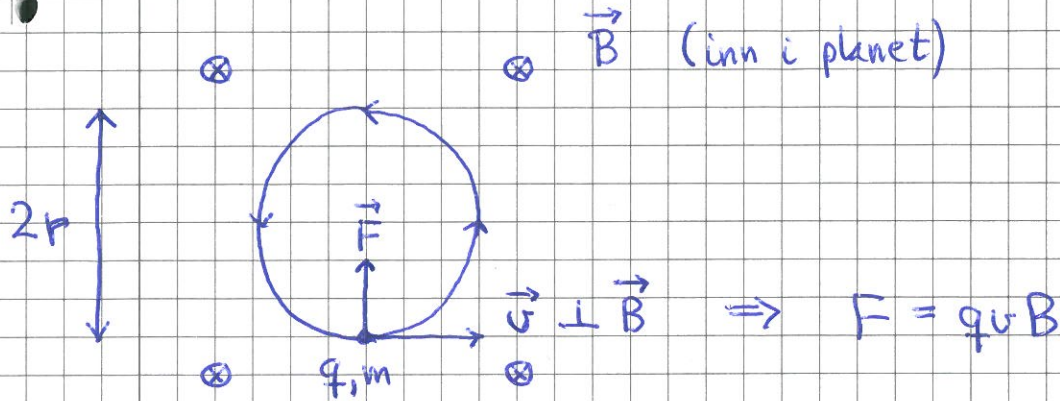
Hvis både \vec{E} og \vec{B} til stede der q er:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentzkraften

Ladning i uniformt magnetfelt

[YF 27.4; LHL 23.1, 23.4] 125



$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{Tilført effekt } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

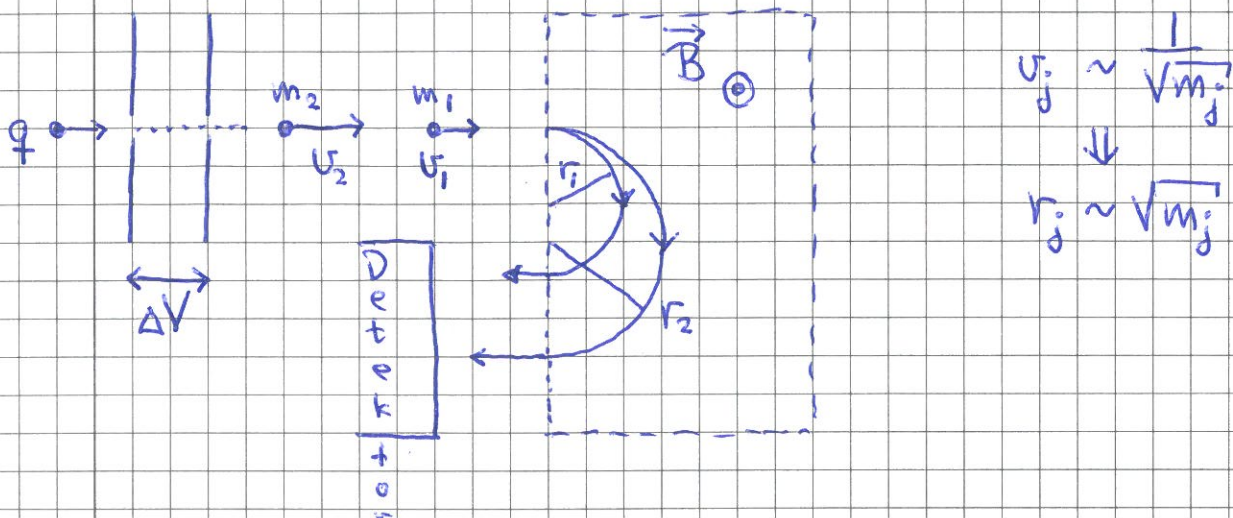
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}$$

\Rightarrow Sirkelbevegelse med konstant v
(uniform sirkelbevegelse)

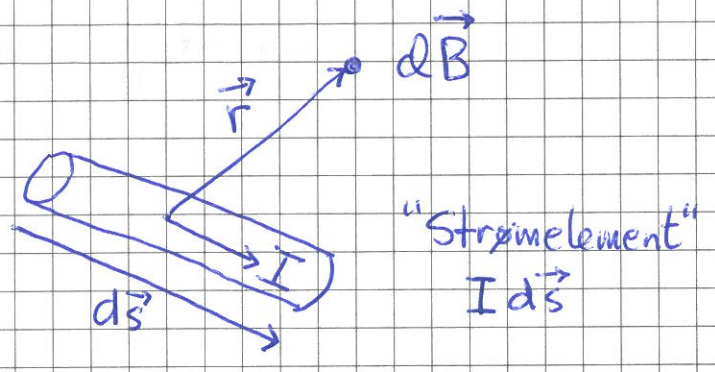
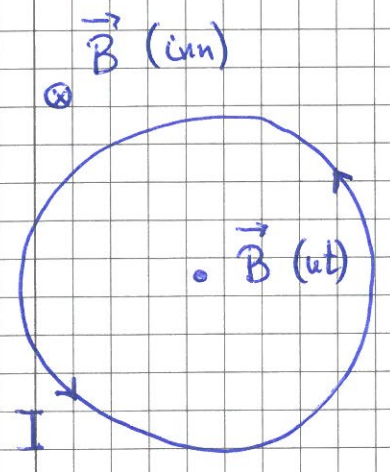
$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$\text{Syklotronfrekvensen: } \omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Eks: Massespektrometer (Øv. 12)



Biot-Savarts lov [YF 28.2; LHL 23.5]

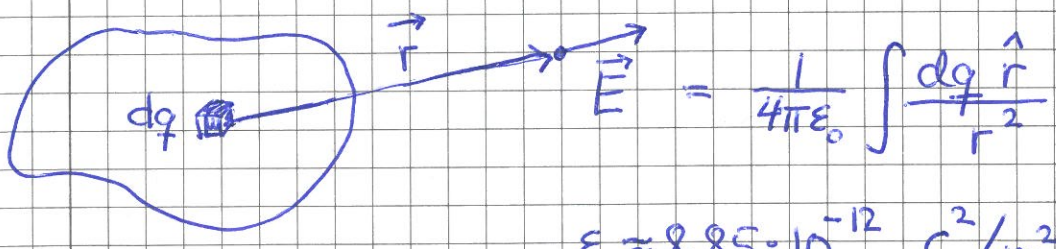


$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot og Savart
(1820)
(Empirisk lov)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = \text{vakuumpermeabiliteten}$

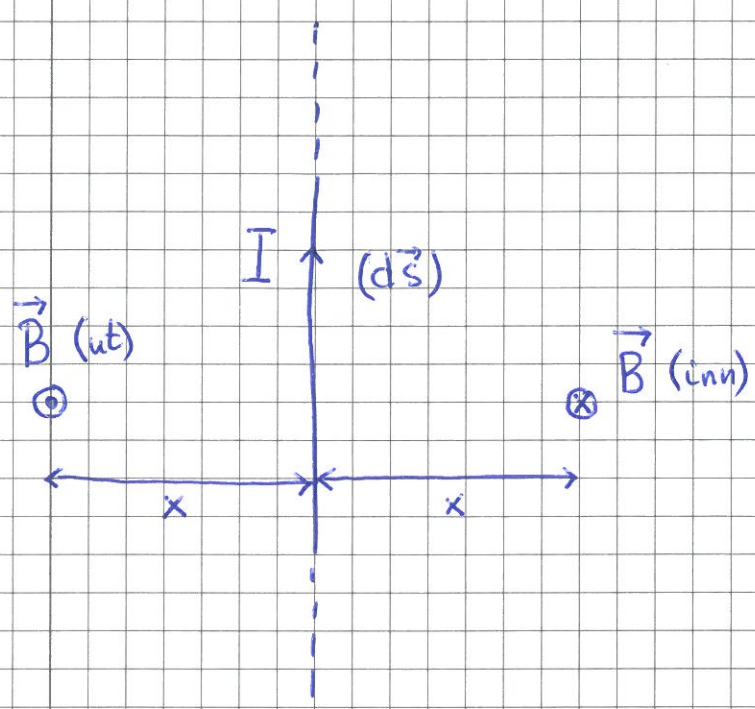
Sammenlign med Coulombs lov:



$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{m}^2 \text{ N}$
= vakuumpermittiviteten

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \text{farten til elektromagnetiske bølger i vakuum (lysfarten)}$
 $\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Eks 1: \vec{B} fra lang rett strømførende leder
[YF 28.3 ; LHL 23.5]



$d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r}$

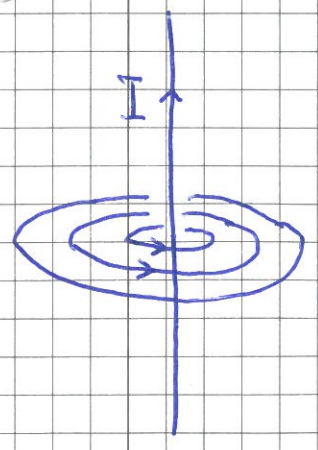
↓

\vec{B} tangentielt til sirkel med sentrum på lederen

Feltlinjer for \vec{B} defineres som for \vec{E} : [YF 27.3 ; LHL 23.1]

- Linjer $\parallel \vec{B}$
- Linjetetthet prop. med $|\vec{B}|$

⇒ Sirkler med sentrum på lederen:



For lang rett leder ($L \gg x$) gir Biot-Savarts lov

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

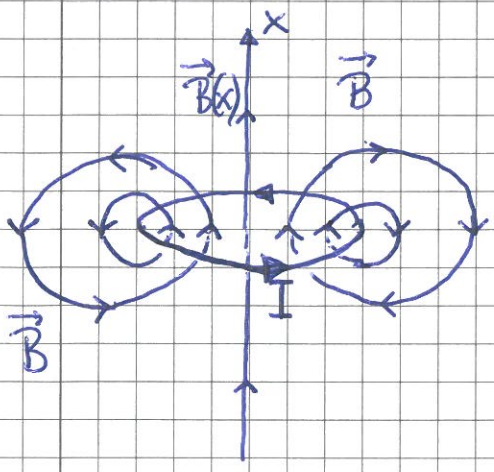
for magnetisk feltstyrke i avstand x fra lederen.

[For detaljer, se s. 127 B]

[H.h.regel: Tommelen $\parallel I$,
4 fingre krummer langs \vec{B}]

Eks 2: \vec{B} fra sirkulær strømsløyfe

[YF 28.5; LHL 23.6]

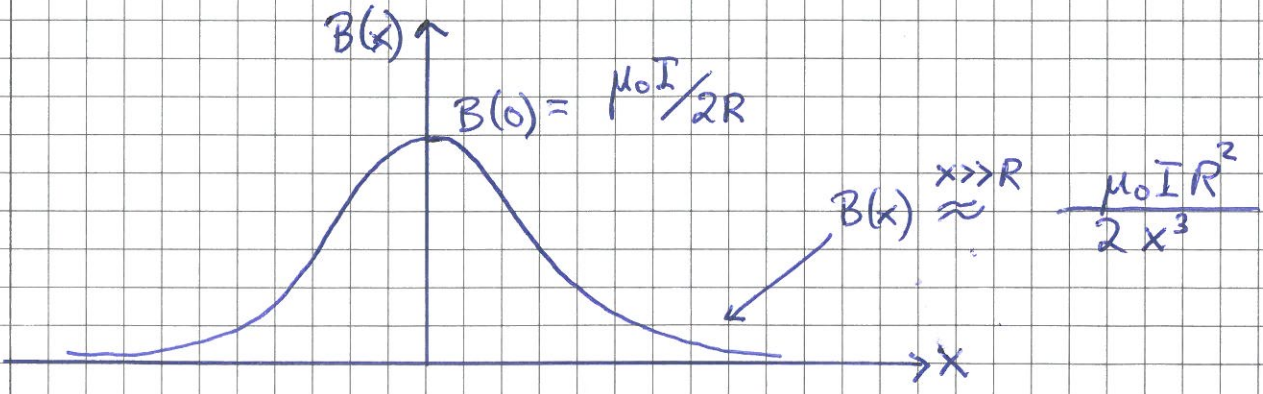


- Leder i yz-planet, radius R, strøm I
- \vec{B} nær lederen: omtrent som for lang rett leder
- Symmetri $\Rightarrow \vec{B} \parallel \hat{x}$ på sløyfas akse (her: x-aksen)

Biot-Savarts lov gir [for detaljer, se s. 128B]

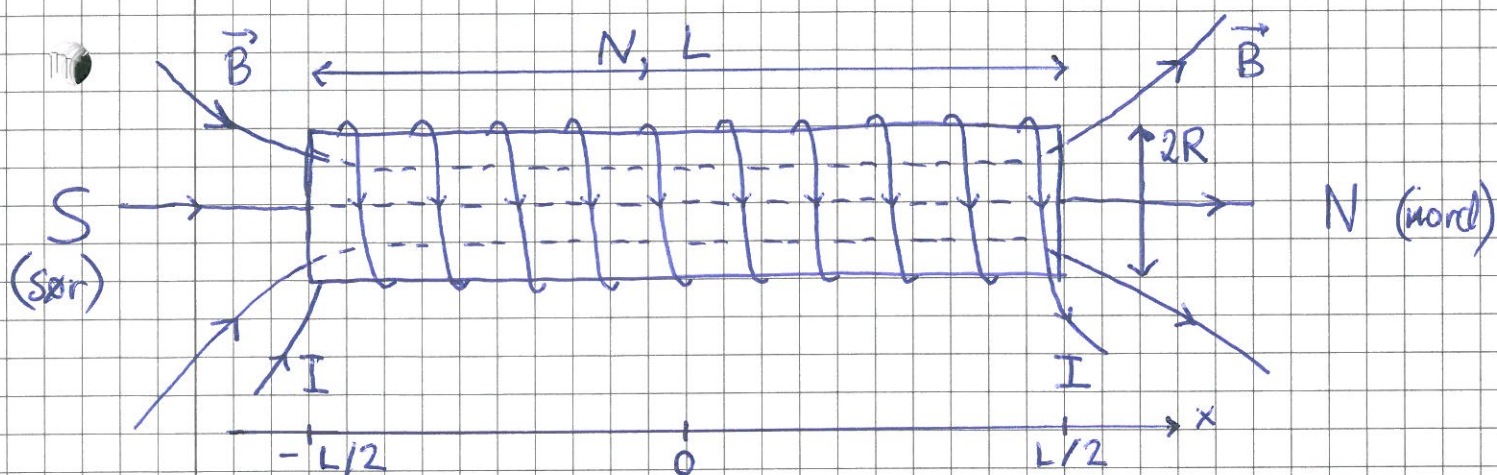
$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

for magnetisk feltstyrke på sløyfas akse.



Merk: Lukkede feltlinjer for \vec{B} (alltid)

Eks 3: \vec{B} fra strømførende spole [YF28.7; LHL23.6] (129)



- N viklinger på lengde L , vikleings tetthet $n = N/L$
- Tettliggende viklinger \Rightarrow felt \vec{B} (omtrent) som for N strømsløyfer fordelt på lengden L

Biot-Savarts lov gir [for detaljer, se s. 129 B, C og D]

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$$

for magnetisk feltstyrke på spolens akse.

- Med lang spole, $L/2 \gg R$, blir

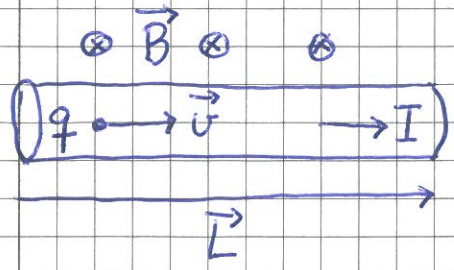
$$B \approx \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad \text{nær spolens ender } (|x| \approx L/2)$$

$$\text{og } B \approx \mu_0 n I \quad \text{langt unna spolens ender } (|x| \ll L/2)$$

Amperes lov (ikke pensum) gir $B = \mu_0 n I$ overalt inni en svært lang og tettviklet spole, og

- $B \approx 0$ overalt på utsiden (unntatt like utenfor endene, selvsagt).

Magnetisk kraft på elektrisk strøm [YF 27.6; LHL 23.2]

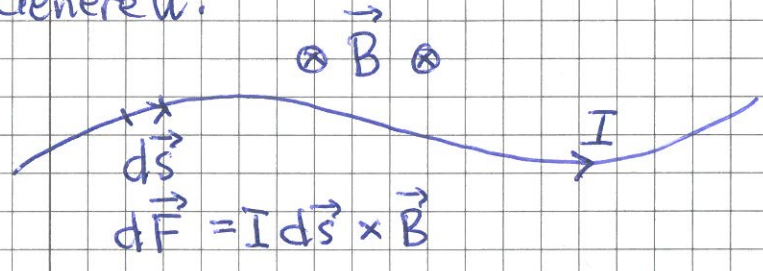


Bit av strömförande leder.
 N fria laddningar q med driftshastighet \vec{v} på längdan L.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} = \frac{Nqv}{L} \Rightarrow Nq\vec{v} = I\vec{L}$$

$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$$

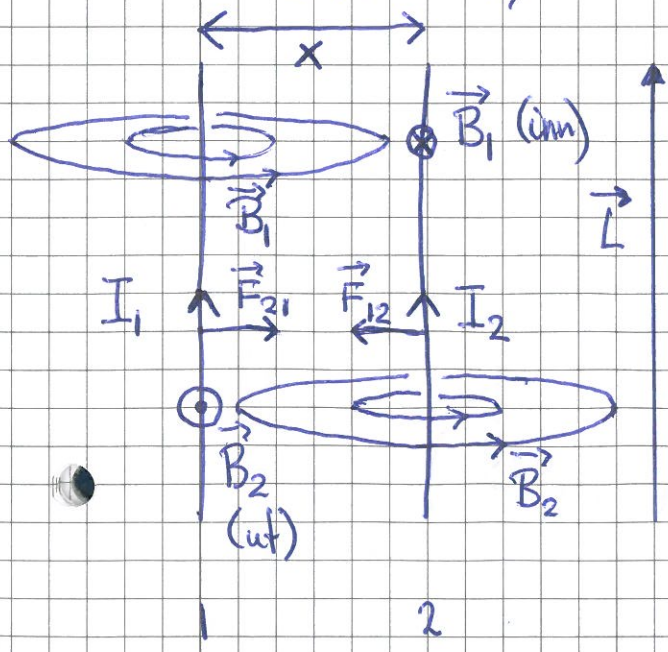
Generellt:



$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Total kraft på ledaren. (Integralen går över lederens längd.)

Eks: Kraft mellan två parallella strömförande ledare [YF 28.4; LHL 23.5]



Innbyrdes kraft på längd L:

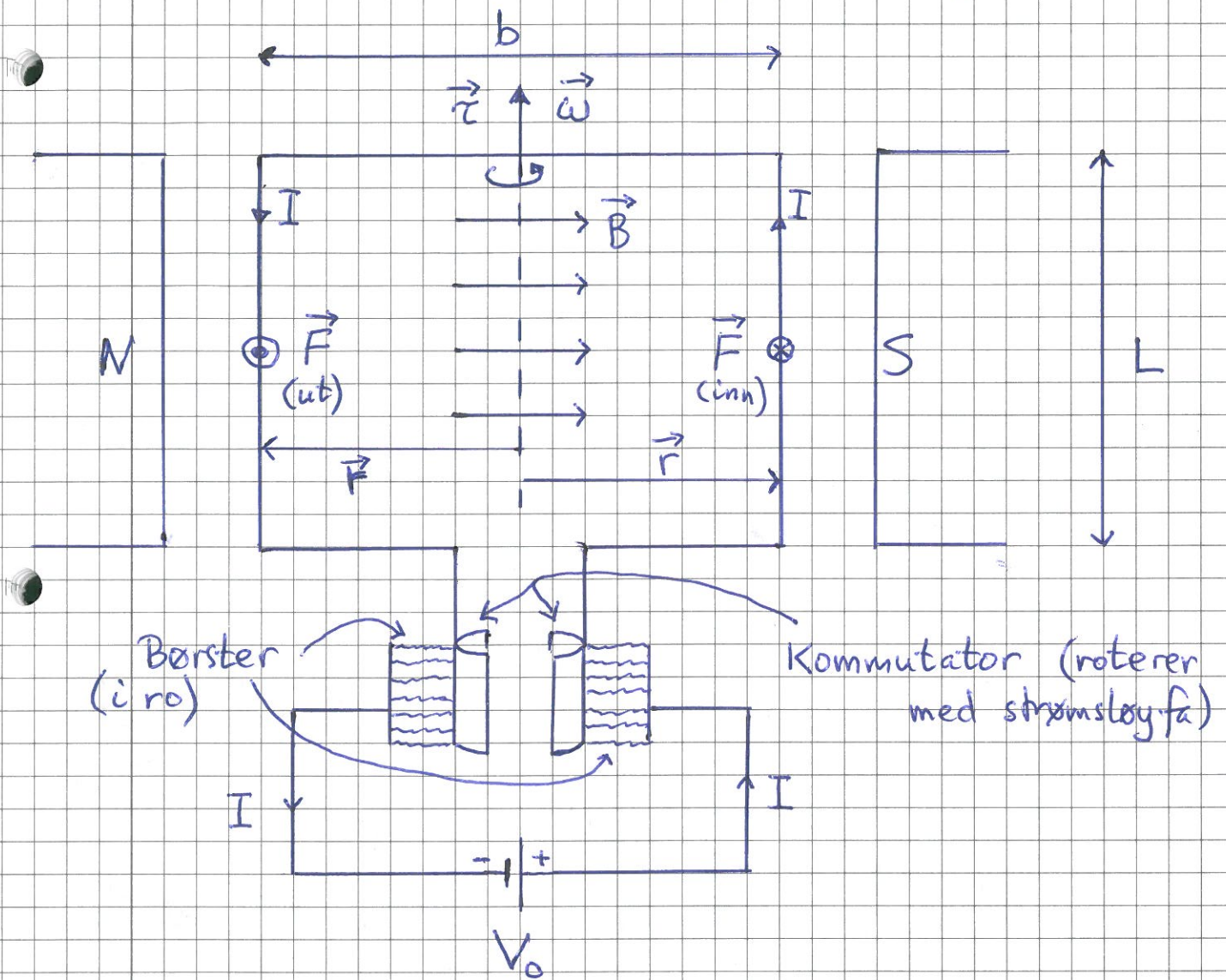
$$F_{12} = F_{21} = F$$

$$F = I_1 L B_2 = I_1 L \cdot \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

$$\text{Pr. längdeenhet: } f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$

$I_1 \parallel I_2 \Rightarrow$ Tillräkning

$I_1 \parallel -I_2 \Rightarrow$ Frånstötning



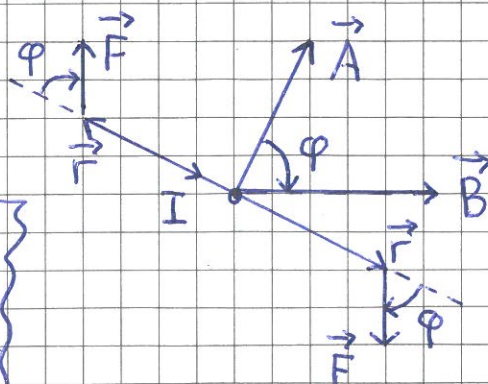
Dreiemoment τ på strømsløyfa:

$$\tau = |\vec{\tau}| = \left| \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot I L B \cdot \sin \varphi$$

(der φ = vinkel mellom \vec{r} og \vec{F} , i figuren er $\varphi = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \tau = I A \cdot B \cdot \sin \varphi \quad (A = b \cdot L = \text{sløyfas areal})$$

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

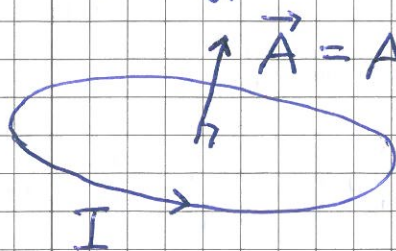


Merk: Innretning av \vec{A} langs \vec{B} dersom I ikke skiftet retning i strømsløyfa

Magnetisk dipol. Dipolmoment [YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

(132)

Strømsløyfe = Magnetisk dipol



- $A =$ omskuttet areal
- retning på \vec{A} med h.h. regel

Magnetisk dipolmoment:

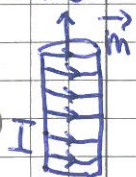
$$\vec{m} = I \vec{A}$$

Enhet: $[m] = A \cdot m^2 = N \cdot m / T = J / T$

(siden $[r] = [IA] = [m \cdot B]$)

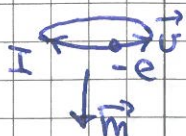
[Generelt: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV$; $\vec{j} =$ strømtektthet, $dV =$ volumelement; jfr $\vec{p} = \int \vec{r} \rho dV$ for elektrisk dipolmoment, $\rho =$ ladningstetthet]

Eks: Spole med 1000 viklinger, strøm 1 A, tverrsnitt 10 cm^2 .



$$m = N \cdot I A = 1000 \cdot 1 \text{ A} \cdot \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2 = \underline{\underline{31.4 \text{ Am}^2}}$$

Eks: Atom med ett elektron i sirkular bane rundt kjerne med ett proton, radius 1 \AA , hastighet 10^6 m/s .



$$m = I A = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{e}{2\pi r/v} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} e v r$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot 10^{-10} \text{ m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2}} \text{ (J/T)}$$

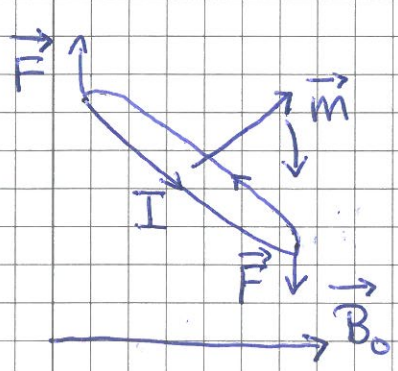
Eks: Jorda er magnetisk dipol med $m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$, som tilsvarende strømsløyfe med $\langle A \rangle = 4 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$ og $\langle I \rangle = 2 \cdot 10^{10} \text{ A}$



2015: Magnetisk nord ved 86° N , 160° W

Materiales magnetiske egenskaper

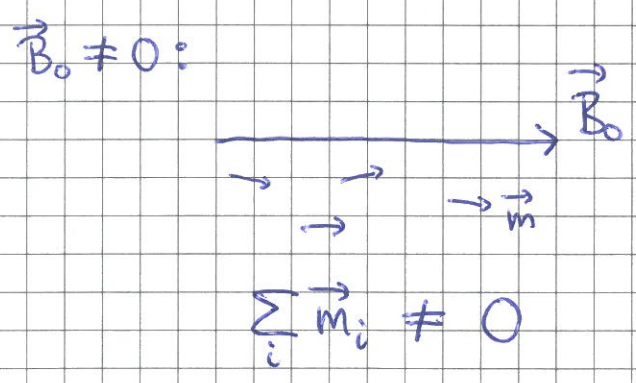
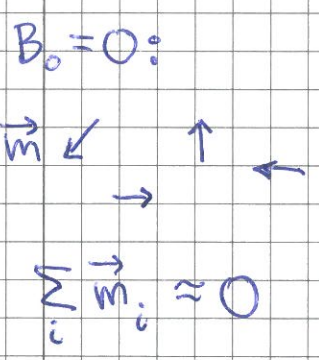
Fra eks. s. 132: Atomer/molekyler er små magnetiske dipoler, med dipolmoment \vec{m} som vil rettes inn langs et ytre felt \vec{B}_0 (jfr DC-motor, s. 131, nederst):



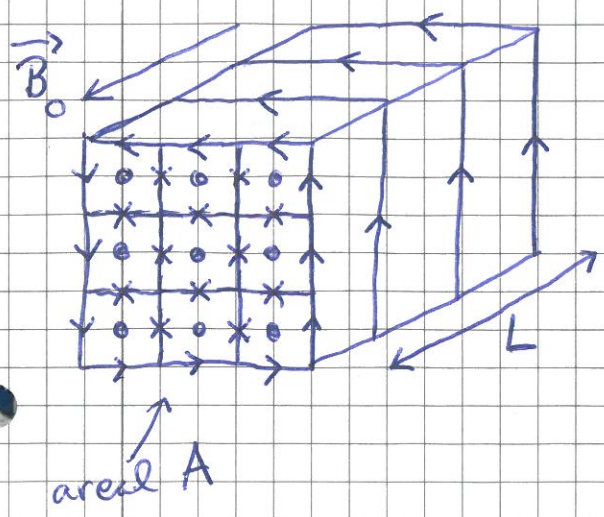
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0, \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

(Øv. 13; jfr. Øv. 9 for el. dipol,
 $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$)

⇒ Materialer magnetiseres av ytre felt \vec{B}_0 :



Netto makroskopisk effekt av ytre \vec{B}_0 :



- Innretting av atomære \vec{m} (•) langs \vec{B}_0
- Alle indre strømmer kansellerer (x)
- Indusert strøm I_m på overflaten, pr lengdeenhet
 $i_m = I_m / L$
- For styrket magnetfelt, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Materialets relative permeabilitet μ_r def. ved

$$\boxed{B = \mu_r B_0} \quad (\text{jfr } E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0)$$

Stoff	Stoffets permeabilitet, $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$	Type magnetisme
Vakuum	μ_0	—
Luft	$1.0000004 \mu_0$	Paramagnet
Aluminium	$1.00002 \mu_0$	— " —
Nikkel	$(100-600) \mu_0$	Ferromagnet
Jern (99.8% rent)	$5000 \mu_0$	— " —
Kobber	$0.999994 \mu_0$	Diamagnet
Vann	$0.999992 \mu_0$	— " —
Superleder	0	"Perfekt diamagnet"

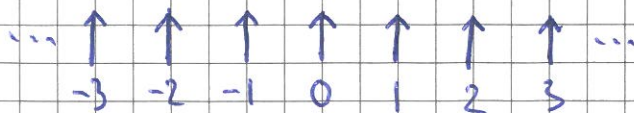
Paramagnetisme: Atomer med $\vec{m} \neq 0$, uorden uten ytre \vec{B}_0 , svak innretting av \vec{m} langs ytre \vec{B}_0 .

Diamagnetisme: Ytre \vec{B}_0 inducerer atomere \vec{m} motsatt rettet $\vec{B}_0 \Rightarrow B < B_0$. Kun målbart hvis atomere $\vec{m} = 0$ i null ytre felt.

Superleder: $B = 0$, dvs $\mu_r = 0$

Ferromagnetisme: Vekselvirkende atomere \vec{m}_0 .

$$\vec{m}_{\pm 1} \parallel \vec{m}_0, \vec{m}_{\pm 2} \parallel \vec{m}_{\pm 1}, \dots$$

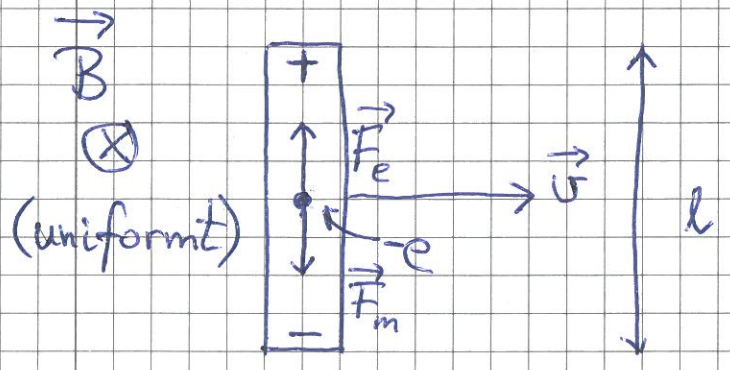


Magneter! (Fe, Ni, Co, ...)

ELEKTRODYNAMIKK [YF 29-31; LHL 24,25,27]

Faradays induksjonslov [YF 29.1,2,4; LHL 24.1]

Leder i bevegelse i \vec{B} -felt:



Magn. kraft på frie elektroner i ledaren:

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$$

⇒ Indusert ladning på endene

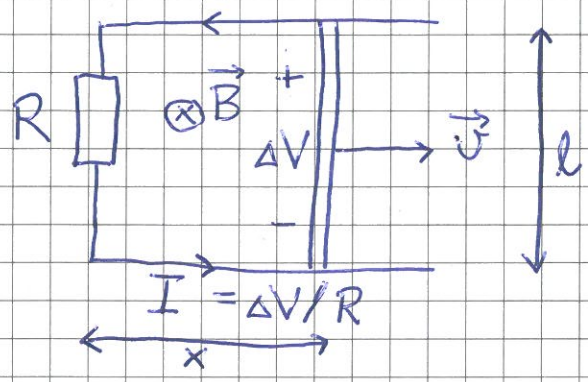
⇒ —"— elektrisk felt \vec{E} og spenning $\Delta V = E \cdot l$ i ledaren, og el. kraft $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ på elektronene

Likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$, dvs

$$eE = evB$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V} = E \cdot l = \underline{vBl}$$

Lukket krets gir da strøm I :



Magnetisk fluks gjennom areal $A = l \cdot x$ omsluttet av strømsløyfa:

$$\Phi = B \cdot A = B l x$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v = \Delta V$$

som er Faradays induksjonslov:

Endring i omsluttet magnetisk fluks Φ pr tidsenhet er lik industert spenning ΔV i ~~leders~~ ledersløyfa,

$$\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$$

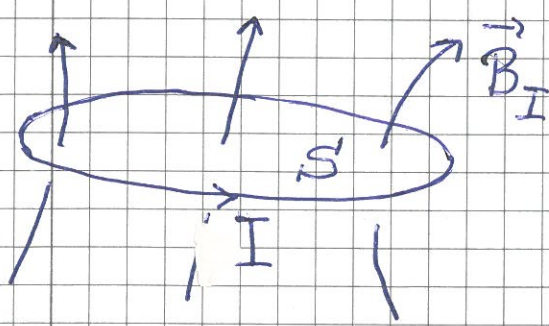
Lenz lov [YF 29.3; LHL 24.1]

Indusert strøm I har retning slik at tilhørende industert magnetfelt \vec{B}_I og tilhørende industert magnetisk fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ slik at påtvunget endring $\Delta\Phi$ motvirkes

"Naturen motvirker påtvungne endringer!"

Induktans [YF 30.2; LHL 25.1]

Selvinduktans:



S = omsluttet flate

$$\Phi = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A} = \int_S \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\vec{A}$$

$$= I \cdot \underbrace{\int_S \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\vec{A}}_{\text{støyfas selvinduktans } L}$$

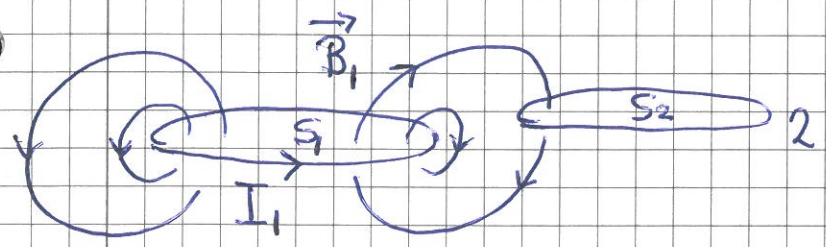
= støyfas selvinduktans L

Ser at L avhenger av utforming og medium
(her: vakuum (μ_0))

$$L = \Phi / I$$

Enhet: $[L] = T \cdot m^2 / A = H$ (henry)

Gjensidig induktans:



Strøm I_1 i sløyfe 1 skaper magnetfelt \vec{B}_1 , og dermed fluks $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}$ omsluttet av sløyfe 2.

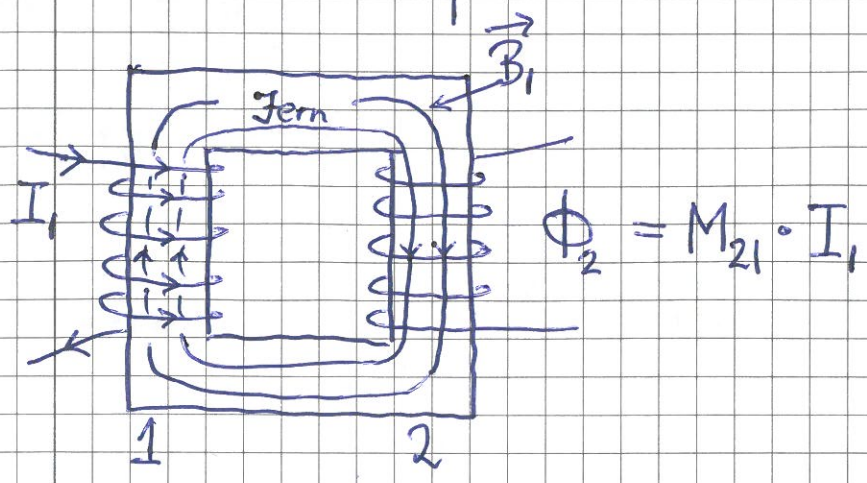
\vec{B}_1 er prop. med $I_1 \Rightarrow \Phi_2$ er også prop. med I_1

$M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} =$ de to sløyfenes gjensidige induktans

Tilsvarende: Strøm I_2 i nr 2 \Rightarrow felt $\vec{B}_2 \sim I_2$, og dermed fluks $\Phi_1 \sim I_2$ omsluttet av nr 1

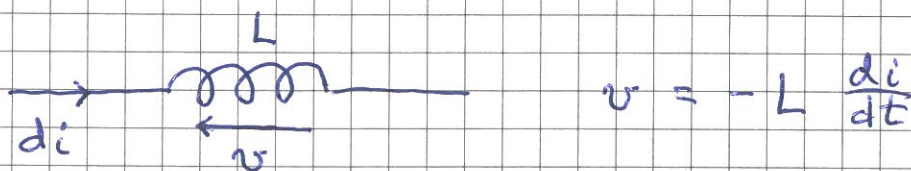
$M_{12} = \frac{\Phi_1}{I_2}; \quad M_{12} = M_{21}$

Anvendelse: Transformator



Energi i B-felt [YF 30.3; LHL 25.3]

140



Påkrevd energi for å øke strøm fra i til $i + di$:

$$dU = P \cdot dt = -v \cdot i \, dt = L \frac{di}{dt} \cdot i \, dt = L i \, di$$

↑ arbeid mot
indusert v

⇒ Å øke strøm fra $i = 0$ til $i = I$ krever energien

$$U = \int dU = \int_0^I L i \, di = \underline{\underline{\frac{1}{2} L I^2}}$$

Med lang spole, lengde l , tverrsnitt A , N viklinger:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow \underline{I = B / \mu_0 N / l}$$

$$\Phi = \underline{NAB} = NA \mu_0 \frac{N}{l} I = \underline{LI}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} L I \cdot I = \frac{1}{2} NAB \cdot \frac{B}{\mu_0 N / l} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \underbrace{(Al)}_{\substack{= \text{volum} \\ \text{inni spolen,} \\ \text{der } B \neq 0}}$$

⇒ Energi pr volumenheter i magnetfelt er

$$\boxed{u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (\text{gjelder generelt})$$

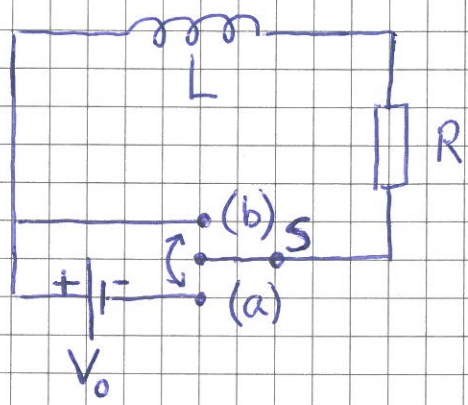
Fra før (s 112): $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

$$\Rightarrow \text{Total energitetthet i E.M. felt: } \boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

Elektriske kredse; DC og AC; R, L og C

[YF 30.4+5+6; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]

① RL-krets; DC

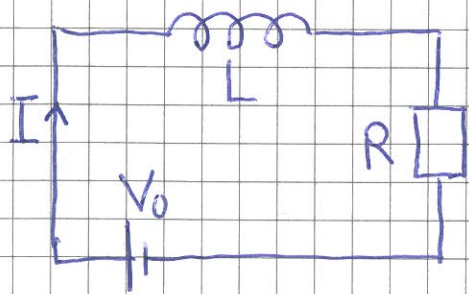


S: bryter (switch)

(a) Tilkobling af V_0

(b) Frakobling af V_0

(a) Tilkobling af V_0 ved $t=0$



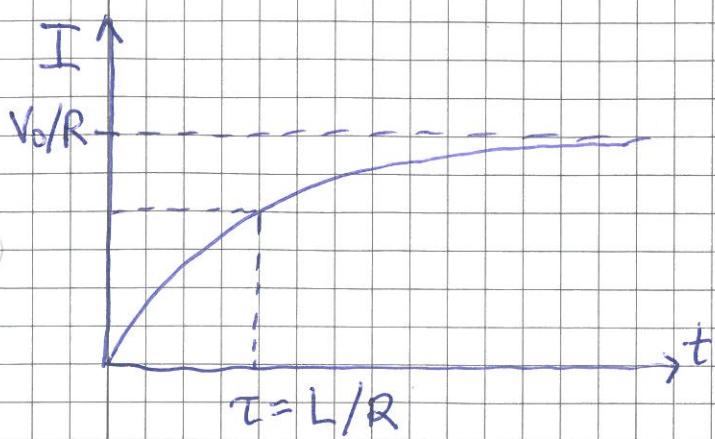
$$K2: V_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning for I som for Q i RC-krets (s 121)

$$(I(0) = 0)$$

⇒ Samme løsning!

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$



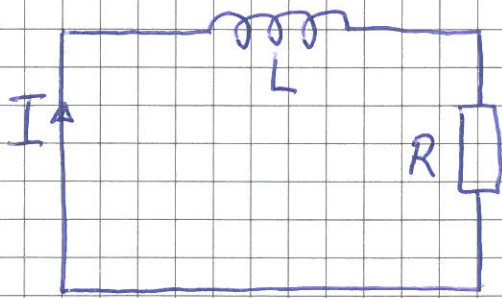
RL-kretsens tidskonstant:

$$\tau = L/R$$

(For RC-krets: $\tau = RC$)

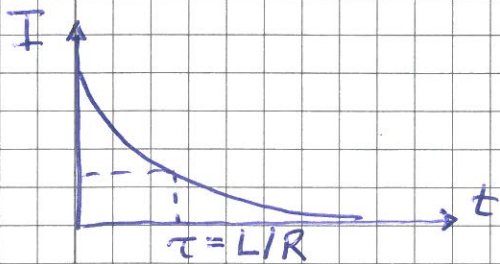
(b) Frakobling av V_0 ved "nytt $t=0$ "

$(I(0) = V_0/R)$

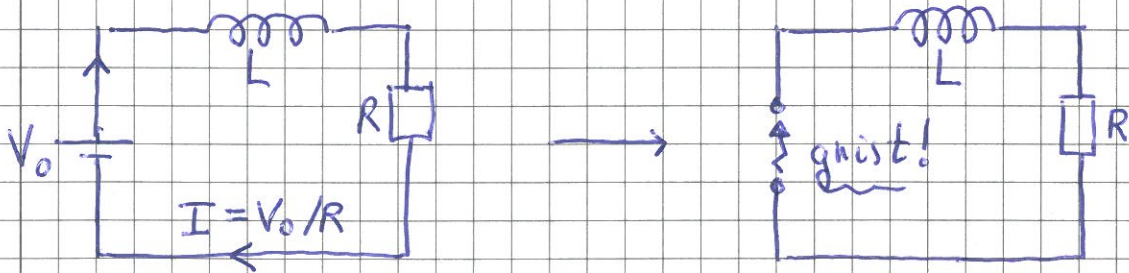


K2: $-L \frac{dI}{dt} - RI = 0$

$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}; \tau = \frac{L}{R}$



(c) "Dra ut støpselet"

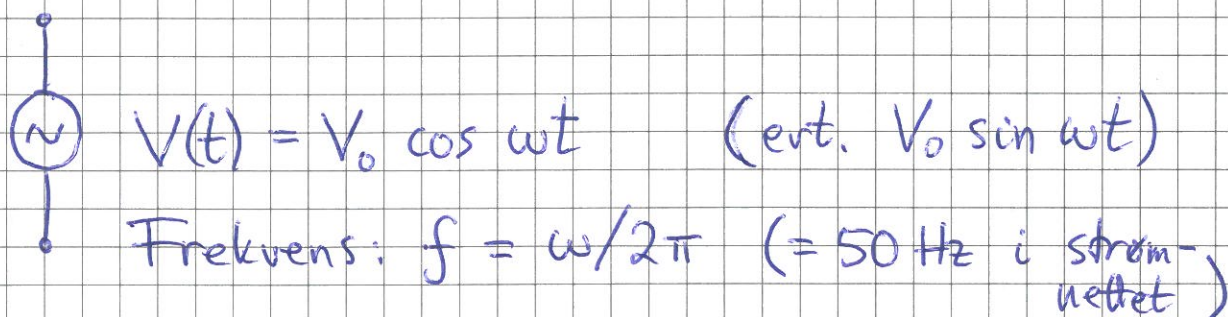


- I reduseres raskt fra V_0/R til 0 når støpselet trekkes ut av stikk-kontakten
- Stor $|dI/dt|$ gir stor induert spenning $|L dI/dt|$ (selv om L er liten)
- Gir kortvarig strøm over luftgapet (selv om R der er stor), dvs gnist (overslag).

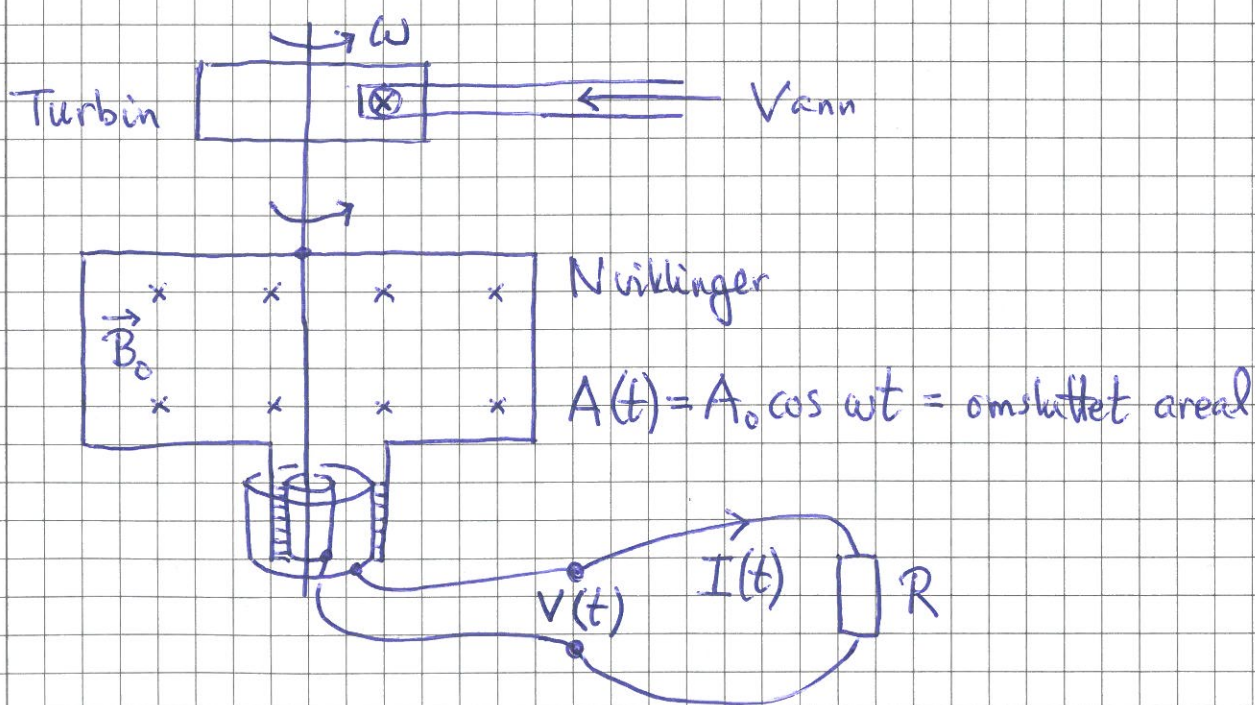
AC - kretser

- AC = alternating current = vekselstrøm

AC spenningskilde:



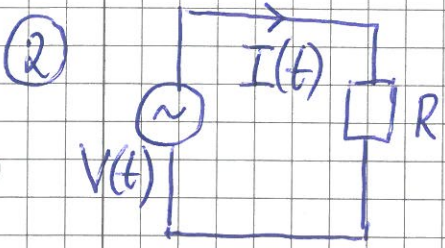
- Prinsipp for vekselstrømgenerator:



$$\Phi(t) = NB_0 A_0 \cos \omega t$$

$$V(t) = -d\Phi/dt = \underbrace{NB_0 A_0 \omega}_{V_0} \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

$$I(t) = V(t)/R = \underbrace{(V_0/R)}_{I_0} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$



K2: $V_0 \sin \omega t - RI(t) = 0$

$I(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$

$P(t) = V(t) \cdot I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$

Middlere effekt:

$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} = V_{rms} \cdot I_{rms}$

(rms: root mean square)

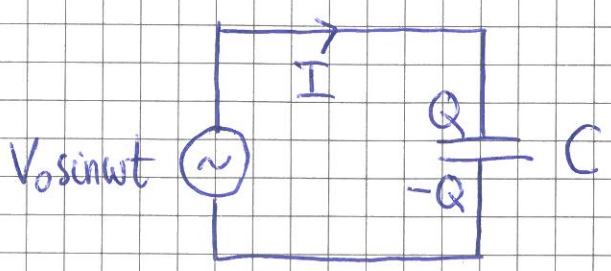
Strømnettet: $V_0 = 311 \text{ V} \Rightarrow V_{rms} = 311 \text{ V} / \sqrt{2} = 220 \text{ V}$

[Overføringsnett med gitt motstand R: $P = VI = \frac{V \cdot V}{R} = \frac{V^2}{R}$]

Energiforbruk på tid t: $W = Pt = RI^2 t$

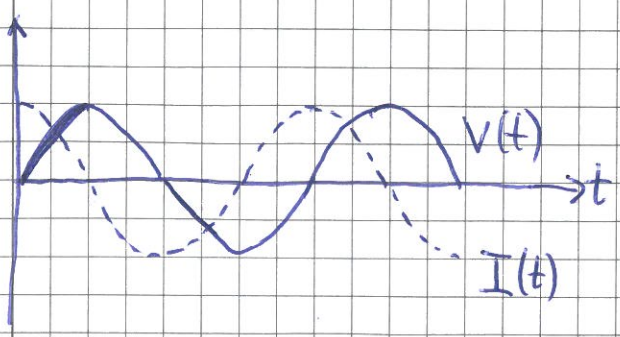
⇒ Fordel med lav strøm I og høy spenning V! Norge: 10-400 kV]

3



K2: $V_0 \sin \omega t - Q(t)/C = 0 \Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$

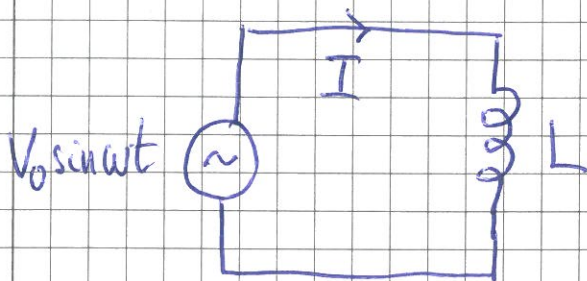
$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t = V_0 \omega C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$



• Faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$

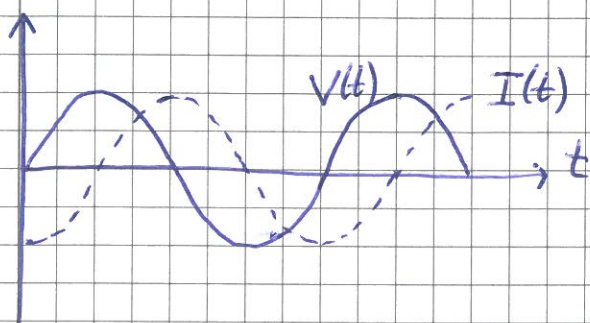
• Strøamplituden $I_0(\omega) = V_0 \omega C$ øker med frekvensen!

4



$$K2: V_0 \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

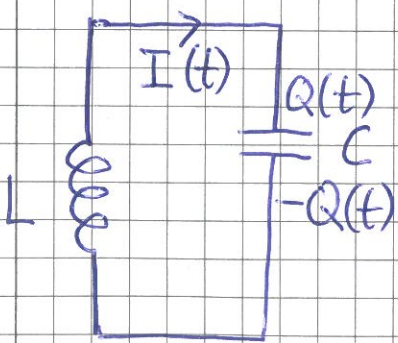
$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$$



- Faseforskytning $-\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$

- Strømanpl. $I_0(\omega) = V_0/\omega L$ avtar med frekvensen!

5 LC-krets

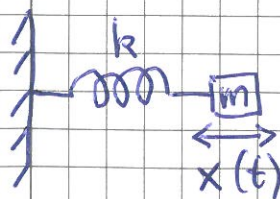


Anta $Q(0) = Q_0$

$$K2: -L \ddot{I} - \frac{Q}{C} = 0; I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0}}$$

Samme ligning som for $x(t)$ med harmonisk oscillator:



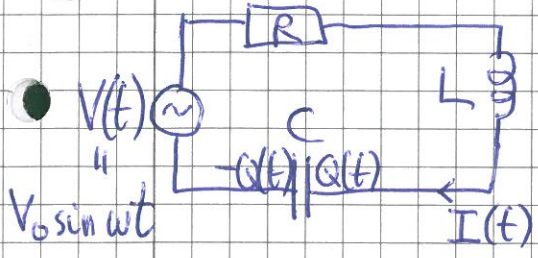
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t; \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t, \text{ med } \omega_0 = \sqrt{1/LC}$$

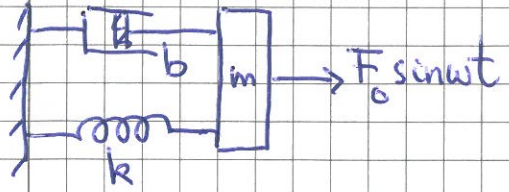
"Analoge" størrelser: $Q \leftrightarrow x; I \leftrightarrow \dot{x}; L \leftrightarrow m; \frac{1}{C} \leftrightarrow k$

⑥ RLC resonanskrets



K2: $V_0 \sin \omega t - RI - LI' - Q/C = 0$
 $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin \omega t$

Mekanisk analogi:



N2 $\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$
 (dvs $b \leftrightarrow R$; $F_0 \leftrightarrow V_0$)

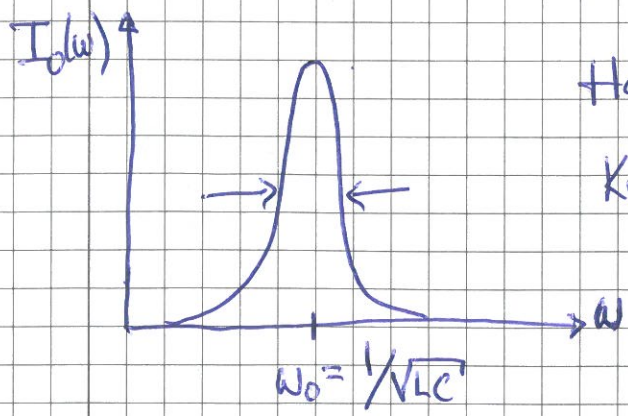
For mek. system: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

med $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $2\gamma = b/m$

Dermed, for RLC-kretsen: $Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

med $Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$; $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$, $2\gamma = R/L$

$\Rightarrow I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$



Halvverdi-bredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma = R/L$

Kvalitetsfaktor: $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \sqrt{LC}/R$

[Kan måle $I_0(\omega)$ via V_R over R :

$I(t) = V_R(t)/R = V_{R0}(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow I_0(\omega) = \frac{V_{R0}(\omega)}{R}$]