

# Størrelser og enheter

(1)

Eks:

Lengde ;  $l = 42.2$

↑  
fysisk  
størrelse

↑  
symbol

↑

tallverdi

dekadisk forståelse

( $k = \text{kilo} = 10^3$ )

km

↑  
SI-enhet

(her: 3 gjeldende siffer

Notasjon :  $[l] = m$

"SI-enheten til lengde er meter"

Grunnenheter i SI-systemet :

Lengde

$[d] = m$

Masse

$[m] = kg$

Tid

$[t] = s$

Strømstyrke

$[I] = A$

Temperatur

$[T] = K$

Stoffmengde

$[n] = mol$

Lysstyrke

$[I] = cd$

(2)

## Sammensatte enheter :

Hastighet  $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon  $[a] = \text{m/s}^2$

Impuls (bevegelsesmengde)  $[p] = \text{kg m/s}$

osv.

## Avledete enheter (med egne symboler) :

Kraft  $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$

Energi  $[W] = \text{Nm} = \text{J}$

Effekt  $[P] = \text{J/s} = \text{W}$

Ladning  $[Q] = \text{As} = \text{C}$

osv.

Se f.eks wikipedia.no

Se også (f. eks)

[www.nature.com/articles/nphys3612.pdf](http://www.nature.com/articles/nphys3612.pdf)

om redefinisjon av kg, A, K og mol,  
muligens vedtatt allerede 16. 11. 2018 !

Se også "1001 Gram", med Ane Dahl Torp !!

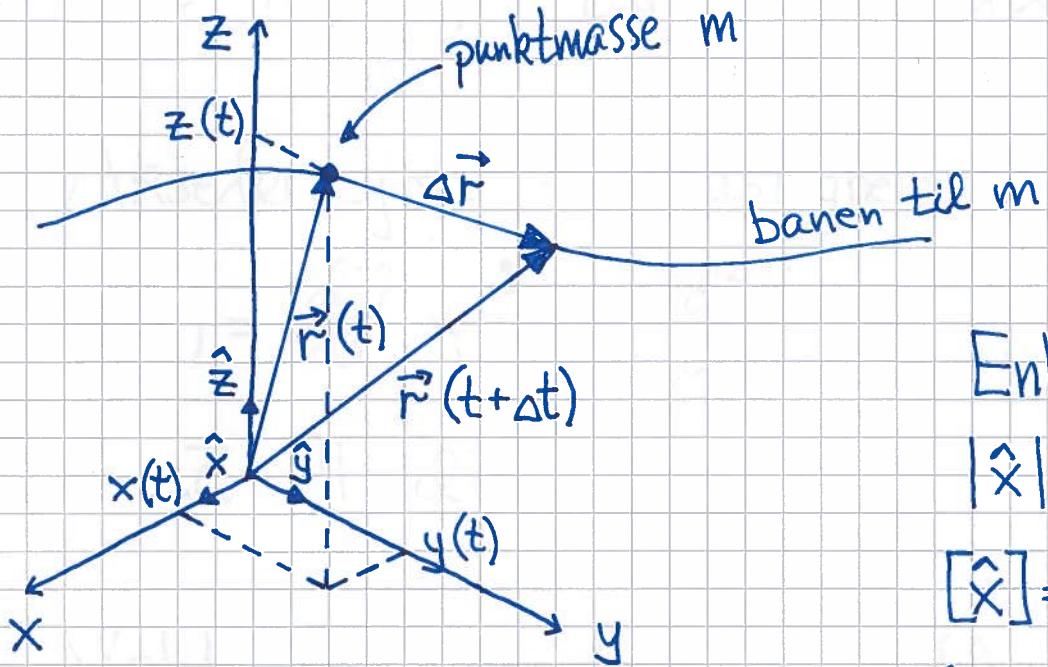
# MEKANIKK

[YF 2-11, 14 ; LL 1-7, 9]

(3)

## Kinematikk

[YF 2, 3 ; LL 1]



Enhetsvektorer :

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$

(dvs dimensjonsløse)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Posisjon (til m, ved tid t) :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av  $\Delta t$ ) :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

(4)

Hastighet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ , tangentiell til banen

Akselerasjon  $\stackrel{\text{def}}{=}$  hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a}(t) = \frac{d \vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel d \vec{v}$

Vektorrelasjonene må gjelde komponentvis:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

$$\text{med } v_x = dx/dt = \dot{x} \text{ osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\text{med } a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 \text{ osv}$$

Derivasjon gir  $\vec{v}$  fra  $\vec{r}$  og  $\vec{a}$  fra  $\vec{v}$

(5)

$\Rightarrow$  Integrasjon gir  $\vec{r}$  fra  $\vec{v}$  og  $\vec{v}$  fra  $\vec{a}$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(z) dz}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(z) dz}$$

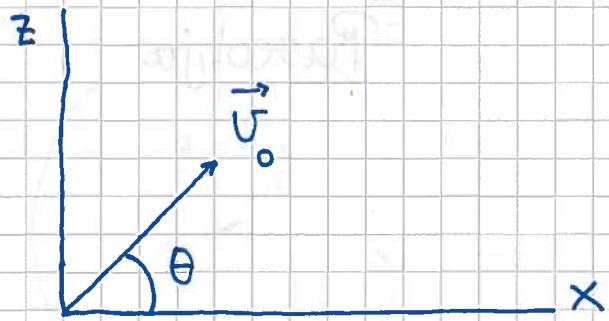
Dersom  $\vec{a}$  er konstant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t ; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 ; \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

(6)

# Eks: Kast i tyngdefeltet



$$\vec{a} = -g \hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v}(0) = \vec{U}_0$$

Finn  $\vec{r}(t)$  og banen  $z(x)$

Løsn:

$$\vec{v}(t) = \vec{U}_0 + \vec{a} t = \vec{U}_0 - g t \hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{U}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{U}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = U_0 t \cos \theta, \quad z(t) = U_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Banen:

$$t = \frac{x}{U_0 \cos \theta}$$

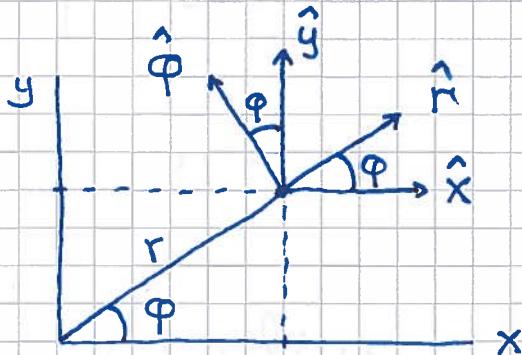
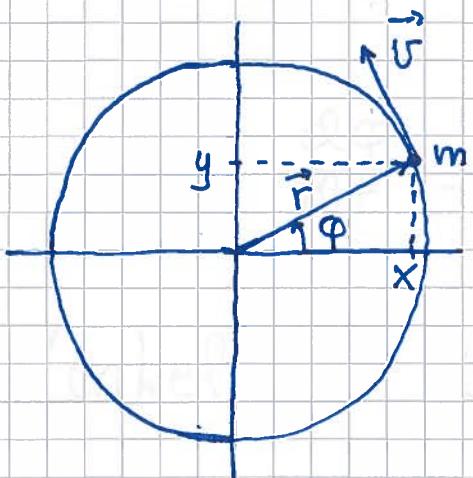
$$\Rightarrow z(x) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2U_0^2 \cos^2 \theta}$$

Parabel (som observert)

# Sirkelbevegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(7)



Polarkoordinater :

$r$  = avstand fra origo

$\varphi$  = vinkel mellom  $\hat{x}$  og  $\hat{r}$ , positiv mot klokka

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctan(y/x), \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

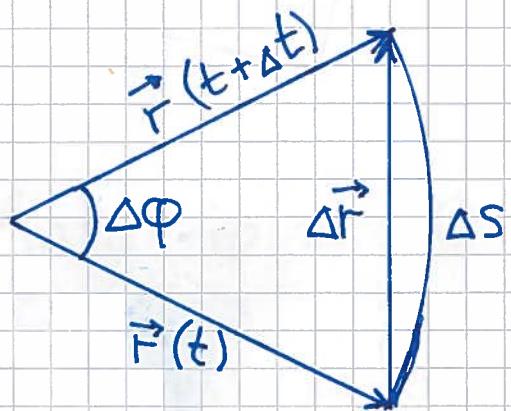
(8)

Vinkelhastighet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  omlopt vinkel  
pr tidsenhet

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} ; [\omega] = \text{s}^{-1}$$

Vinkel  $\stackrel{\text{def}}{=}$  buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} ; [\varphi] = 1 \text{ (rad)}$$



Når  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\Delta\varphi \rightarrow 0$$

$$\Delta r = |\vec{\Delta r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta\varphi$$

$$\vec{\Delta r} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

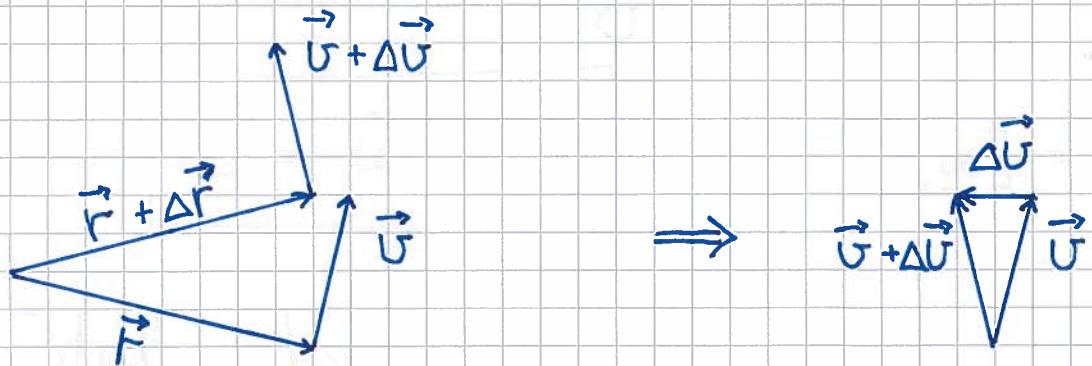
$$\vec{v} \parallel \vec{\Delta r} \text{ og } \vec{\Delta r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}$$

(9)

# Akselerasjon ved sirkelbevegelse :

Anta uniform sirkelbevegelse, dvs konstant  $\omega$  og  $v$ . Ser da at  $\Delta \vec{U}$ , og dermed  $\vec{a}$ , peker inn mot sentrum:



Anta  $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{U}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}(t) &= -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t \\ &= -\omega^2 \vec{r}(t) \end{aligned}$$

Som kalles sentripetalakselerasjonen

$$\boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}}$$

(10)

Dersom  $\omega$  og  $v$  også endrer seg,  
har vi baneakselerasjon ;

$$a_{||} = \ddot{v} = r \ddot{\omega}$$

og vinkelekselerasjon

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\omega} = \ddot{\phi}$$

$$[\alpha] = s^{-2}$$

Total akselerasjon blir

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + \dot{\omega} r \hat{\phi}$$

$$\omega = v/r \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Periode = tid pr omloop :  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Frekvens = antall omloop pr tidsenhet :  $f = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

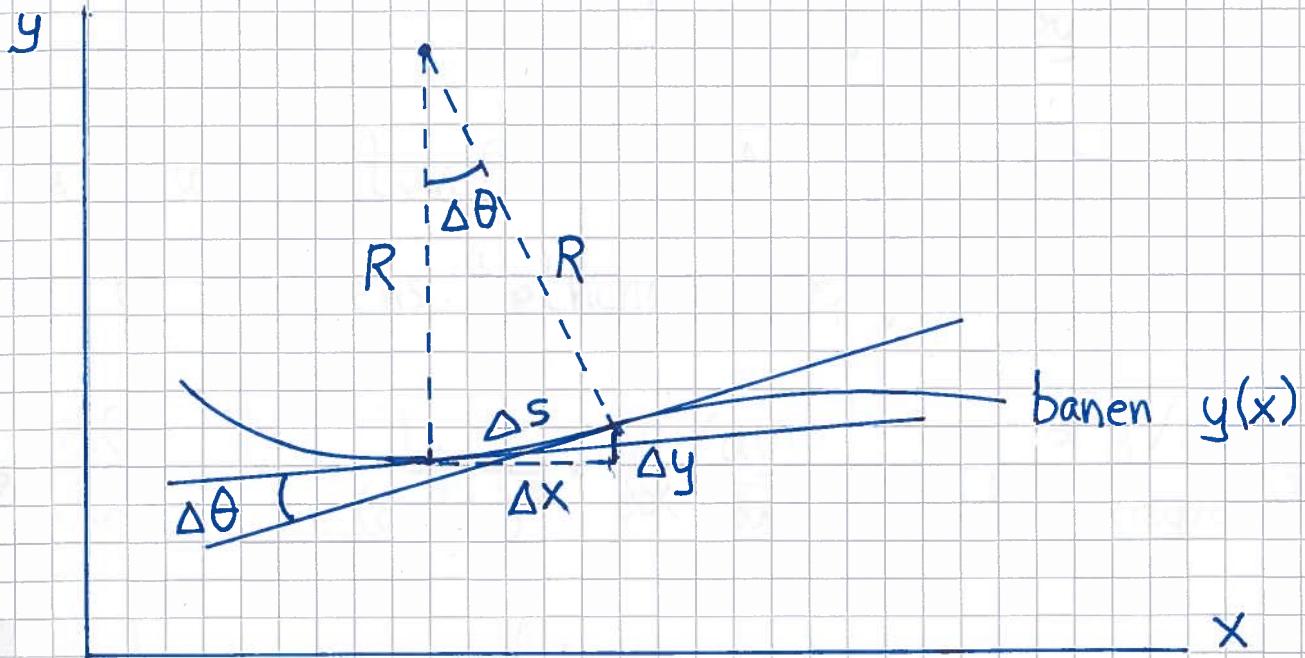
$$[T] = s ; [f] = s^{-1} = Hz \quad (\text{hertz})$$

$$[\omega] = s^{-1}$$

(11)

# Krumlinjet bevegelse

(f. lab og humpete veier)



$$a_{\perp} = v^2/R$$

$R$  = radius i "tenkt" sirkel som best  
tangerer banen  $y(x)$  = krumningsradien

Små  $\Delta s$  og  $\Delta \theta \Rightarrow \Delta s \rightarrow ds$ ,  $\Delta \theta \rightarrow d\theta$

Vinkeldef:  $d\theta = ds/R \Rightarrow R = ds/d\theta$

Pythagoras:  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

$$\text{Kjerneregel: } \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}$$
(12)

Fra figur:  $\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan \left( \frac{dy}{dx} \right)$   
 (der  $\theta$  = banens hellingsvinkel)

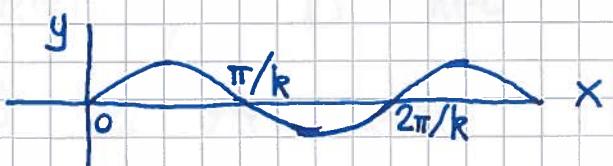
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Gir krumningsradius

$$R = \frac{\left[ 1 + (\frac{dy}{dx})^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$$

(der  $R$  velges positiv)

Eks:  $y(x) = y_0 \sin kx$



$$y'(x) = y_0 k \cos kx, \quad y''(x) = -y_0 k^2 \sin kx$$

$$\Rightarrow R = \left[ 1 + y_0^2 k^2 \cos^2 kx \right]^{3/2} / \left| y_0 k^2 \sin kx \right|$$

dvs  $R \rightarrow \infty$  for  $kx = n\pi$

$$\Rightarrow \exists r = 1/R = "krumningen" = 0 \quad \text{for } kx = n\pi$$

# Newton's lover [YF 4,5; LL 2,3] (13)

$m, \vec{v}, \vec{a}$  = legemets masse, hastighet, akselerasjon

$\vec{F}$  = netto ytre kraft på legemet

N1:  $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2:  $\vec{F} = m\vec{a}$

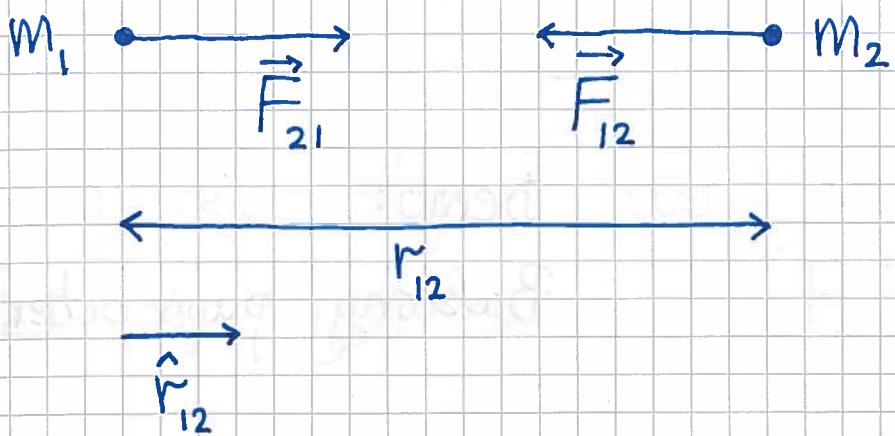
N3:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Dvs: Krefter er vekselvirking mellom legemer. Dersom A virker på B med kraft  $\vec{F}_{AB}$ , virker B på A med kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$$

# Fundamentale krefter i naturen [YF5.5; LL 2.1] (14)

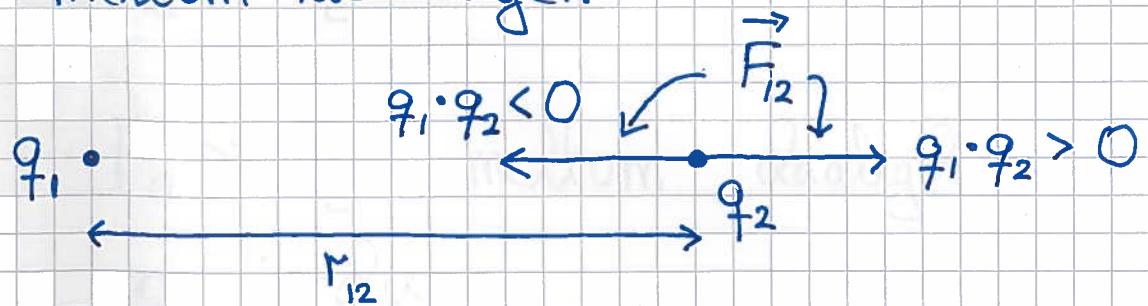
- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.



Newton's gravitasjonslou:  $\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

Gravitasjonskonstanten:  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

- Elektromagnetisk v.v. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lou:  $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

$[q] = C = A \cdot s$  (coulomb)

Vakuumpermittiviteten:  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Gir hhv radioaktivitet og stabile atomkjerner.

(15)

Dagliglivet styres av coulombkrefter ( $F_E$ ) og gravitasjon ( $F_G$ ).

Protonet:  $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $q = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Elektronet:  $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $q = -e$

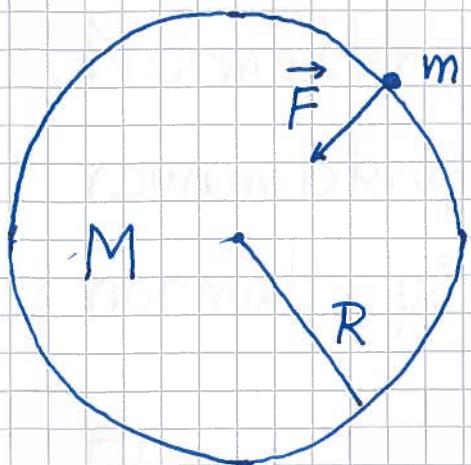
$\Rightarrow F_E \gg F_G$  mellom elementærpartikler, atomer, molekyler og "dagligdagse" legemer

$F_G \gg F_E$  mellom himmellegemer

$F_G \gg F_E$  mellom dagliglags legeme og jorda

# Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]

16



Tyngden til  $m$  =  
gravitasjonskraften på  
 $m$  fra  $M$ :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Jorda:  $M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R \approx 6370 \text{ km}$

$$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{tyngdens akselerasjon,}$$

når  $m$  er nær Jordas overflate

Fritt fall hvis tyngdekraften  $mg$  er  
eneste kraft på  $m$ :

$$N2: mg = ma \Rightarrow \underline{a = g}$$

# Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

(17)

Normalkraft :  $N = \text{netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, normalt på kontaktflaten}$

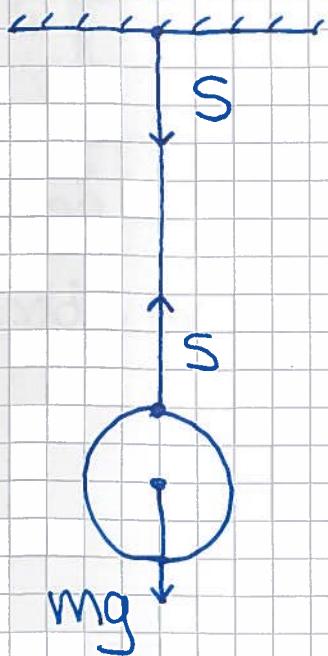
Eks:



Hvis kloss i ro :

$$N = mg \quad (\text{pga N1})$$

Snorkraft :  $S = \text{netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora}$



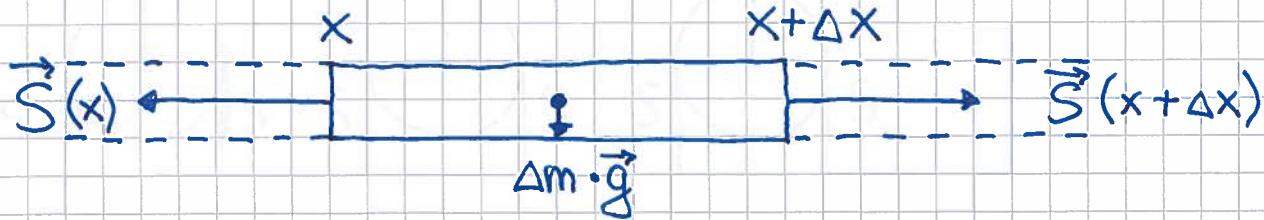
Hvis kule i ro :

$$S = mg \quad (\text{pga N1})$$

[ Hva er "N3-motkreflene"

til  $mg$ ,  $N$  og  $S$  ? ]

Lett og stram snor blir rett, med konstant snordrag  $S$ : (18)

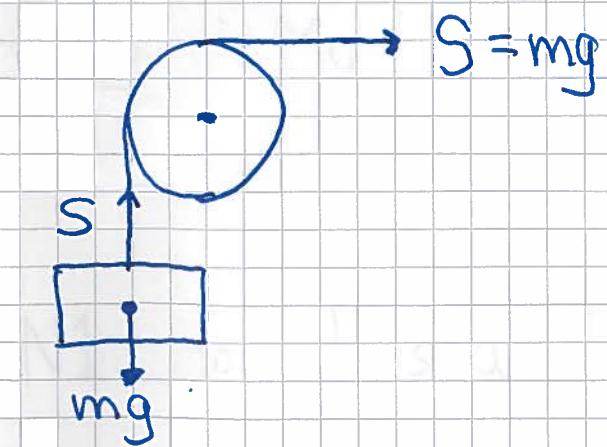


$$N2: \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$$

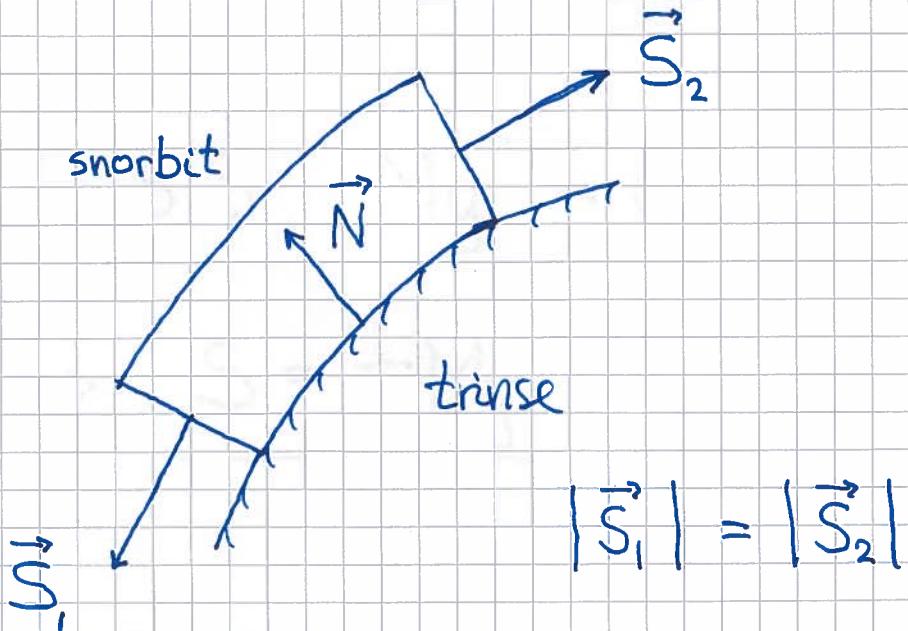
$$\text{Med } \Delta m \approx 0 \text{ er } \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$$

$\Rightarrow S = |\vec{S}|$  konstant langs snora

Friksjonsfri trinse endrer retning på  $\vec{S}$ :

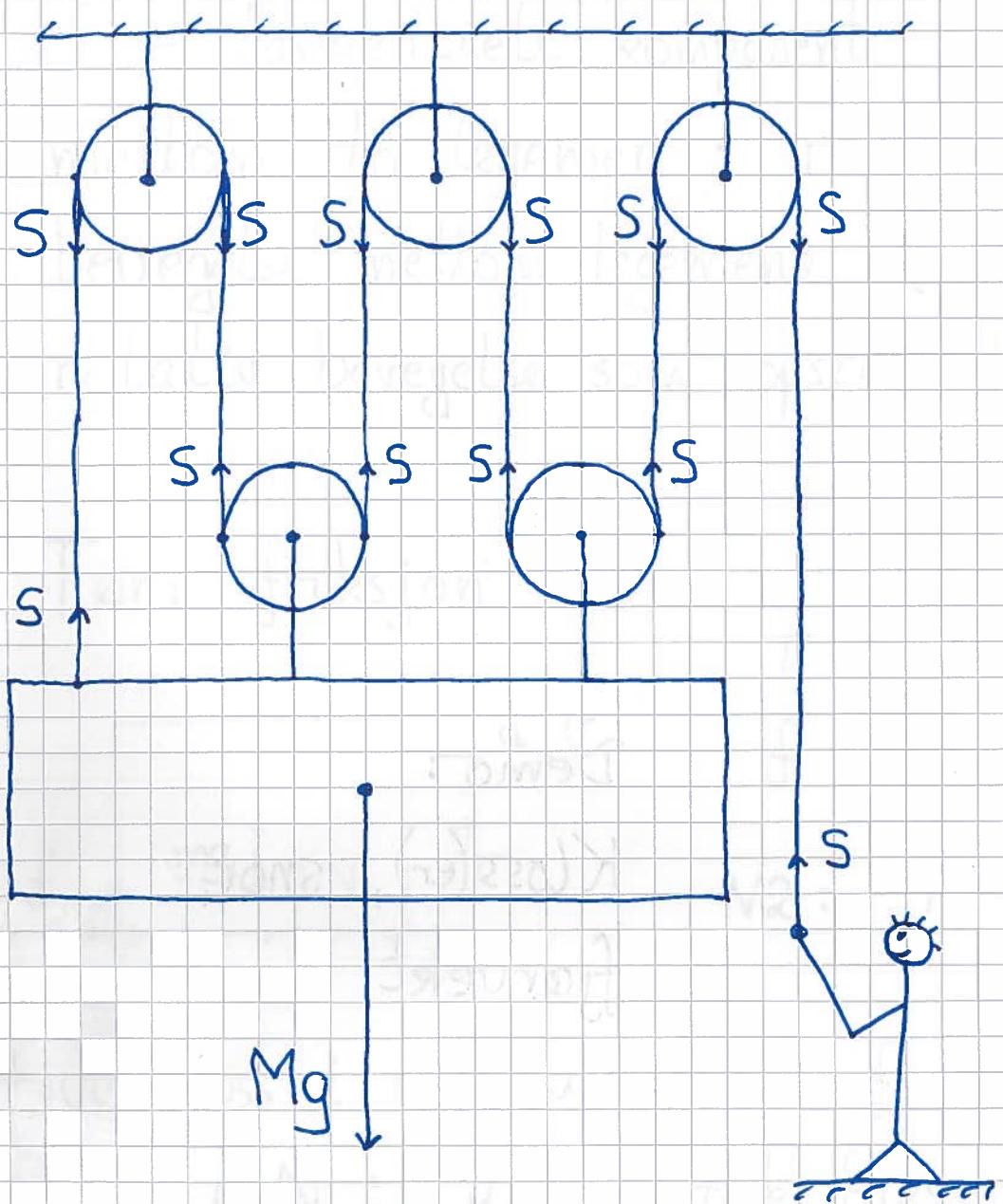


(Lodd i ro)



$$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2|$$

Talje :



$$N_1 \text{ for kassa: } 5S - Mg = 0$$

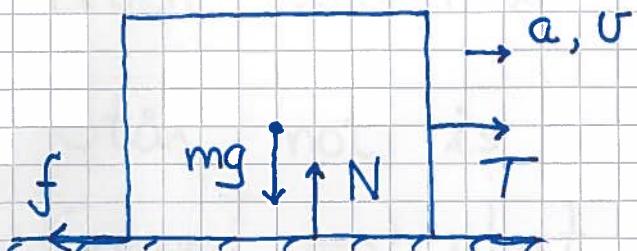
$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \frac{1}{5}Mg}}$$

# Friksjonskrefter : [YF 5.3 ; LL 3.1]

(20)

$f$  = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer ; retning mot relativ bevegelse mellom legemene (evt: mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon)

## Tørr friksjon



$T$  = trekke-kraft

$f$  = friksjonskraft

$$N_2: T - f = ma$$

Hvis kloss i ro ( $a = 0$ ) :  $f = T$  ;

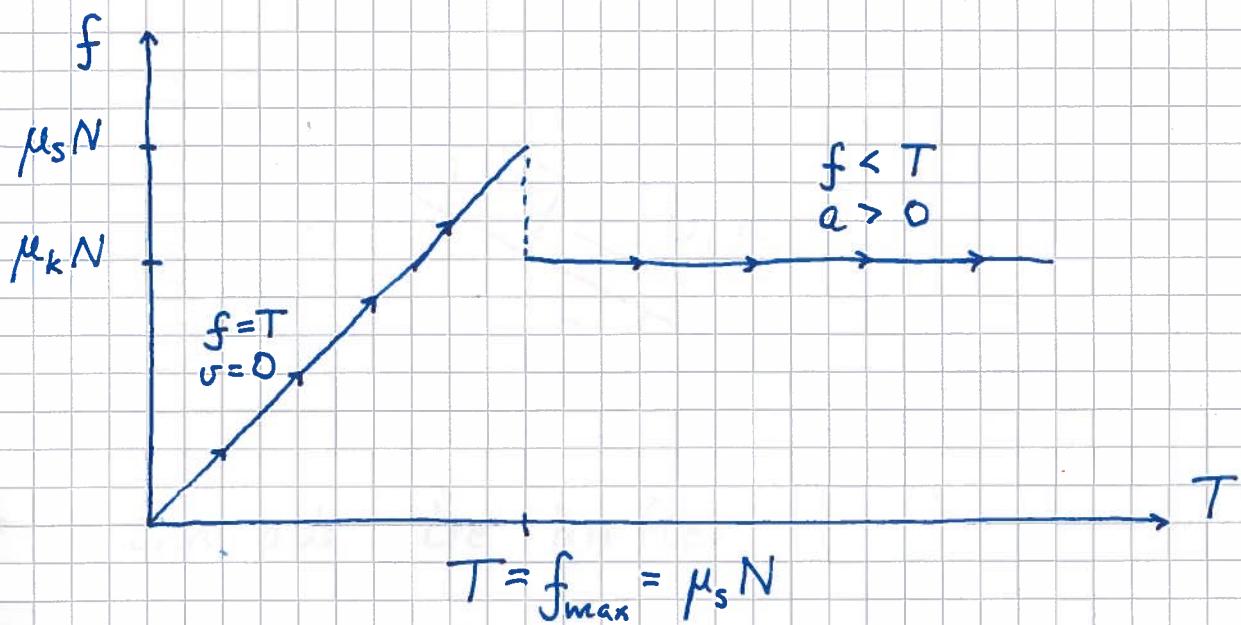
$f_{\max} = \mu_s N$  ;  $\mu_s$  = statisk friksjonskoeffisient

Klossen glir hvis  $T > f_{\max}$  ; da er  
 $f = \mu_k N$  ;  $\mu_k$  = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er  $\mu_k \lesssim \mu_s$  : ujeunheter i overflatene gir best grep når  $U = 0$

Grafisk,  $f(T)$ :

(25)



Noen tallverdier:

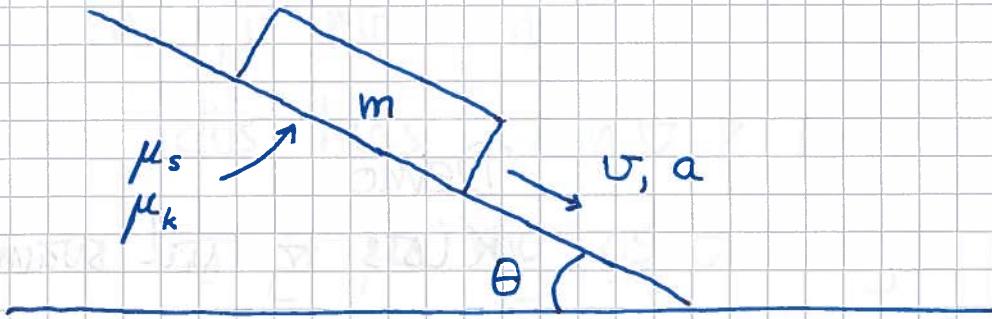
Stål mot is  $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast  $\mu_s \sim 1$

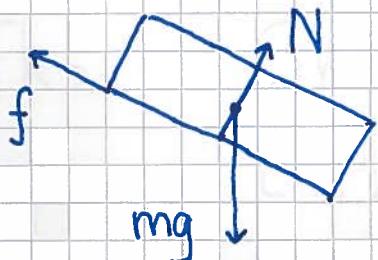
Våt svamp mot bordplate  $\mu_s > 1$

# Eks (inkl problemløsningsstrategi) :

(22)



- Finn alle ytre krefter



"fritt-legeme-diagram"

- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_{\perp}, \quad N_{||} = 0, \quad f = f_{||}, \quad f_{\perp} = 0$$

$$G_{\perp} = mg \cos \theta, \quad G_{||} = mg \sin \theta$$

- Bruk N1 ( $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ) eller N2 ( $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$ )

$$N1, \perp : \quad N = mg \cos \theta$$

$$N2, || : \quad mg \sin \theta - f = ma$$

Hvis kloss i ro:  $f = mg \sin \theta$  ( $a=0$ )

(23)

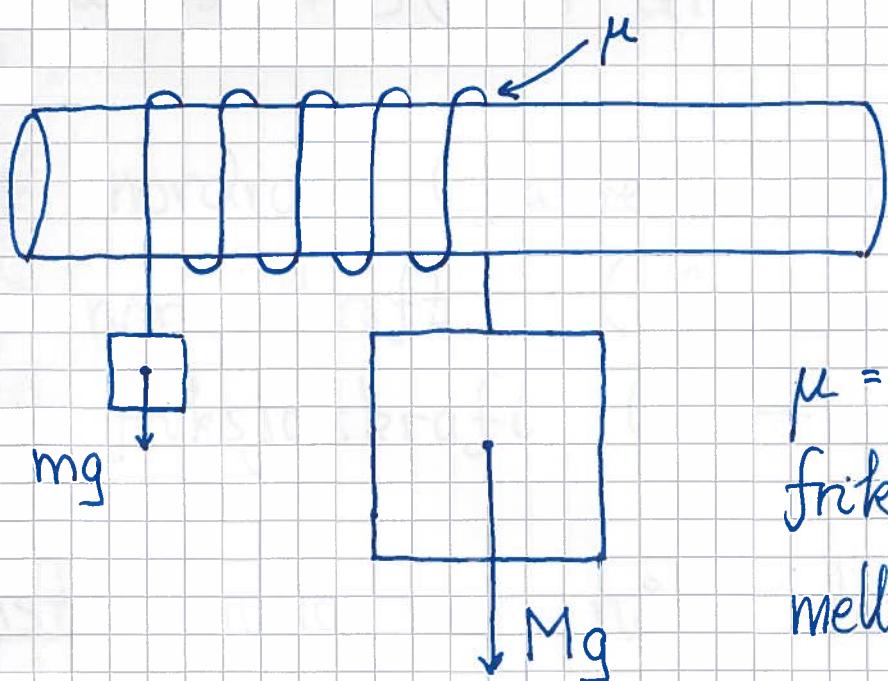
Klossen glir hvis  $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s mg \cos \theta$   
dvs hvis  $\tan \theta > \mu_s$

Da er  $f = \mu_k mg \cos \theta$  og  
 $a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

---

Eks: Snorfriksjon

[ "Med livet som innsats", youtube/nrk ]



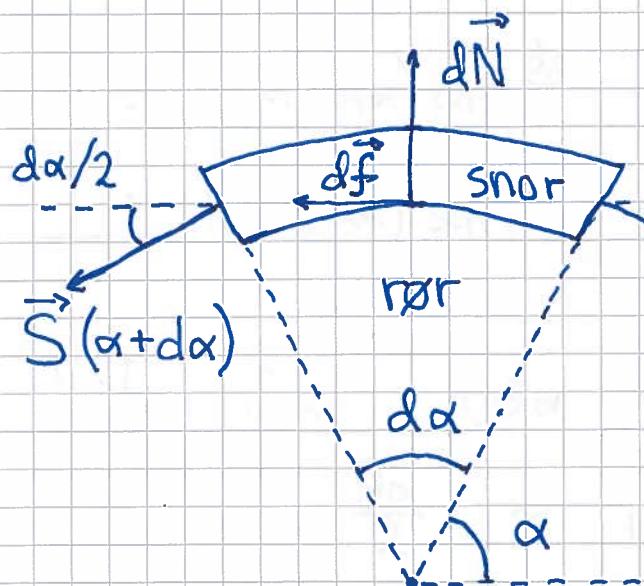
$\mu$  = statisk  
friksjonskoeff.  
mellan snor og rør

Bestem minste  $m$  som holder  $M$  oppe  
med kontaktvinkel  $\varphi$  mellom snor og rør.

I figuren er  $\varphi = 90^\circ$ .

# Løsn: N1 for liten snorbit

24



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + \vec{dN} + \vec{df} = 0$$

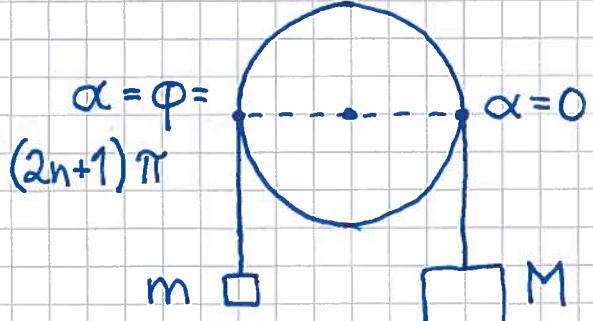
$\vec{S}$  = snordrag (fra resten av snora)

$\vec{dN}$  = normalkraft (fra røret)

$\vec{df}$  = friksjonskraft (—||—)

Minste mulige  $m$  når statisk friksjon er størst mulig, dvs

$$df = df_{\max} = \mu \cdot dN$$



Dekomponerer :

$$\parallel : S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$\perp : S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten  $d\alpha$  ( $d\alpha \rightarrow 0$ ) :

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed :

$$dS = -\mu dN, \quad S d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Integratorer fra  $\alpha = 0$  til  $\alpha = \varphi$

(der  $\varphi = 9\pi$  ved 4.5 runder med snora) :

$$\frac{S(\varphi)}{S(0)} \int \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^\varphi d\alpha \Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu \varphi$$

$$\Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu \varphi}}$$

Dvs, siden  $S(0) = Mg$  og  $S(\varphi) = mg$ : (26)

$$m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

I eksp. er  $\mu \approx 0.17$ ,  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000g \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8 \text{ g}$$

Omvendt: Nødvendig kraft for å heise

$$M \text{ opp er } S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$$

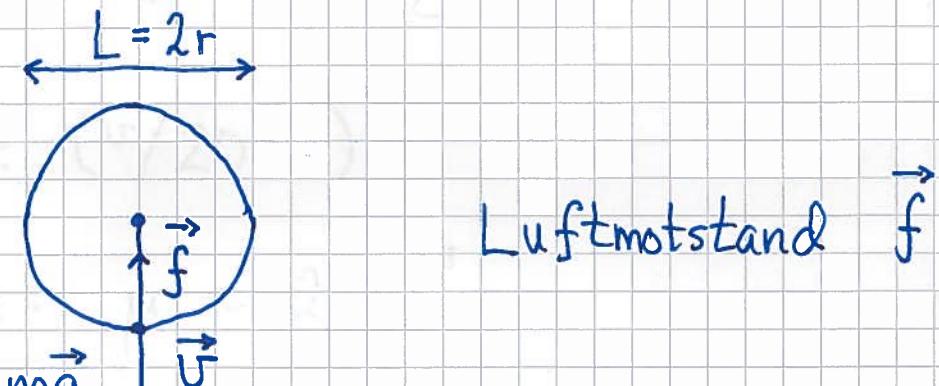
$$\Rightarrow m = 1 \text{ kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122 \text{ kg}$$

(27)

# Friksjon i fluider: [YF 5.3; LL 8]

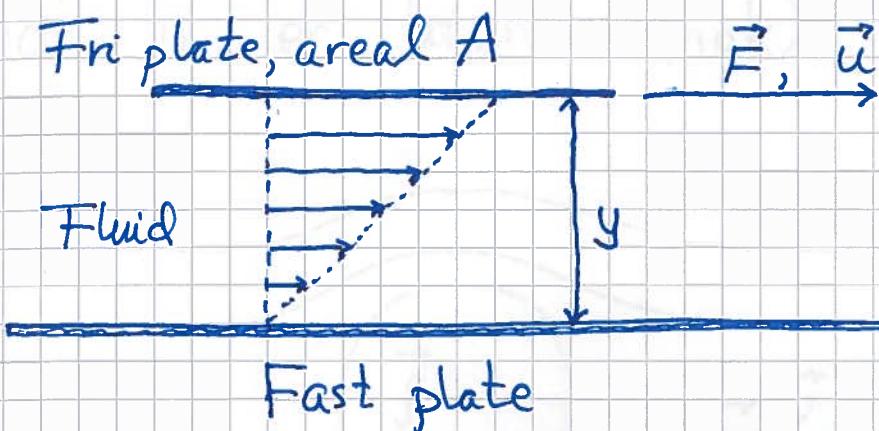
Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning  $L$  på tvers av  $\vec{v}$ ; omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet  $\rho$  og dynamisk viskositet  $\mu$ .

Eks: Ball som faller i luft



$$A = \pi r^2$$

# Definisjon og måling av $\mu$ :



Liten fart  $u$  gir  
lineær fartsprofil  
i fluidet

$$\text{Exp. gir } F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$$

der  $\mu$  = fluidets dynamiske viskositet;  $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Eks:  $(\nu/20^\circ\text{C})$

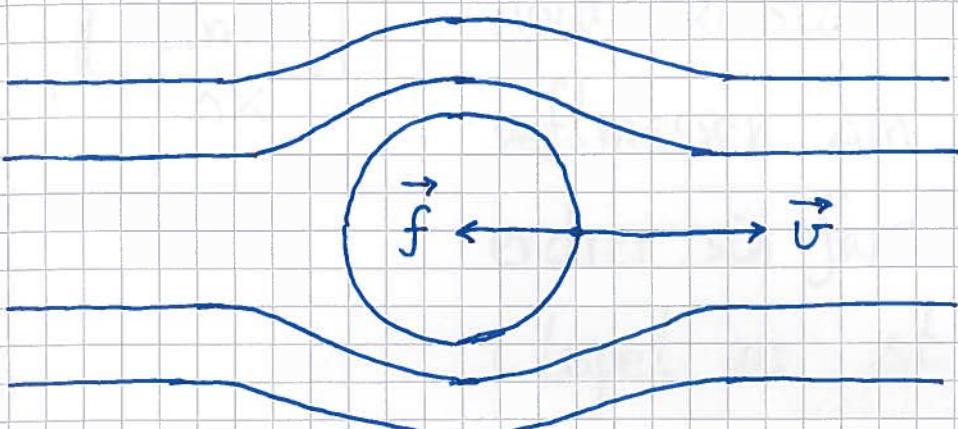
Luft:  $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$

Vann:  $10^{-3}$

Glyserol: 1

Sirup:  $10^2$

(29)  
Laminer strømning (pen, lagdelt)  
når  $v$  er liten (nok):



$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

Kule med radius  $r$ :  $k = 6\pi\mu r$

(Stokes' lov)

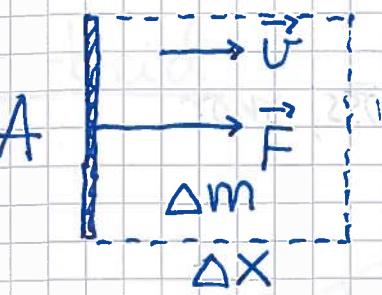
Turbulent strømning (uordnet, viruler)  
når  $v$  er stor (nok):

$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2}\rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

$C_d$  = drag-koeffisienten

(Kule:  $C_d \approx 0.5$ )

Eks:  $C_d$  for plate



Må dytte med kraft  $F$  for å holde konstant fart  $v$ , fordi luftmassen  $\Delta m = g \Delta V = g A \Delta x$  endrer sin fart fra 0 til  $v$  i løpet av  $\Delta t = \Delta x / v$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{g A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = g A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

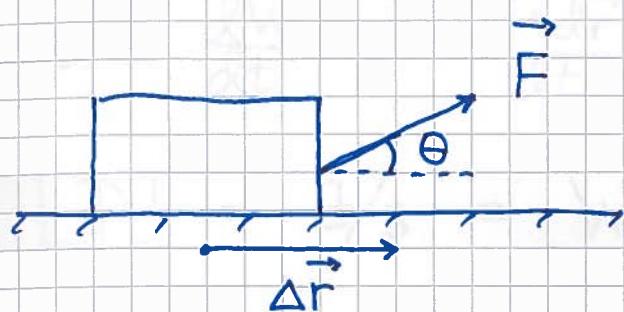
Eks: Bilen Revolve har  $A \approx 1.1 \text{ m}^2$

og  $C_d \approx 1.35$ . Luftmotstand ved  $v = 60 \text{ km/h}$  er da ca

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} g A C_d v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2 \text{ N} \\ &\approx \underline{250 \text{ N}} \end{aligned}$$

# Arbeid og energi [YF 6, 7; LL 4] (31)

## Arbeid [YF 6.1-6.3; LL 4.1]



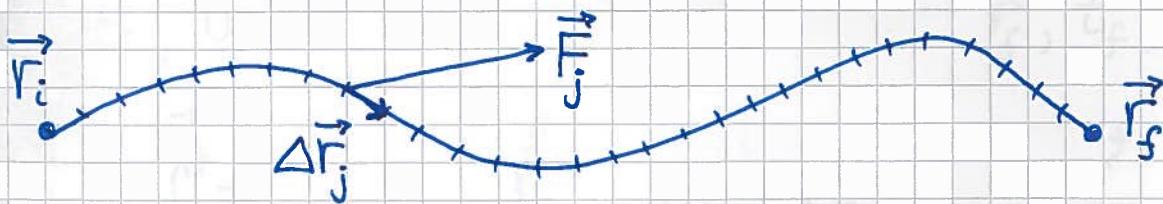
Kraft  $\vec{F}$  utfører arbeid på klossen.

arbeid  $\stackrel{\text{def}}{=}$  kraft  $\times$  forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$[W] = N \cdot m = J \text{ (joule)}$$

Generelt :



$$W = \sum_i \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{\Delta r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av  $\vec{F}$  ved forflytningen fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_f$

## Effekt

[YF 6.4 ; LL 4.1]

(32)

effekt  $\stackrel{\text{def}}{=}$  arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{dr}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = W \text{ (watt)}$$

$$\underline{1 \text{ kWh}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{s} = \underline{3.6 \text{ MJ}}$$

## Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

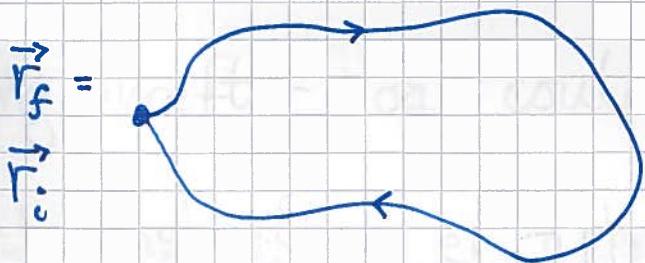
$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

Dermed: 
$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

Arbeid  $W$  utført på et legeme tilsvarer endringen i legemets kin. energi,  $\Delta K$ .

### Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

Anta at  $\vec{F}$  virker på et legeme som kommer tilbake der det startet, dvs  $\vec{r}_f = \vec{r}_i$  :

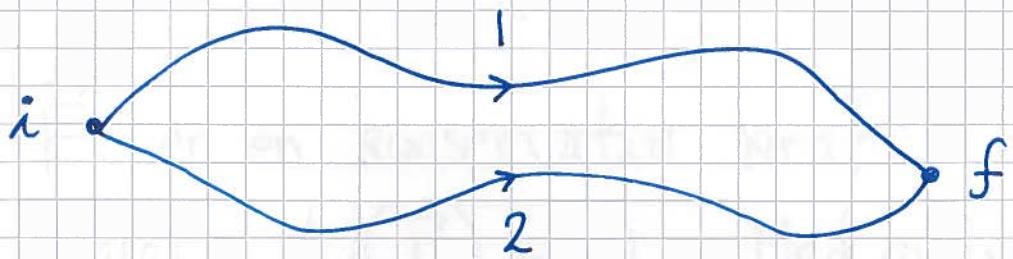


Hvis  $K_f = K_i$ , er  $W = \Delta K = 0$ , dvs

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er  $\vec{F}$  en konservativ kraft.

Når  $\vec{F}$  er konservativ, er arbeidet  
 $W$  uavhengig av veien :



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 \\ = W_1 - W_2 \\ \Rightarrow W_1 = W_2 \quad (\text{qed})$$

Tyngdekrefter og coulombkrefter er konervative.

Friksjonskrefter er ikke konervative.

## Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

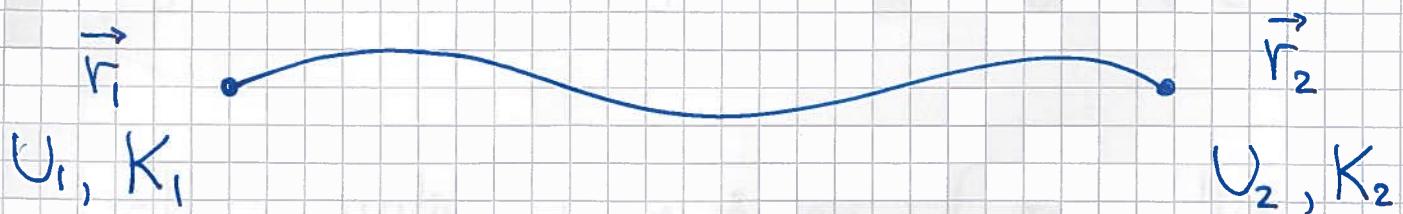
(35)

$$U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der  $\vec{F}$  er en konservativ kraft, og der vi har valgt  $U(\vec{r}_0) = 0$ . Med andre ord, kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

## Bevarelse av mekanisk energi

[YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{-\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

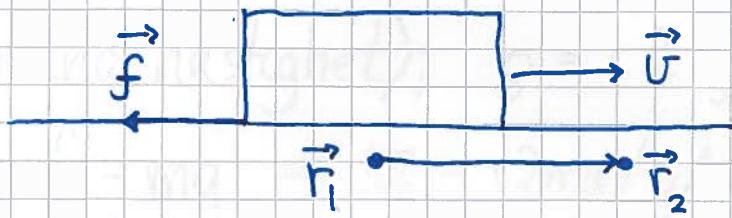
$$U_2 - U_1 = - \int_0^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left( - \int_0^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Total mekanisk energi:  $E = K + U$  ③6

$\Rightarrow E$  er bevart i et konserativt system

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid rettet mot } d\vec{r}$$

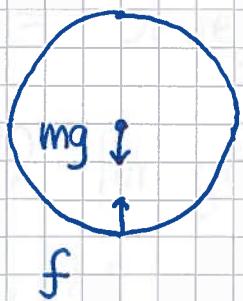
$\Rightarrow$  Mek. energi tapes ; omdannes til varme, lyd etc.

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f} \text{ er ikke konserativ}$$

Lab: Rulling uten å gli ("ren rulling")  
gir bevart mek. energi. Statisk friksjons-  
kraft gjør ikke arbeid (ideelt sett).

# Eks: Fallende bordtennisball

37



$$m = 2.7 \text{ g}, r = 20 \text{ mm}$$

- Max hastighet?
- Tapt andel mek. energi?

Løsn: Antar  $f = \frac{1}{2} g A C_d v^2$  når  $v = v_{\max} = v_t$  (terminalhastighet);  $g = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = \pi r^2$ ,  $C_d = 0.5$ .

$$\text{N1: } f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2mg}{gAC_d}} \approx 8.4 \text{ m/s}$$

Anta at ballen slippes fra høyde  $h$  over gulvet.

$$\Rightarrow E_i = U_i = mgh; E_f = \frac{1}{2}mv_t^2$$

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{gAC_d h}$$

$$\approx 64\% \quad \text{hvis } h = 10 \text{ m}$$

$$(\text{Hvis fritt fall } 10 \text{ m: } v_f = \sqrt{2gh} \approx 14 \text{ m/s})$$

# Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

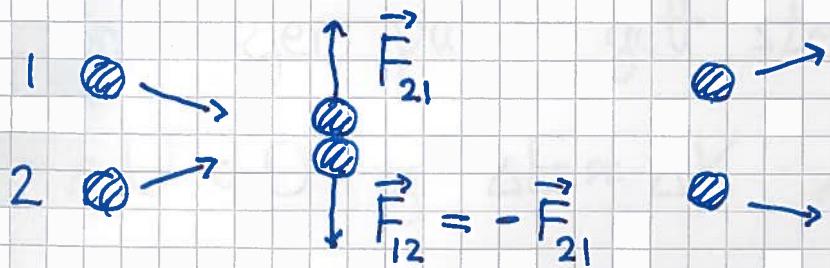
$$\text{N2 for gitt } m: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}$  = massens impuls;  $[p] = \text{kg m/s}$

Vi ser da:

Hvis  $\vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ute}} = 0$ , er impulsen  $\vec{p}$  bevart

Indre krefter mellom legemer endrer ikke hele systemets totale impuls:



$$\text{N3} \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{N2}} d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

## Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5]

(39)

Total impuls er bevart i kollisjoner, mens  
mek. energi kan gå tapt.

Elastisk støt:  $\Delta E = 0$

Velastisk støt:  $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Max  $|\Delta E|$ .

Legemene henger sammen med felles hastighet  
etter kollisjonen.

Har typisk svært kortvarige kollisjoner  
som skjer på et gitt sted, slik at

$\Delta U \approx 0$  og  $\Delta E \approx \Delta K$  i kollisjonen.

Tapt K  $\rightarrow$  deformasjon, varme, lyd

# Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

(40)

Kollisjon i 1D:

Før  $m \rightarrow v$   $v \leftarrow M$   $\rightarrow +$

Etter  $v' \leftarrow m$   $M \rightarrow V'$

$$\Delta p_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel.:  $v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$

(b) Delvis uel.: Har kun 1 ligning, 2 ukjente  
 $\Rightarrow$  trenger en lign./opplysning til.

(c) Elastisk:  $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m v'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1):

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

(41)

(3)  $\cdot M - (1)$  gir

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2v + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

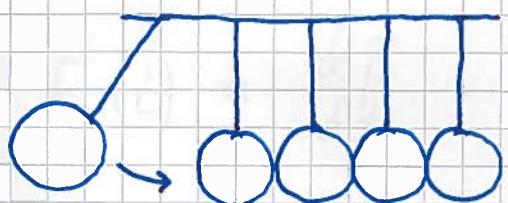
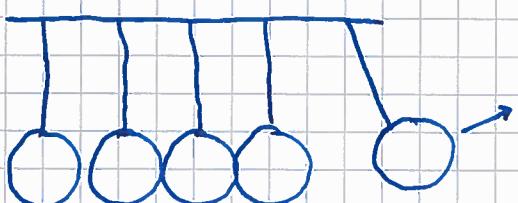
(3)  $\cdot m + (1)$  gir

~~$$v' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$~~

(oppagtt, r/ombytte av små og store bokstaver!)

Eks 1:  $m = M \Rightarrow v' = v, v' = v$ 

Kjent fra leketøy:

 $\Rightarrow$ 

Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt

$$m \odot \rightarrow v \quad \left\{ \begin{array}{l} v=0 \\ M \approx \infty \end{array} \right.$$

$$v' \leftarrow m \quad \left\{ \begin{array}{l} v'=0 \\ v \end{array} \right.$$

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -v \quad (\text{OK})$$

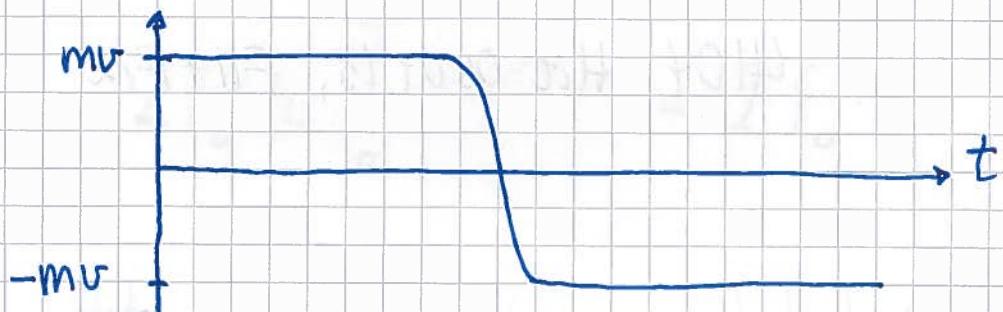
$$K' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2 = K ; \text{ OK}$$

$$p' = m v' = -m v$$

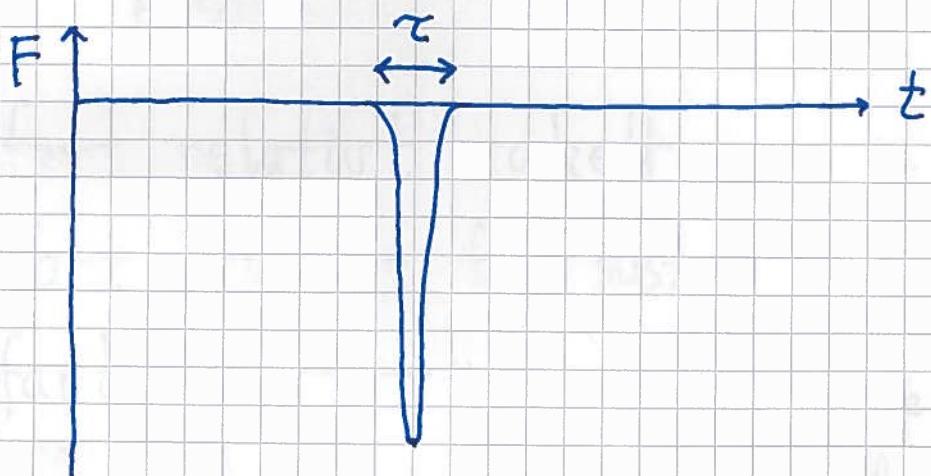
$$P' = M V' = M \frac{m}{M+m} \cdot 2v = 2m v \quad (!)$$

$$\Rightarrow P'_{\text{tot}} = m v = P_{\text{tot}} ; \text{ OK}$$

$p(t)$  for ballen (kvalitativt) :



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} :$$



Anta f.eks.  $\tau = 2 \text{ ms}$  og  $\Delta v = 40 \text{ m/s}$  ;  
da er  $\langle a \rangle \approx 40 / 0.002 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ km/s}^2$ ,  
så tyngden  $m g$  er neglisjerbar i kollisjonen.

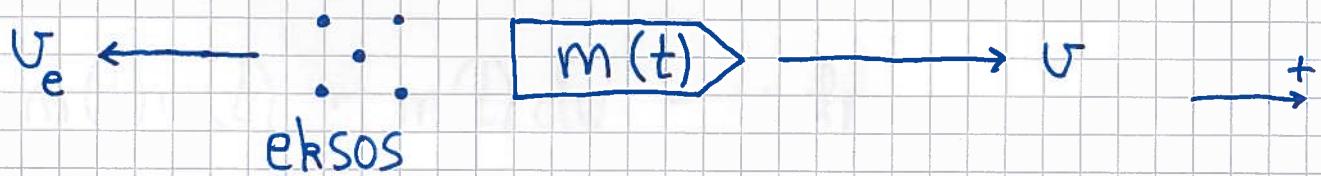
"Kraftstøt" (eng: impulse) :

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks:  $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt \\ &= 2F_0 \tau \int_0^{\infty} -e^{-t/\tau} = \underline{2F_0 \tau} \end{aligned}$$

Rakett [YF 8.6 ; LL 5.4]



Eksosfart relativt raketten :  $u < 0$

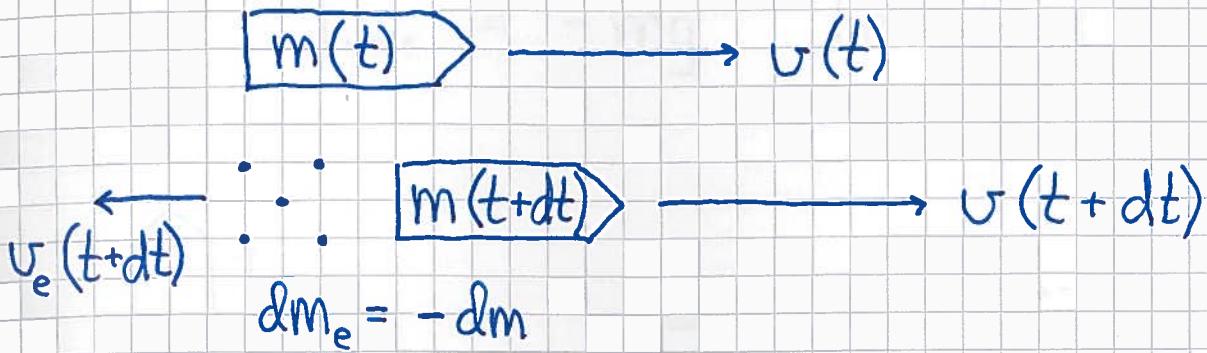
Rakettfart relativt fast system :  $v$

Eksosfart  $\underline{\quad} \parallel \underline{\quad}$  :  $u_e = v + u$

Driustoff-forbruk pr tidsenhet :  $dm/dt < 0$

Anta konstant  $u$ , og  $F_{ytre} = 0$  (inntil videre).

Impulsbevarelse fra  $t$  til  $t+dt$ :



$$\text{Ved tid } t: p(t) = m(t)v(t)$$

Ved tid  $t+dt$ :

$$p(t+dt) = m(t+dt)v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [v + v(t) + dv]$$

$$= m(t)v(t) + m(t)dv - udm$$

$$\Rightarrow m dv - u dm = 0$$

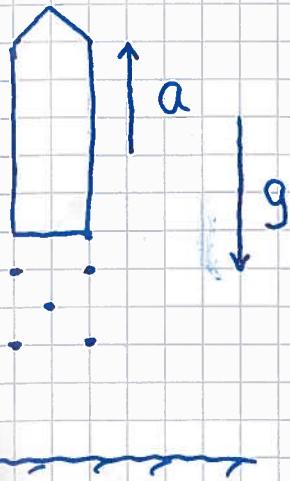
$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

dvs:  $m a = F_{\text{skyv}}$

med skyvkraft ("rekyl")  $F_{\text{skyv}} = um > 0$

Hvis oppskyting fra bakken, virker

$$F_{ytre} = -mg \quad (\text{en stund})$$



$$\Rightarrow ma = um - mg$$

Dvs:  $F = um - mg$  er total kraft på raketten; må ha  $um > mg$  for å ta av

Øving:

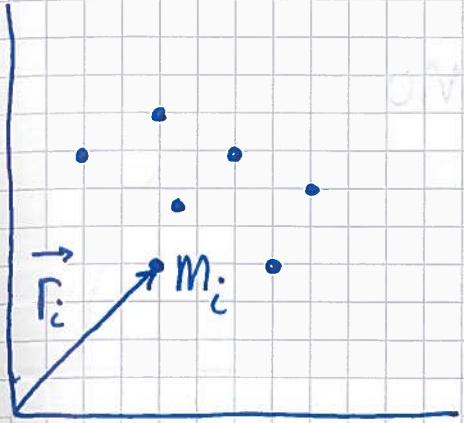
$$-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad | \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres!

# Massesenter [YF 8.5 + oppg. 8.115, 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(46)



Massesenter (CM) for N

punktmasser  $m_1, m_2, \dots, m_N$

i posisjoner  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ :

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

med  $M = \sum_i m_i$  = systemets totale masse

For kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow dm \quad \Rightarrow M = \int dm$$

$$\sum_i \rightarrow \int \quad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

1D, 2D, 3D:  $\lambda, \sigma, \rho$  = masse pr hhv

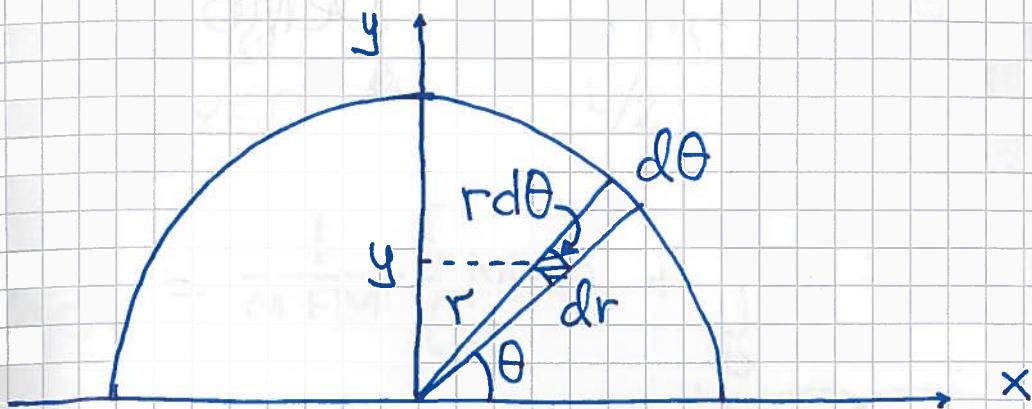
lengde-, flate-, volumenhet

$dl, dA, dV$  = hhv lengde-, flate-, volumelement

$$\Rightarrow dm = \lambda dl, \sigma dA, \rho dV = masselement$$

Hvis uniform massefordeling:  $dm/M = dV/V$  osv

Eks 1:  $\vec{R}_{CM}$  for halvparten av tynn skive med radius R.



$$X_{CM} = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y}, \text{ med}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA, \text{ med } A = \frac{\pi R^2}{2},$$

$$dA = dr \cdot r d\theta \quad \text{og} \quad y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta$$

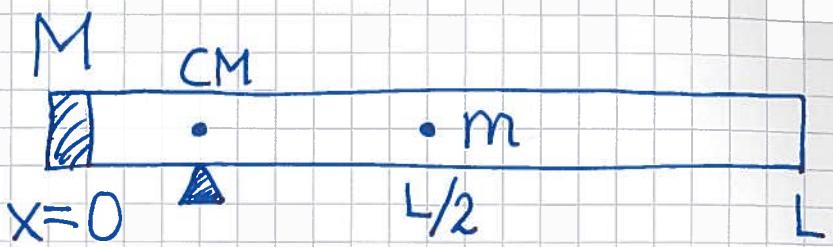
$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{= R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{= 1! (-\cos \theta) = 2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

$$\text{Halvparten av tynn ring: } Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\text{Halvparten av kompakt kule: } Y_{CM} = \frac{3R}{8}$$

## Eks 2: Rør med vodd i enden

48

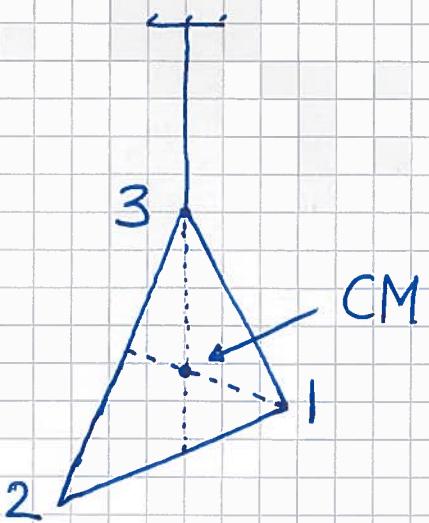
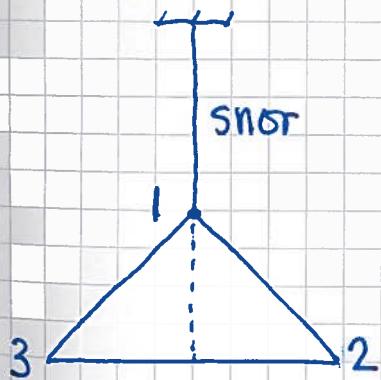


$$m = 165 \text{ g}$$

$$M = 305 \text{ g}$$

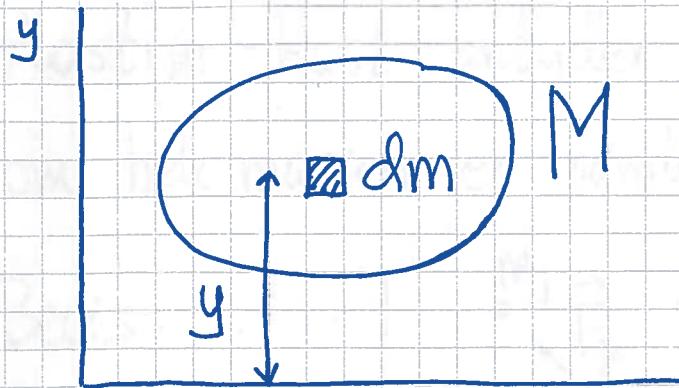
$$\begin{aligned} X_{CM} &= \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L}}_{= m \cdot L/2} \right\} \\ &= \frac{m L}{2(m+M)} \approx \underline{0.18 L} \end{aligned}$$

## Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM



# Potensiell energi i tyngdefeltet

(49)



Velger  $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Anta  $g = \text{konstant}$  (dvs  $y_{\max} - y_{\min} \ll \text{jordradien}$ )

$$\Rightarrow U = g \cdot \int y dm = g \cdot M \cdot Y_{CM}$$

dvs som om hele  $M$  var samlet i  
høyden  $Y_{CM}$ , f.eks. i  $\vec{R}_{CM}$

Tyngdepunkt : Det legemet balanserer.

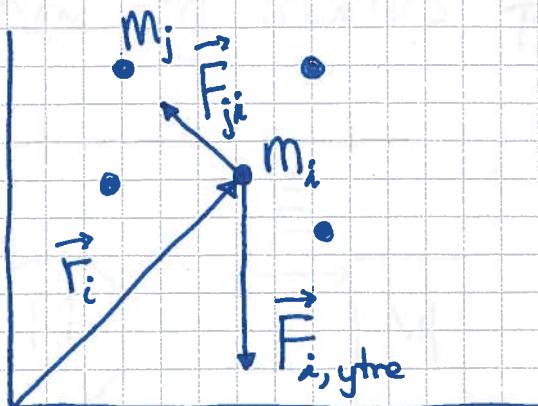
Hvis  $g$  er konstant (for hele legemet),  
er tyngdepunkt og massesenter samme sted.

# Massesenterets bevegelse [YF 8.5; LL 5.8]

(50)

Plastrør-kast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM. Dette stemmer!

Bewis:



N2 for  $m_i$ :

$$m_i \ddot{r}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft på } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft på } m_i}$$

Tar  $\sum_i$  på begge sider.

$$\text{VS: } \sum_i m_i \ddot{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \vec{MR}_{CM} \right\} = \vec{MR}_{CM}$$

$$\text{HS: } \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

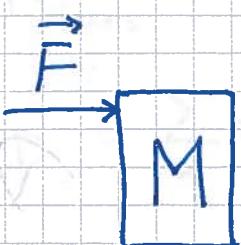
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

(51)

Dvs: Bevegelsen til CM blir som om hele M er samlet i  $\vec{R}_{CM}$  og utsættes for netto ytre kraft  $\vec{F}_{ytre}$ .

Eks:



$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{F}/M ; \text{ den samme for de to legemene}$$


---

I tillegg til CMs bevegelse,

for stive legemer: rotasjon om CM

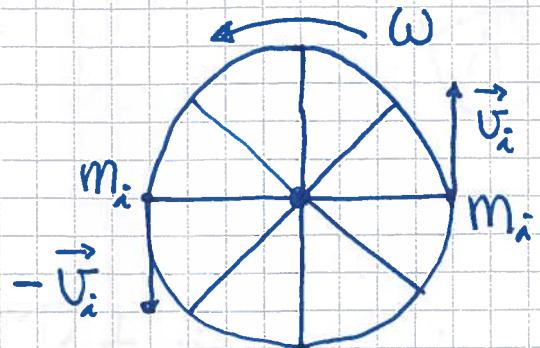
for ikke helt stive legemer: også vibrasjon

# Rotasjon [YF 9,10; LL 6 (5)]

(52)

Innledende kommentarer:

- Ren rotasjon (typisk om CM, men ikke nødv. vis)



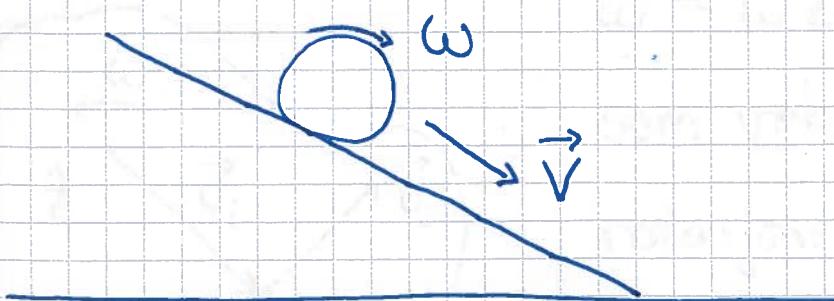
$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}_{\text{CM}}}^2 = 0$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \neq 0$$

$\boxed{\quad}$  = hjulets dreieimpuls  $\neq 0$

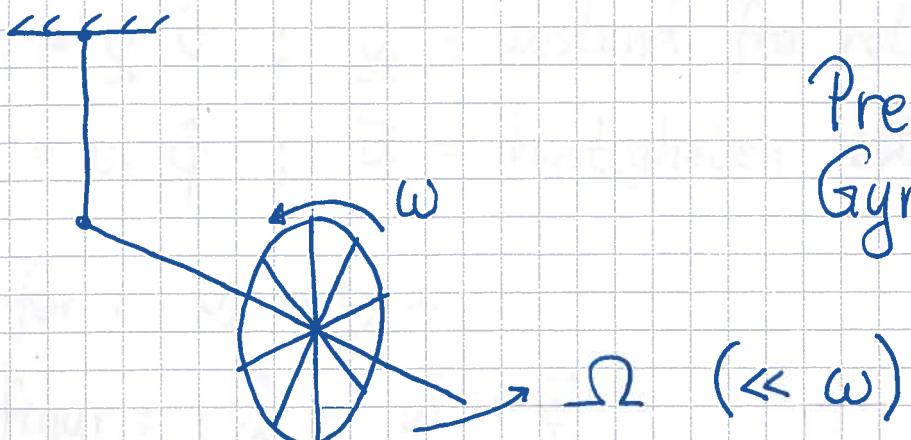
- Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{\vec{v}} > 0$  pga ytre kraft (langs skråplanet)

$\dot{\omega} > 0$  pga ytre dreiemoment (mhp CM)

- Overraskende (?) dynamikk



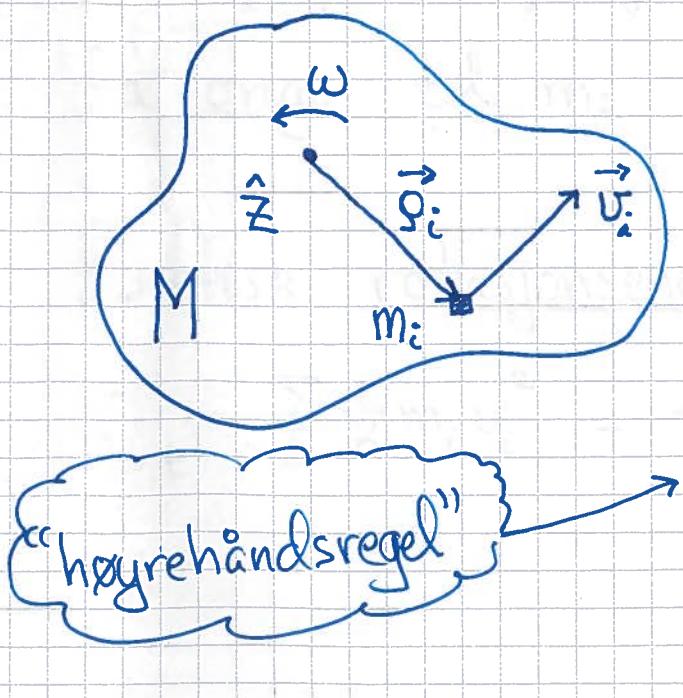
Presejon.  
Gyroskop.

## Rotasjonsenergi og treghetsmoment

[YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3 ]

Ser først på ren rotasjon av stivt legerne, om fast akse, ikke nødv. vis gjennom CM.

Med rotasjonsaksen langs  $\hat{z}$ , ut av planet :



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \text{vinkelhast.}$$

som vektor, langs  
rotasjonsaksen ; 4  
fingre på høyre hånd i  
rotasjonsretningen (her:  
mot klokka) gir tommelen  
langs  $\vec{\omega}$

Videre er :

$$\vec{\Omega}_i = g_i \hat{\vec{g}} ; \quad g_i = \text{avstand fra rot.aksen til } m_i$$

$$\vec{v}_i = v_i \hat{\vec{\varphi}} ; \quad v_i = \text{hastigheten til } m_i$$

Fra før :  $v_i = g_i \omega$

Fra figur :  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{g}_i$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt :

4 fingre langs  $\vec{a}$  bøyes over i retning langs  $\vec{b}$  ;  
da peker tommelen langs vektoren  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

Vi bruker her sylinderkoordinater  $g, \varphi, z$  ;  
dus polarkoordinater  $g, \varphi$  samt  $z$ .

[Unngår å bruke  $\vec{r}_i$  for avstandsvektoren fra z-aksen  
til  $m_i$  fordi  $\vec{r}_i$  forbeholdes posisjonsvektoren  
fra origo til  $m_i$  ; derfor  $\vec{g}_i$  ! ]

Kinetisk rotasjonsenergi for det stive legemet :

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i g_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her er  $I$  legemetts treghetsmoment, mhp den aktuelle aksen:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2$$

Hvis kontinuerlig massefordeling:  $m_i \rightarrow dm$ ,  $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow I = \int r^2 dm$$

$r$  = avstand fra aksen til  $dm$

Generell bevegelse for et stift legeme er translasjon av CM, med hastighet  $\vec{V}$ , samt rotasjon om en aksel gjennom CM, med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ . Total kinetisk energi blir da

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

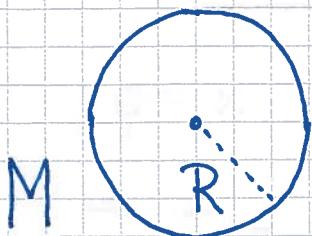
[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon:  $I_0$  betyr at akselen går gjennom CM.

# Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6; LL 6.3]

(56)

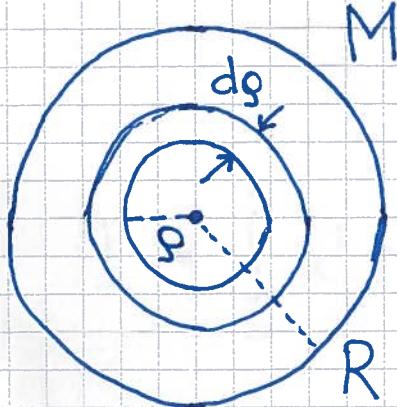
- Ring (og hul sylinder)



$$I_o = \int g^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Må kunnes; oppgis ikke til eksamen.]

- Skive (og kompakt sylinder)



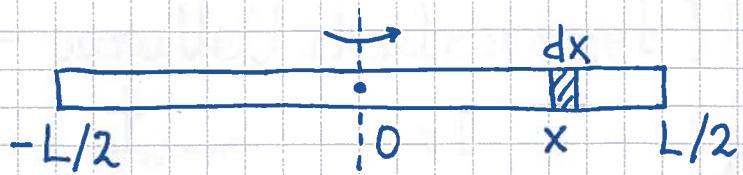
Bidrag fra tynn ring med  
radius  $g$ , tykkelse  $dg$ ,  
areal  $\Delta A = 2\pi g \cdot dg$  og  
masse  $dm = M \cdot \Delta A / \pi R^2$ :  
 $dI_o = g^2 dm = 2Mg^3 dg / R^2$

$$\Rightarrow I_o = \int dI_o = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

(oppgis)

• Tynn stang (og tynn plate)

(57)

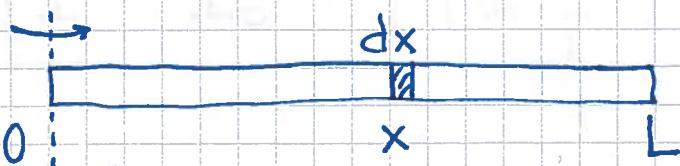


$$\rho = x, dm = M \cdot dx/L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

(oppgis)

Mhp akse ved stangas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

(oppgis ikke)

• Kuleskall

$$I_0 = \frac{2}{3} MR^2$$

• Kompakt kule

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

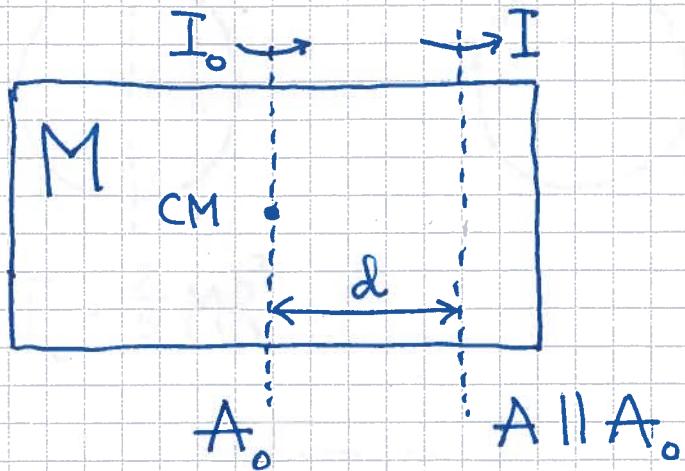
} Se øring og LF  
for detaljer.

Oppgis.

# Steiners sats [YF 9.5 ; LL 6.3]

(58)

(= parallellakseteoremet)

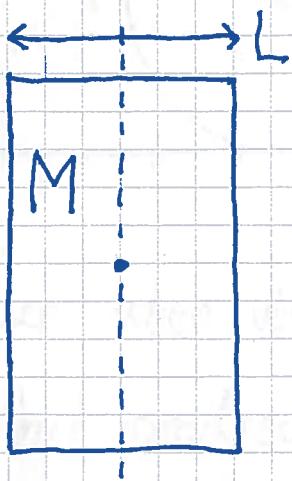


$A$ : akse parallel  
med aksen  $A_0$

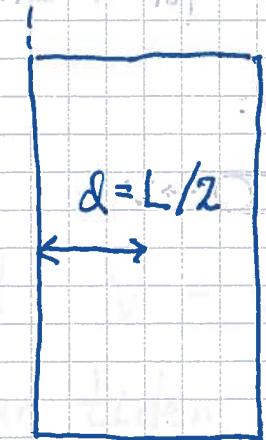
$$I = I_0 + M d^2$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør



$$I_0 = \frac{1}{2} M L^2$$

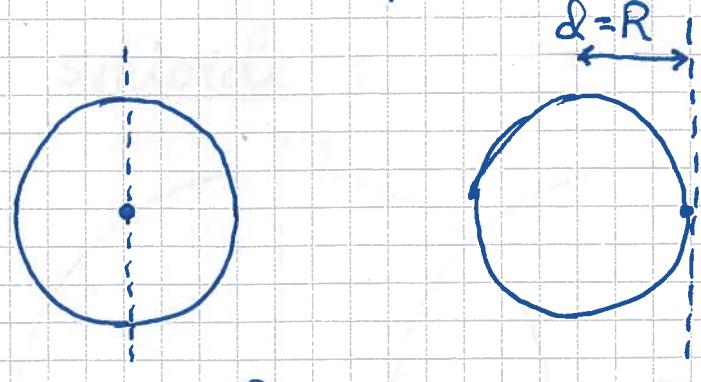


$$\begin{aligned} I &= I_0 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} M L^2 \end{aligned}$$

(SOM s. 57)

## Eks 2: Kompakt rule

59

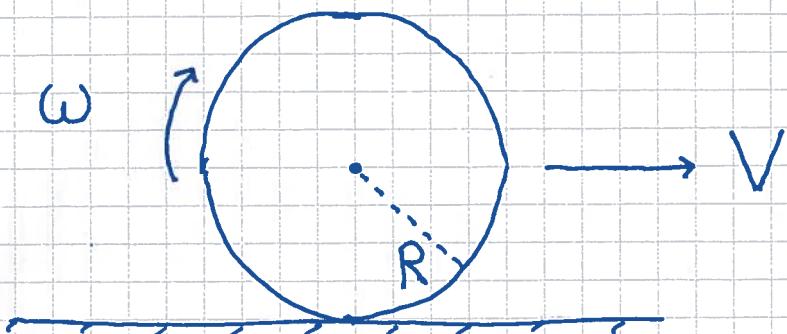


$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\begin{aligned} I &= I_0 + MR^2 \\ &= \frac{7}{5} MR^2 \end{aligned}$$

Ren rulling

[YF 10.3; LL 6.7]



Vå ser uten videre at  $V = \omega R$ :

En hel omdreining tar tiden  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Da har

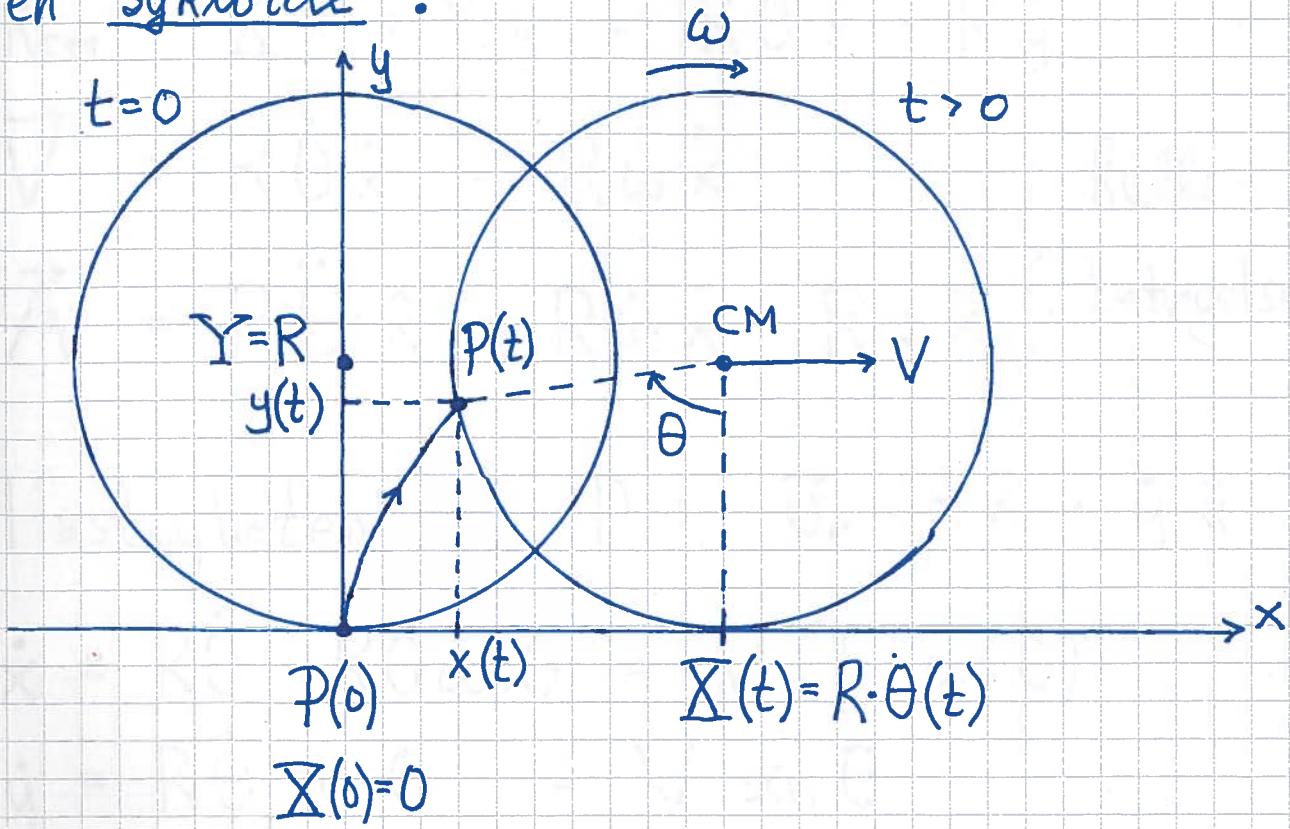
CM (og hele legemet) flyttet seg  $2\pi R$  mot høyre.

Det gir  $V = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$ . Evt: Liten rotasjon  $d\theta = \omega dt$  flytter CM liten lengde  $dx = R d\theta = R \omega dt$ ,

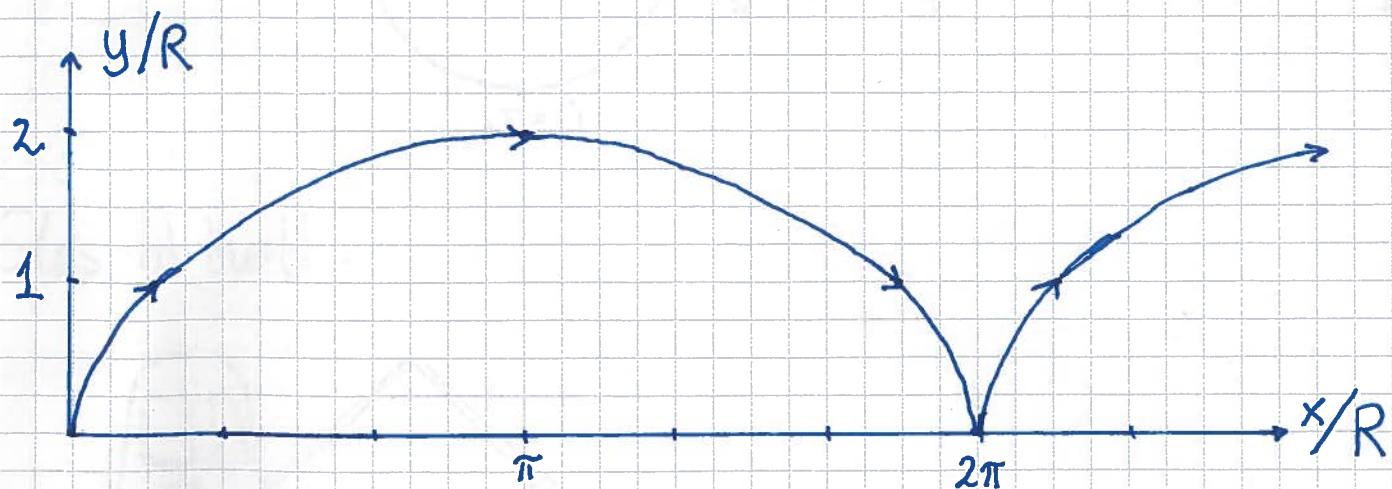
som gir  $V = dx/dt = R\omega$ . Som er rullebetingelsen.

Banen til et punkt P på periferien er  
en sykloide:

(60)



Fra figuren:  $x = X - R \sin \theta = R\theta - R \sin \theta$   
 $y = Y - R \cos \theta = R - R \cos \theta$



Bewegelsen til CM:

$$\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\hat{x} + R\dot{\theta}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = R\dot{\theta}\hat{x} = R\omega\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = R\ddot{\theta}\hat{x} = R\ddot{\omega}\hat{x} = R\alpha\hat{x}$$

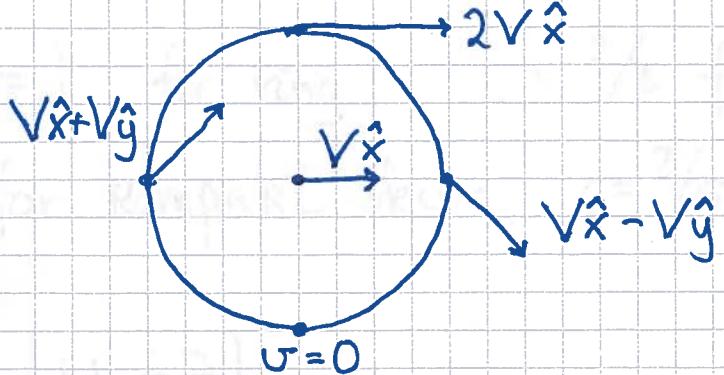
Rulle-

betingelse(r)

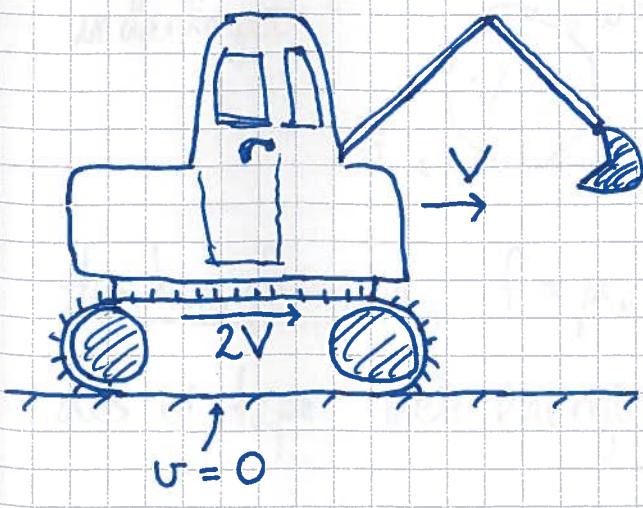
Hastigheten til P:  $\vec{v}_P = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$

$$\dot{x} = R\ddot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$



Gloss-aktuelt:



(62)

Ser at  $v=0$  for  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ,

dvs når P er i kontakt med underlaget.

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{som nevnt s. 36})$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

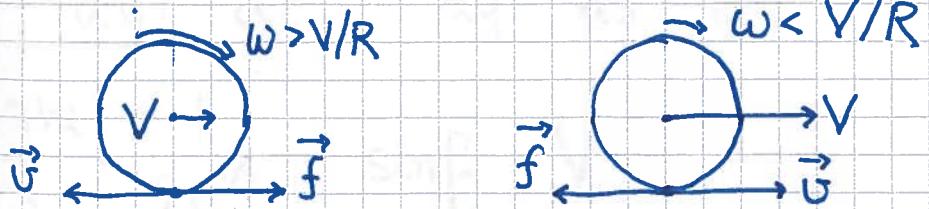
$$\Rightarrow K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$$

med  $c=1$  for ring,  $c=\frac{2}{3}$  for kuleskall,

$c=\frac{1}{2}$  for kompakt skive,  $c=\frac{2}{5}$  for kompakt kule.

### Sluring [LL 6.7]

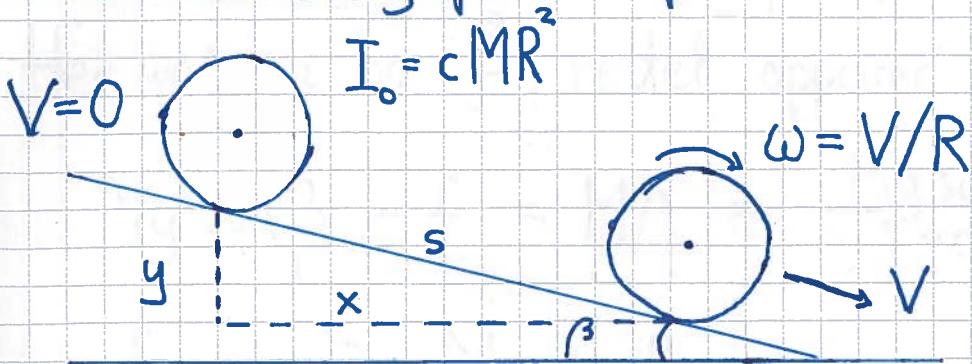
Hvis  $\omega \neq \frac{V}{R}$ , er  $v = V - \omega R \neq 0$ , dvs objektet gir på underlaget:



Har kin. friksjon,  $f = \mu_k N$ , og effekttap,  $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ , dvs vi taper mek. energi pr tidsenhet lik  $|P_f|$ .

# Eks: Ren rulling på skråplan [RF 10.3; LL 6.8]

(63)



Finn  $V$ ,  $A$ , friksjonskraften  $f$ , og minste  $\mu_s$  (evt største  $\beta$ ) som gir ren rulling.

$$\text{Energibehovelse: } Mgy = (1+c) \frac{1}{2} MV^2$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} ; \text{ avertar med økende } c$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul cylinder})$$

Akselerasjon:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2y^{1/2}} \cdot \sin\beta \cdot V$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{\sin\beta}{2y^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} = \frac{g \sin\beta}{1+c}$$

(64)

Uten friksjon er  $F_{\parallel} = Mg \sin \beta$  og  $A\ddot{x} = g \sin \beta$ .

$\Rightarrow$  Her må vi ha  $\vec{f}$ , rettet oppover skråplanet

$$\Rightarrow Mg \sin \beta - f = MA = \frac{Mg \sin \beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

Maksimal statisk friksjon er  $f_{\max} = \mu_s N$ , og  $N = Mg \cos \beta$ . Må derfor, for å ha ren nulling, oppfylle ulikheten  $f \leq f_{\max}$ , dus

$$\frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}, \text{ evt. } \underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}$$

Lab : Krum bane. Ren nulling gir fortsatt energibevarelse og

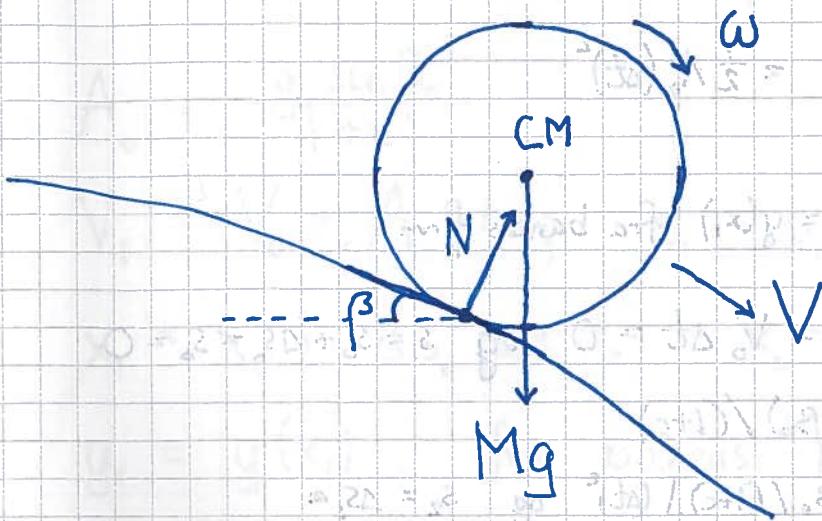
$$A = -\frac{g \sin \beta}{1+c}$$

Tangentelt med banen, men ikke lenger konstant.

Har også akselerasjon normalt på banen,

$$A_{\perp} = V^2/g ; g = [1 + (y')^2]^{3/2} / |y''|$$

slik at normalkraften  $N$  varierer langs banen  $y(x)$ .



$N^2 \perp$  banen gir

$$MA_{\perp} = \pm (Mg \cos \beta - N) ; \begin{array}{l} \text{krumming nedover} \\ \text{oppover} \end{array}$$

dermed  $N$  kan beregnes når  $V$  og  $y(x)$  er kjent. Merk at  $y' = dy/dx = \tan \beta$ .

Målt bevegelse gir  $x(t)$  og  $y(t)$ .

Beregnet / Teoretisk bevegelse fås ved å løse "N<sup>2</sup>" langs banen numerisk, f.eks med Euler-metoden:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t = A \Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V \Delta t$$

Med f.eks.  $t_0 = 0$ ,  $V_0 = V(t_0) = 0$  og  $s_0 = s(t_0) = 0$ :

$$A_0 = \frac{g \sin \beta_0}{1+c}$$

$$V_1 = V_0 + A_0 \Delta t; \quad s_1 = s_0 + V_0 \Delta t;$$

$$x_1 = x_0 + \Delta s_0 \cos \beta_0 = x_0 + V_0 \Delta t \cos \beta_0$$

$y_1 = y(x_1)$ , fra banens kjente form

$$A_1 = \frac{g \sin \beta_1}{1+c}$$

$$V_2 = V_1 + A_1 \Delta t; \quad s_2 = s_1 + V_1 \Delta t;$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_1 \cos \beta_1 = x_1 + (s_2 - s_1) \cos \beta_1$$

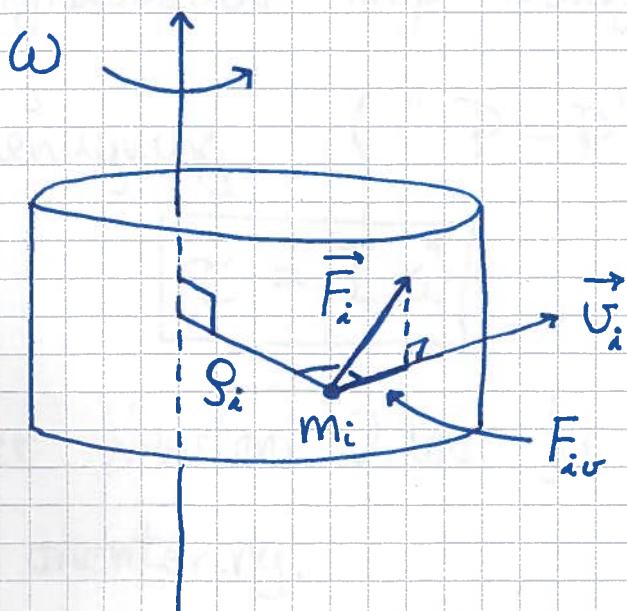
$$y_2 = y(x_2)$$

OSU

# Krefter og rotasjon : Rotasjonsdynamikk

Aks med fast orientering [YF 10.1, 10.2; LL 6.2]

Dette er essensielt et endimensjonalt problem, der vi betrakter rotasjonsdelen av den totale bevegelsen.



$$v_i = s_i \omega$$

$$(\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

$F_{i\sigma}$  = komponent langs  $\vec{v}_i$  av ytre kraft  $\vec{F}_i$  på  $m_i$

"Triles": Vi beregner tilført effekt,

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\sigma} v_i$$

på to måter og sammenligner uttrykkene vi finner.

(1) Bruker  $v_i = s_i \omega$ :

$$P = \left\{ \sum_i F_{i\sigma} s_i \right\} \omega = \tau \omega$$

Her er  $\tau = \sum_i F_{i\sigma} s_i$  = netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft ganget med arm")

(2) Bruker  $\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ :

$$\begin{aligned} P &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i g_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ &= I \omega \dot{\omega} \quad (\text{der } I = \sum_i m_i g_i^2 \text{ er legemets} \\ &\quad \text{treghtsmoment mhp rotasjonsaksen}) \end{aligned}$$

Sammenligning (" $P = P'$ ") gir nå

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon:  $F = m \ddot{x}$

Arbeid utført av dreiemomentet [YF 10.4 ; LL 6.4]

Vi har  $P = \tau \omega = \tau d\varphi/dt$  og  $P = dW/dt$ , som gir

$$\boxed{dW = \tau d\varphi}$$

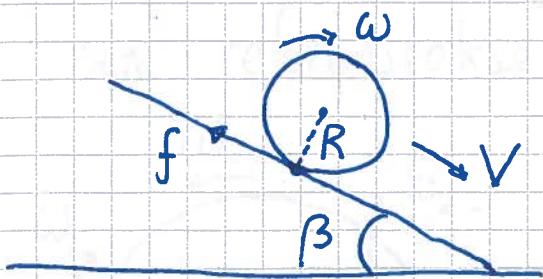
som er arbeid utført av  $\tau$  ved en vinkelendring  $d\varphi$

Jf. arbeid utført av kraft ved translasjon:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Eks 1: Ren rulling på skråplan

(69)



$$\omega = V/R, \quad \dot{\omega} = \ddot{V}/R$$

$$N_2 \text{ langs skråplanet: } Mg \sin \beta - f = M \ddot{V}$$

N<sub>2</sub>, rotasjon om akse gjennom CM (fast orientering):

$$\tau = I_o \dot{\omega}, \quad \text{med } I_o = c \cdot M R^2, \quad \dot{\omega} = \ddot{V}/R \quad \text{og}$$

$\tau = f \cdot R$  (siden  $\vec{N}$  og  $M\vec{g}$  begge har null arm

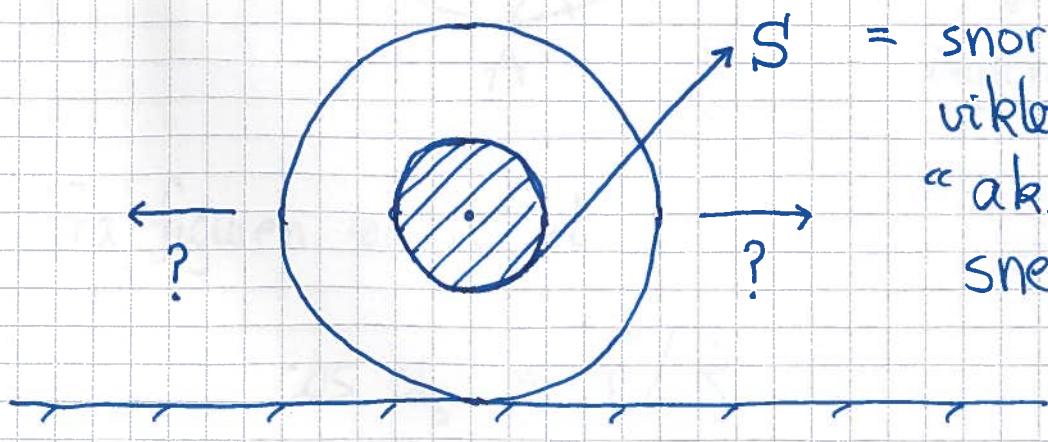
relativt aksen gjennom CM) gir

$$f \cdot R = c M R \ddot{V}, \quad \text{dvs } f = c M \ddot{V}$$

som innsatt i "translasjonslign." gir

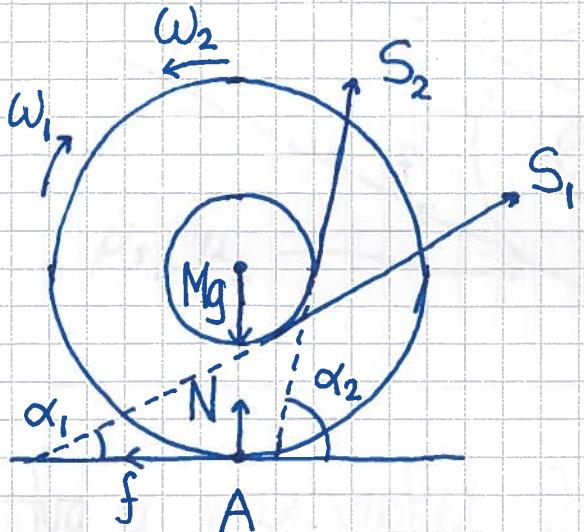
$$Mg \sin \beta - c M \ddot{V} = M \ddot{V}, \quad \text{dvs } \ddot{V} = \frac{g \sin \beta}{1 + c}, \quad \text{som s. 63.}$$

## Eks 2: Rulling mot høyre eller venstre?



$S$  = snordrag i snor  
viklet opp rundt  
"akslingen" på  
snella

"Triks": Velg kontaktlinja mellom snelle og gulv som referanseakse A.

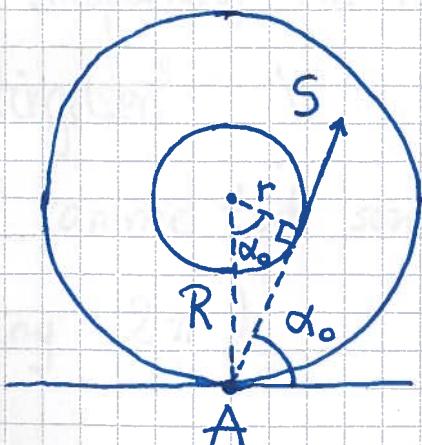


Mg, N og f har alle null  
arm mhp aksen A  
⇒ kun snordrag S har  
dreiemoment mhp aksen A

$S_1$ : liten  $\alpha$ , nulling mot høyre

$S_2$ : stor  $\alpha$ , —— || — venstre

Hvis  $\vec{S}$  går gjennom A, har vi statisk likevekt:



$$\sum \tau_A = 0$$

$$\dot{\omega} = 0$$

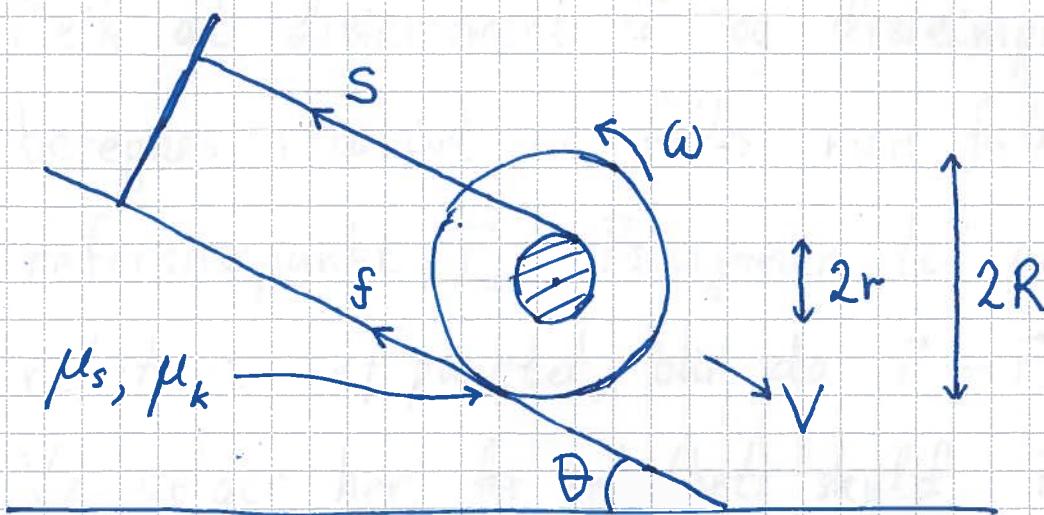
ingen rotasjon

Fra figuren ser vi at

$$\cos \alpha_0 = r/R$$

### Eks 3: Snelle på skråplan (Øv. 6)

(71)



Hva er max vinkel  $\theta_0$  uten at snella slurer "baklengs" nedover?

Tips:  $N_1 \parallel$  skråplanet,  $N_1$  rot. om CM,  $f = f_{\max} = \mu_s N$

Hvis  $\theta > \theta_0$ , hva blir snordraget S og akselerasjonen a?

Tips:  $N_2 \parallel$  skråplanet,  $N_2$  rot. om CM,  $f = \mu_k N$ ,  
og "nølebetingelsen"  $V = \omega r$  (da translasjon  
 $2\pi r$  tar samme tid som én omdreining, dus  
vinkelendring  $2\pi$ ).

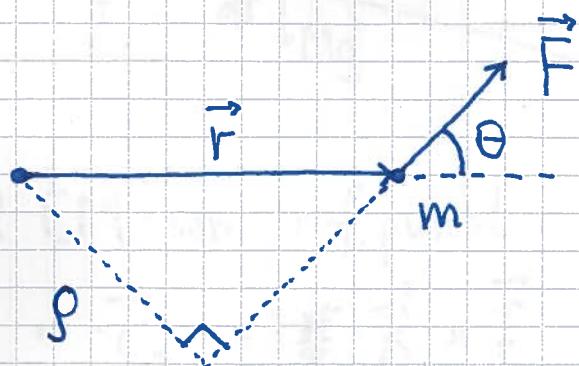
## Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

(72)

Merk at dreiemoment  $\vec{\tau}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  beregnes relativt et felles, men fritt valgt, referansepunkt  $\vec{r}_0$ . Posisjonen til en punktmasse, relativt ref. punktet, blir da  $\vec{r} - \vec{r}_0$ .

Vi velger her, for enkelhets skyld,  $\vec{r}_0 = 0$ .

### Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



Kraftens dreiemoment på m :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

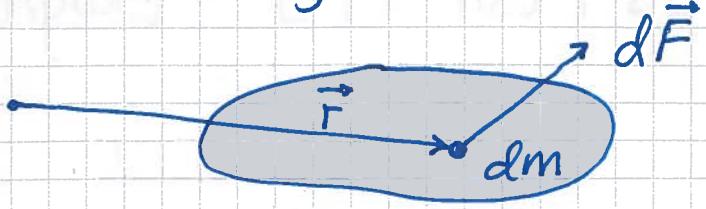
Retning:  $\vec{\tau} \perp \vec{r}$  og  $\vec{F}$ ; her ut av planet

Abs. verdi:  $\tau = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$ ;

som s. 67, "arm  $\times$  kraft".

For partikkelsystem:

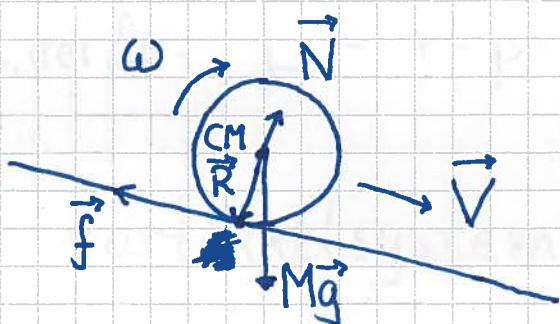
(73)



$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment på systemet}$$

Eks: Rullende kule (se s. 69)



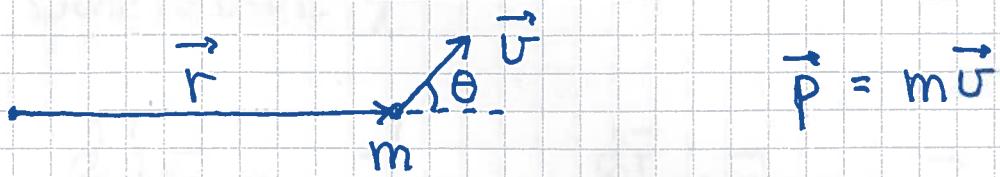
Med CM som ref.punkt:  $\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_g = 0$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \cancel{R} \times \vec{f} = \text{vektor inn i planet,}$   
med abs.verdi  $\tau = R \cdot f$ , da  $\vec{R} \perp \vec{f}$ .

Vå noterer oss at  $\vec{\omega}$  og  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$  her  
også er vektorer inn i planet.

Dreieimpuls

[YF 10.5; LL 6.6]



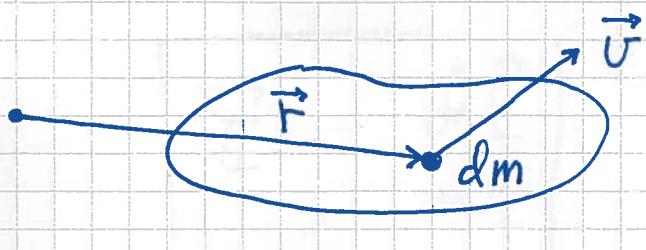
Massens dreieimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Retning:  $\vec{L} \perp \vec{F}$  og  $\vec{p}$  (her: ut av planet)

Abs. verdi:  $L = r \cdot p \cdot \sin \theta$

For partikkelsystem:

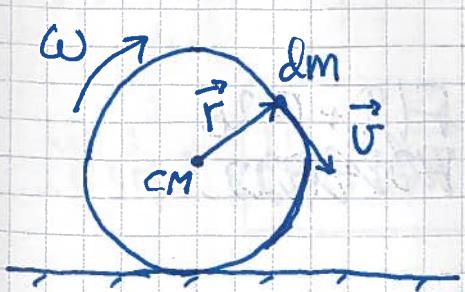


$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \text{systemets totale dreieimpuls}$$

Eks: Rullende ring; CM som ref. punkt



$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} dm = r \cdot v \cdot dm \cdot \hat{\omega}$$

$$= r \cdot r \omega \cdot dm \cdot \hat{\omega} = dm \cdot R^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = MR^2 \vec{\omega} = I_o \vec{\omega}$$

 $\hat{\omega}$  inn i planet

## N2 for rotasjon

[YF 10.5 ; LL 6.6]

(75)

("spinnsatsen")

$$\underline{\frac{d\vec{L}}{dt}} = \frac{d}{dt} \left\{ \vec{F} \times m\vec{v} \right\} = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times (m\vec{a}) \stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

(som generaliseres til partikkelsystem på tilsvarende vis som s. 73 og s. 74)

Altså:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

med

$\vec{\tau}$  = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$  =系统的 totale dreieimpuls

Jf.  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ; N2 for translasjon

Merk:  $\boxed{\text{Hvis } \vec{\tau} = 0, \text{ er } \vec{L} \text{ bevart}}$

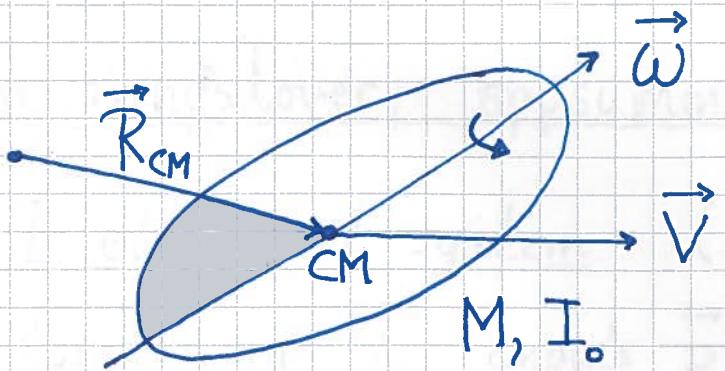
# Total $\vec{L}$ for stift legeme [YF 105; LL 6.6]

76

- Fra def. følger at for punktmasse  $M$  i avstand  $\vec{R}_{CM}$  fra ref.punktet (=origo), og med hastighet  $\vec{V}$ , er  $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$ .
- Eks. side 74 antyder at stift legeme med treghetsmoment  $I_o$  mhp akse gjennom CM, og med vinkelhastighet  $\omega$  om denne aksen, dvs  $\vec{\omega}$  langs samme akse gjennom CM, har dreieimpuls  $\vec{L}_s = I_o \vec{\omega}$  mhp CM.
- Det kan vises (se utlagt notat) at for stift legeme med refleksjonssymmetri (\*) om rotasjonsaksen er total dreieimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_o \vec{\omega}\end{aligned}$$

(\*) Symmetrisk når  $\vec{g} \rightarrow -\vec{g}$



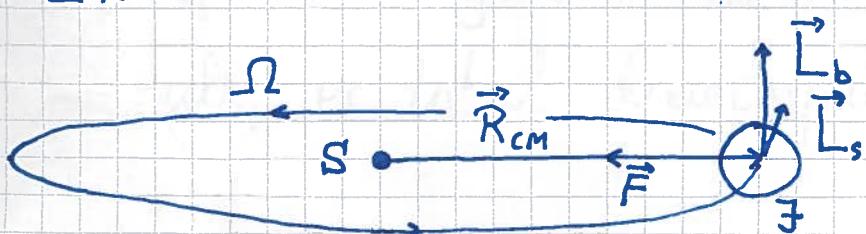
Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

Eks: Jordas  $\vec{L}$  relativt sola



$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

$$\begin{aligned} L_b &= R_{CM} M V = R_{CM}^2 M \Omega \sim (1.5 \cdot 10^8 \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}} \\ &\sim 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Js} \end{aligned}$$

$$L_s = I_0 \omega \approx \frac{1}{3} M R^2 \omega$$

$$\sim \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \sim 6 \cdot 10^{33} \text{ Js}$$

$$\Rightarrow L \approx L_b$$

## Bewaringslover, oppsummert

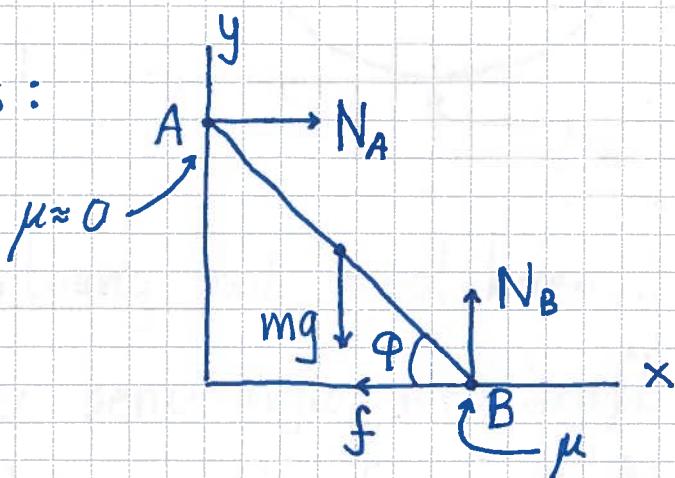
- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi  $E$ , impuls  $\vec{p}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart.
- I et konservativt system er mekanisk energi  $K + U$  bevart.
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls  $\vec{p}$  bevart.
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart.

# Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

(79)

Et stift legeme forblir i ro, med  $\vec{p} = 0$  og  $\vec{L} = 0$ , bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er lik null.

Eks:



Når glir stigen?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \varphi - N_A L \sin \varphi = 0$$

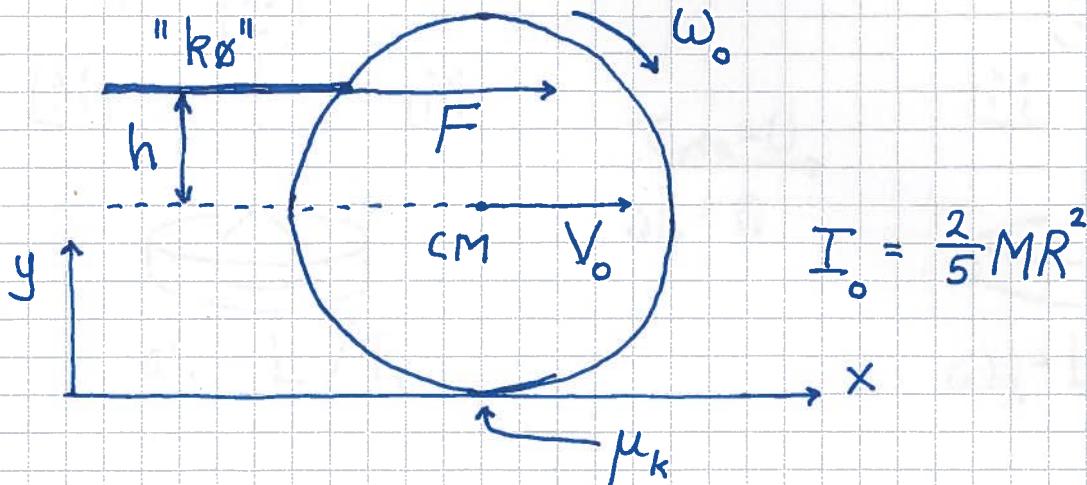
$$f_{\max} = \mu N_B = \mu mg ; \quad f = N_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos \varphi_{\min} = \mu \sin \varphi_{\min} \Rightarrow \tan \varphi_{\min} = \frac{1}{2\mu}$$

$$\text{Hvis } \mu = 0.3, \text{ er } \varphi_{\min} = \arctan \left\{ \frac{1}{0.6} \right\} = 59^\circ$$

# Rotasjonsdynamikk ; eksempler.

Eks 1 : Snooker [LL 6.7 ; Øv. 6]



$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$$

Kortvarig støt med køyen,  $\Delta t \approx 0$ , i høyde  $h$  over senterlinja med kraft  $F \gg f$ ;  $f =$  friksjonskraft fra underlaget.

$$\text{N2, trans. : } F\Delta t = \Delta p = MV_0$$

$$\text{N2, rot. om CM : } \tau \Delta t = Fh\Delta t = \Delta L = I_0\omega_0$$

$\Rightarrow$  Sluring i starten, med mindre  $h = \dots$

Ren rulling etter hvert, uansett  $h$ -verdi.

Med origo som ref. punkt:

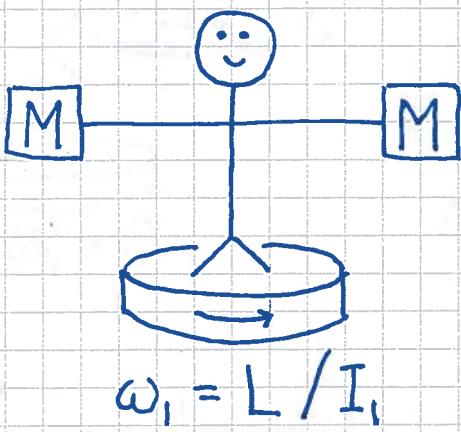
$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times \vec{MV} = -RMV\hat{z} \quad \left. \right\} \text{ved ren rulling}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = -\frac{2}{5}RMV\hat{z} \quad \left. \right\} \text{ved ren rulling}$$

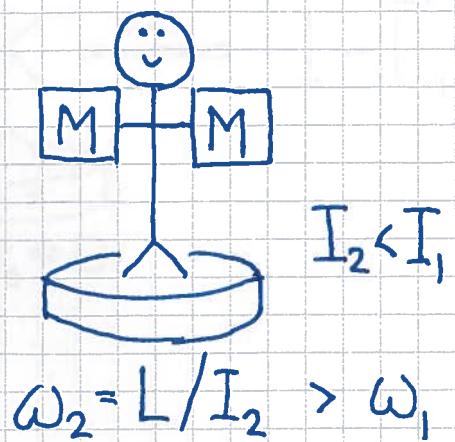
Eks 2 : Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

(81)

Prinsipp : Berart  $L = I\omega$ , redusert  $I$ , økt  $\omega$ .



$$\frac{\Sigma_{y\text{fre}}=0}{\Delta L=0}$$



$$I_2 < I_1$$
$$\omega_2 = L/I_2 > \omega_1$$

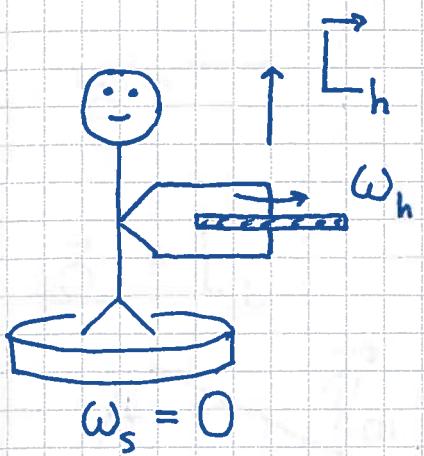
K<sub>rot</sub> øker :

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

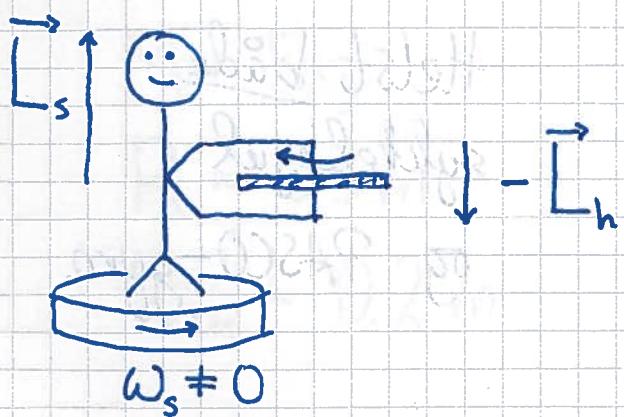
$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \cdot \omega_2 = K_1 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} > K_1$$

Musklene gjør arbeid på de to massene M.

# Eks 3: Student med roterende hjul



$$\frac{\text{Snu hjul}}{\vec{\tau}_{y\text{tre}} = 0} \quad \Delta \vec{L} = 0$$



$\vec{L}$  er bevart.

$$\text{Før: } \vec{L} = \vec{L}_h$$

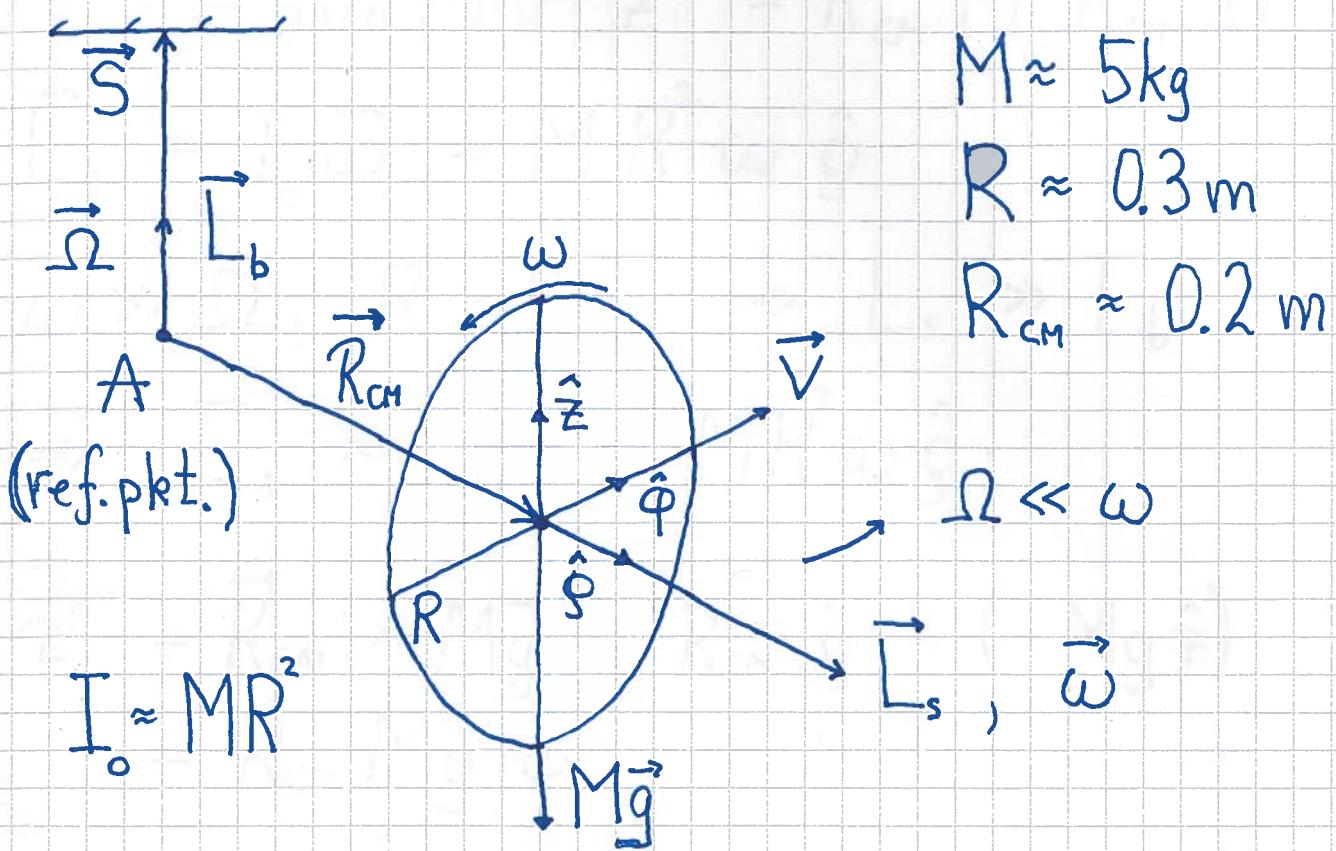
$$\text{Etter: } \vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$$

$$\Rightarrow \omega_s \neq 0$$

# Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]

(83)



$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

Exp:  $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$  når hjulet settes  
i rotasjon for hånd.

Finn sammenheng mellom  $\omega$  og  $\Omega$ .

Løsning: N2 for rotasjon om A.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt$$

med

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} \hat{\vec{g}} \times M\vec{V}\hat{\phi}$$

$$= R_{CM} M\vec{V} \hat{\vec{z}} = R_{CM} M R_{CM} \Omega \hat{\vec{z}}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{\vec{g}}$$

$$\omega \gg \Omega, R \sim R_{CM} \Rightarrow L_s \gg L_b$$

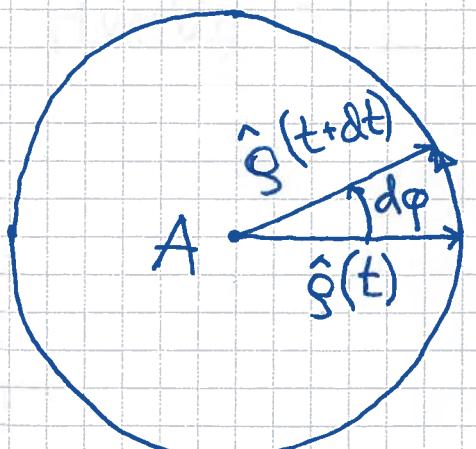
$$\Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{\vec{g}}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} \hat{\vec{g}} \times (-Mg\hat{\vec{z}})$$

$$= R_{CM} Mg \hat{\phi}$$

$$d\vec{L}_A/dt = MR^2 \omega d\hat{\vec{g}}/dt$$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{\vec{g}} = \underbrace{|\hat{\vec{g}}| \cdot d\phi \cdot \hat{\vec{\phi}}}_{=1} = d\phi \hat{\vec{\phi}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\vec{g}}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{\vec{\phi}} = \Omega \cdot \hat{\vec{\phi}}$$

Dermed:

$$R_{CM} M g \hat{\phi} = M R^2 \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \omega = R_{CM} g / R^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{CM} g T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} g T_\Omega}}$$

Tallverdi:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \approx \frac{2^2}{10} = 0.4 \text{ s}$$

dvs ca 2.5 omdreininger pr sekund;

rimelig!

Svingninger

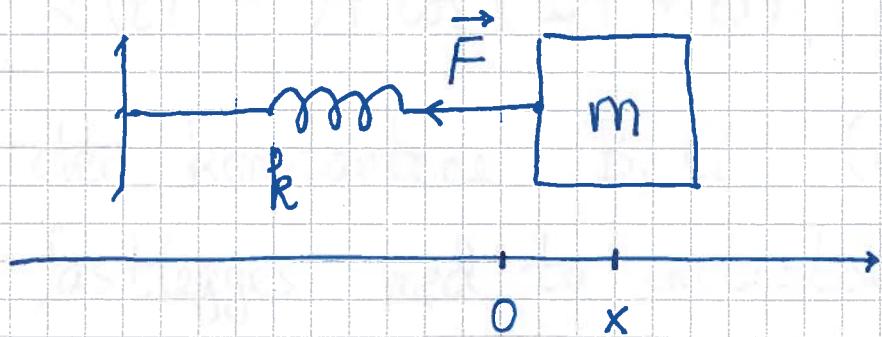
[YF 14; LL 9]

Generelt: Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt. (Eng: "restoring force")

Eks: Masse/fjær. Pendler. Fiolinstreng.

Atomer i molekyler og faste stoffer. Osv.

Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]

Likvekt ( $F=0$ )

når m er i  
posisjon  $x = 0$ .

$x$  = posisjonen til m

= fjeras forlengelse ( $x > 0$ ) eller  
sammenpressing ( $x < 0$ )

$\vec{F}$  = kraft på m fra fjera; retning tilbake  
mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hooke's lov:

87

$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

$k$  = fjærkonstanten

$[k] = N/m$

N2:  $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

som er bevegelsesligning for harmonisk oscillator i 1 D, med løsning

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t, \text{ evt.}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

der konstantene  $B, C$  (evt.  $A, \varphi$ )

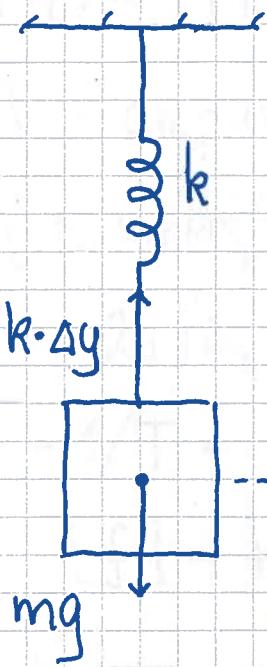
fastlegges med to initialbetingelser,

f.eks.  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$ .

En konstant tilleggskraft forandrer likevektsposisjonen, men gir uendret bevegelsesligning.

Eks: Masse og fær i tyngdefeltet

(88)



Færforlengelse i likevekt,  $\Delta y$ ,  
gitt ved N1:

$$k \cdot \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg / k$$

Anta  $m$  (CM) i  $y = 0$   
i strukket likevekt.

N2 når  $m$  er i posisjon  $y$ :

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

dvs harmoniske svingninger omkring den  
strukkede likevekten

Diverse størrelser (jf. sirkelberegelse) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \text{utsving fra likevekt}$$

$A$  = amplitude = max utsving fra likevekt ;  $[A] = [x]$

$\omega_0$  = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet ;  $[\omega_0] = \frac{1}{s}$

$T = 2\pi/\omega_0$  = periode = tid pr hel svingning ;  $[T] = s$

$f = 1/T$  = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ;  
 $[f] = Hz (= 1/s)$

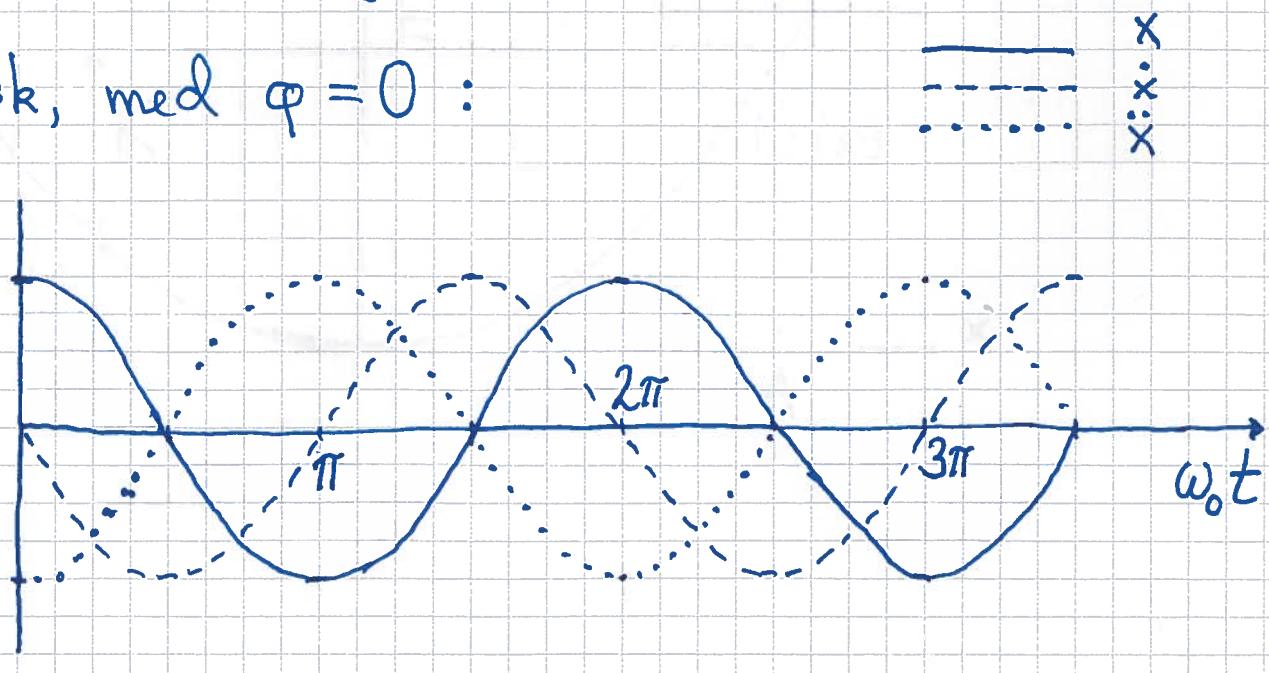
$\omega_0 t + \varphi$  = svingningens fase

$\varphi$  = fasekonstant ;  $[\varphi] = 1$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) \\ &= \text{hastighet}\end{aligned}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) \\ = \text{akselerasjon}$$

Grafisk, med  $\varphi = 0$  :



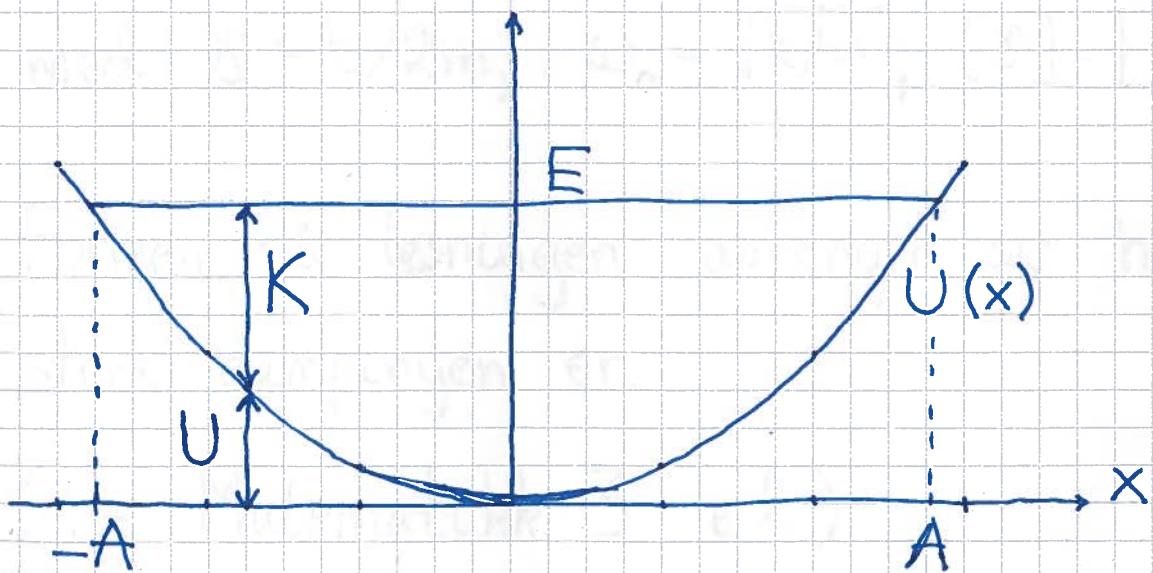
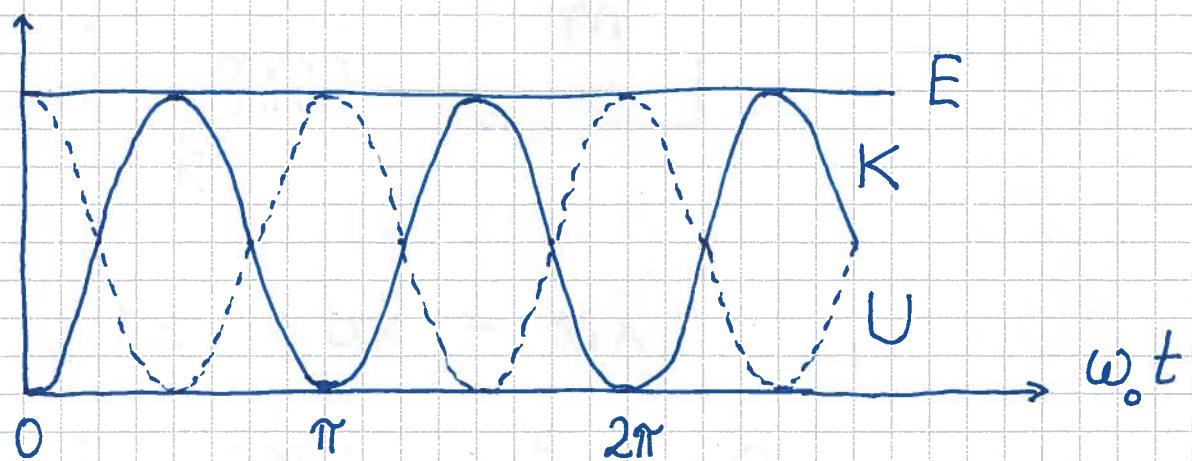
# Energi i en harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4] (90)

Konservativt system  $\Rightarrow$  Mek. energi er bevart

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

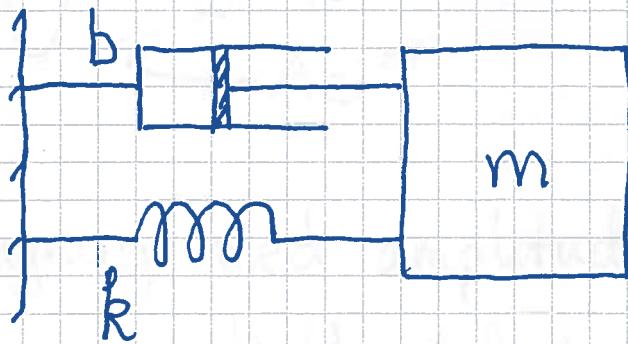
$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{uavh. av } t)$$



# Dempet fri svining [YF 14.7; LL 9.7] (91)

Antar friksjonskraft  $f = -b\dot{x}$ , dvs som ved langsom bevegelse i fluid.

(Alternativ:  $f = -D\dot{x}^2$  eller  $f = \mu_k N$ )



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

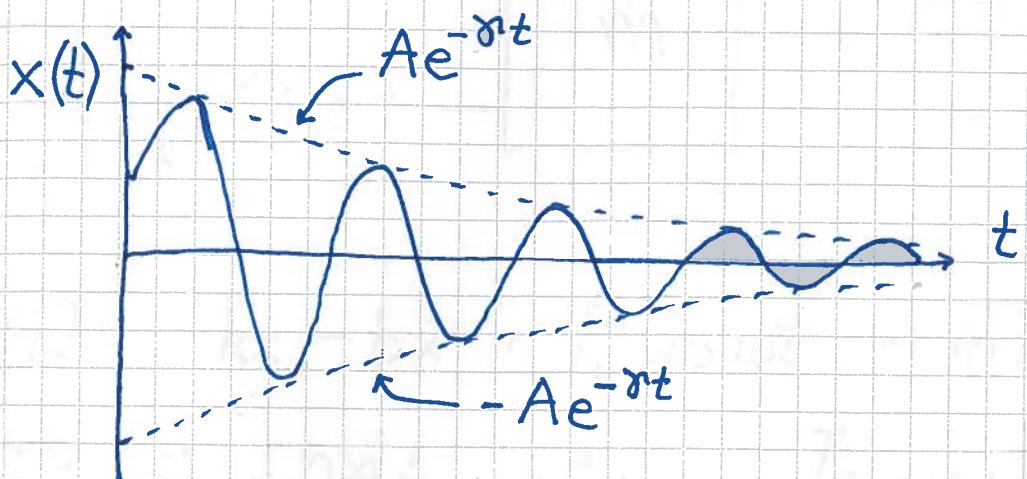
$$\text{med } \gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}; \quad [\gamma] = [\omega_0] = \frac{1}{s}$$

Formen på løsningen avhenger av hvor sterkt dempingen er.

(Se Matematikk 3 e.l.)

Underkritisk (svak) demping ;  $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



dvs svingning med amplituden,  $A e^{-\gamma t}$ , som avtar eksponentielt med  $t$ ; etter en "karakteristisk" tid  $\tau = 1/\gamma$  er amplituden redusert til  $A/e \approx 0.37 A$ .

Overkritisk (sterk) demping ;  $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

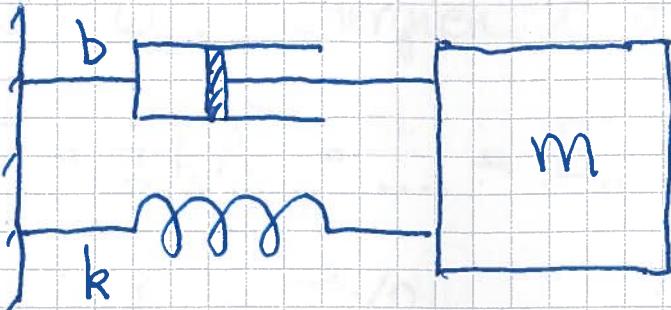
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping,  $\gamma = \omega_0$  ( $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ )

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Minste demping som ikke gir svingninger;  
bra f.eks. i støtdempere.

# Ivungen svingning; resonans [YF 14.8; LL 9.9] (93)



$$F = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\gamma = b/2m, \omega_0 = \sqrt{k/m})$$

Generell løsning:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der "homogen" løsning  $x_h$  oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at  $x_h \sim \exp(-\gamma t) \rightarrow 0$  når  $t \gg 1/\gamma$ . Dvs,  $x_h(t)$  er kun viktig for innsvingningsforløpet.

Antar nå at  $t \gg 1/\gamma$ , slik at

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av  $x_p, \dot{x}_p$  og  $\ddot{x}_p$  i N2 gir

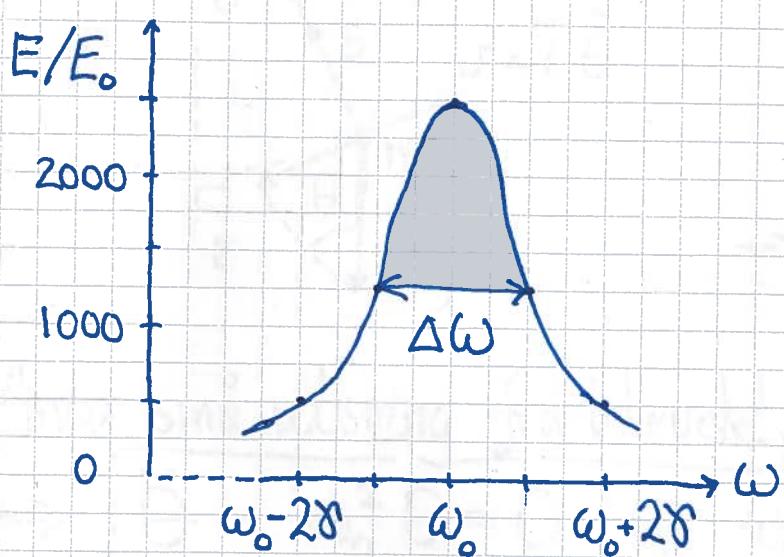
$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: A blir stor hvis  $\gamma \ll \omega_0$  og  $\omega \approx \omega_0$ . Energien i oscillatorer:

(94)

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \dots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

med  $E_0 = F_0^2/2k$ .



Eks:  $\omega_0 = 100 \gamma$

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$E/E_0$
$\omega_0$	2500
$\omega_0 \pm \gamma$	1250
$\omega_0 \pm 2\gamma$	500

Resonanskurvens halverdibredde:  $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Oscillatorens Q-faktor:  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Smal resonanskurve  $\Rightarrow$  Høy Q-faktor

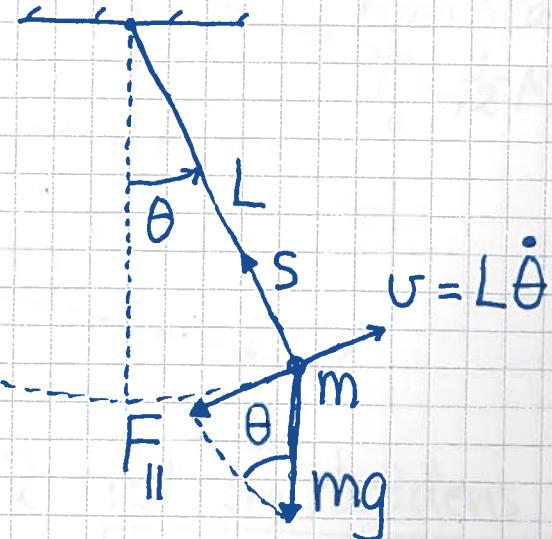
Demo:  $T_0 \approx 0.65 \text{ s}$ ,  $f_0 \approx 1.55 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f \approx 0.15 \text{ Hz}$

$$\Rightarrow Q \approx 10$$

# Pendler

## Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]

Punktmasse  $m$  i masseløs snor med lengde  $L$ .



$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} \text{ med}$$

$$F_{\parallel} = -mg \sin \theta,$$

$$a_{\parallel} = \ddot{v} = L \ddot{\theta}$$

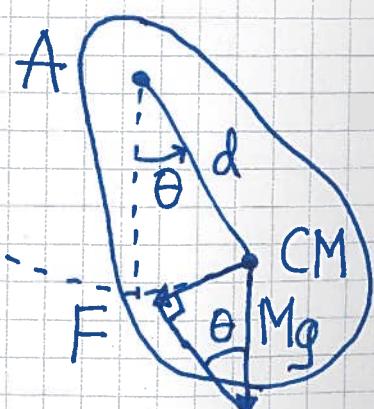
$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

Anta små utsving fra likevekt,  $| \theta | \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

## Fysisk pendel [YF 14.6; LL 9.6]

Stort legeme, masse  $M$ , treghetsmoment  $I$  mhp A.



N2, rotasjon om A:

$$\tau = I \ddot{\theta} \text{ med}$$

$$\tau = -F \cdot d = -Mg d \sin \theta$$

( $\tau > 0$  mot klokka)

Anta  $|\theta| \ll 1 \Rightarrow$

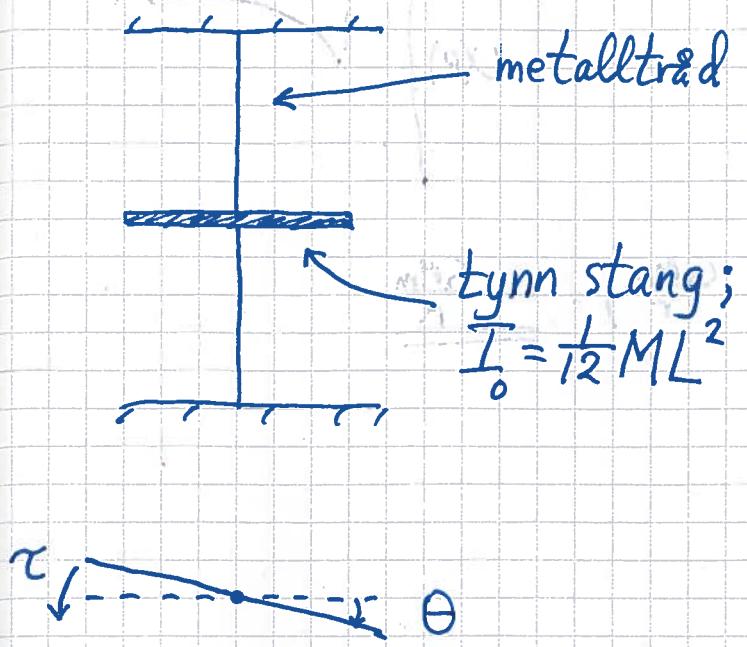
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = Mg d / I$$

( $\Rightarrow \sin \theta = \theta$ )

# Torsjonspendel

[YF 14.4; LL 9.6]

(96)



Vridning vinkel  $\Theta$  av metalltråden gir dreiemoment  $\tau = -J\ddot{\theta}$  på stanga;  $J\ell =$  torsjonsstivheten til metalltråden

N2, rot. om trådens aks:  $\tau = I_o \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = J\ell / I_o$$

Demo:  $M = 50\text{g}$ ,  $L = 11\text{cm}$ ,  $T = 0.8\text{s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J\ell &= I_o \omega_0^2 = \frac{1}{2}ML^2 \cdot (2\pi/T)^2 \\ &= ML^2 \pi^2 / 3T^2 \approx \underline{0.003\text{ Nm}} \end{aligned}$$

# ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Oversikt:

I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer

YF 21-24 ; LHL 19-20

II. Strøm. Likestrømkretser (DC)

YF 25-26 ; LHL 21-22

III. Magnetostatikk. Magnetisme

YF 27 - 28 ; LHL 23, 26

IV. Elektromagnetisk induksjon.

Vekselstrømkretser (AC)

YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27

# I. Elektrostatikk [YF 21-24; LHL 19-20]

## Elektrisk ladning [YF 21.1; LHL 19.1]

Materie er molekyler og atomer.

Atom = kjerne + elektroner

Kjerne = protoner + nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkelen = 3 kvarker

Elementærpartikler = naturens udelelige byggeklosser, med kvantisert elektrisk ladning (evt. elektrisk nøytrale). Eksempler:

<u>Partikkelen</u>	<u>(Symbol)</u>	<u>Ladning</u>
Elektron	(e)	- e
Opp-kvark	(u)	+ 2e/3
Ned-kvark	(d)	- e/3
Elektron-nøytrino	( $\nu_e$ )	0
Foton	( $\gamma$ )	0
OSU.		

(17 elementærpartikler i "Standardmodellen")

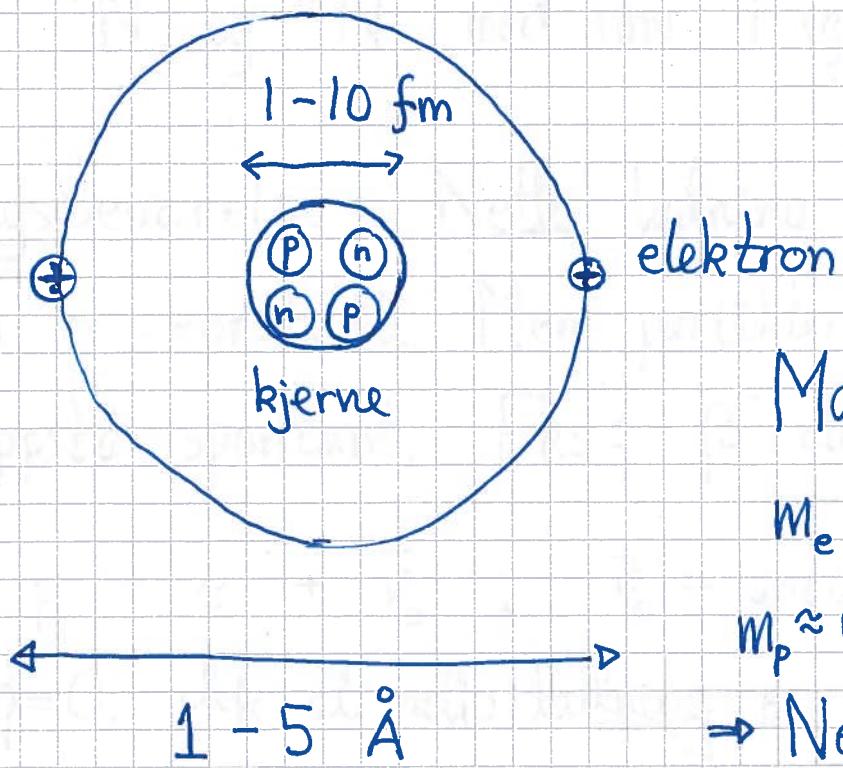
$e = \text{elementærladningen}$ , påvist av  
 Robert Millikan (1909; Nobelpriis 1923)  
 med små oljedråper, med ladning  $q = N \cdot e$   
 $(N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Nøytronet ( $n$ ) :  $1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$

Protonet ( $p$ ) :  $2u + 1d \Rightarrow q_p = e$

Symbol for ladning :  $q, Q$

Klassisk bilde av atom: (Niels Bohr, 1913)  
 NP 1922



Masser :

$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$\Rightarrow$  Nesten all masse

i kjernen.

$$1 \text{ \AA} (\text{\AAngstr\o m}) = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \quad (f = \text{femto})$$

Nøytralt atom, atomnummer  $Z$ :

(100)

$Z$  protoner,  $Z$  elektroner;  $Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$

Ioner: Atomer eller molekyler med  $Q \neq 0$

Eks:  $N^{3-}$  = nitrogenatom med 10 elektroner;  
 $Z = 7$ ;  $q = -3e$

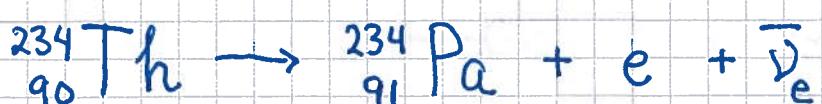
$N_2^+$  = nitrogenmolekyl med 13 elektroner;  
 $q = +e$

Isotoper: Varianter av grunnstoff med ulikt antall nøytroner i kjernen.

Eks:  $^{14}N$  og  $^{15}N$  med hhv 7 og 8 nøytroner

Ladningsbevarelse: Netto ladning i et isolert system er konstant. Men partikler med ladning kan oppstå spontant. Eks:  $\beta^-$  decay.

$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ ;  $\bar{\nu}_e$  = antielektronnøytrino med  $q=0$ , slik at netto ladning er vendret. Eks:

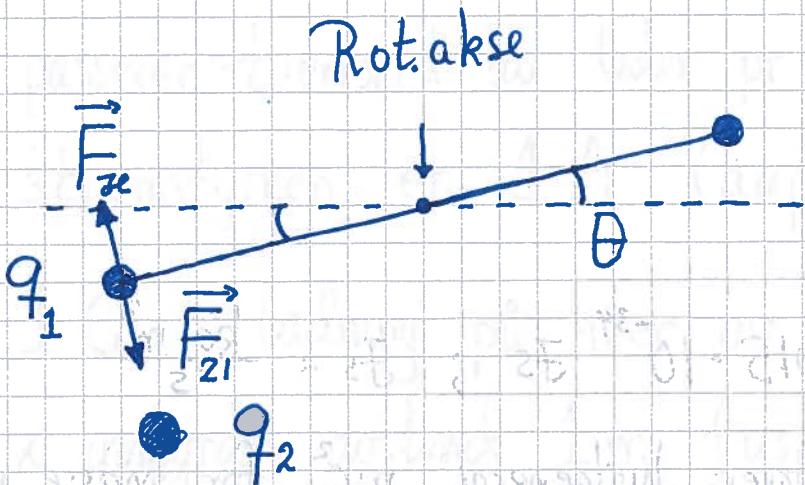


(Halveringstid  $t_{1/2} \approx 24$  døgn)

# Coulombs lov [YF 21.3; LHL 19.3]

(101)

G. A. de Coulomb, exp. ca 1785:



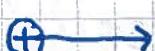
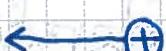
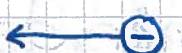
Torsjonspendel,  
sett ovenfra  
(se s. 96)

$$F_x = \frac{\tau}{L/2} = \frac{2\tau\theta}{L}$$

Coulomb fant  $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{21} = K_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

- Samme form som Newtons gravitasjonslov
- Oppfyller Newtons 3. lov;  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Tiltrekning mellom ulike typer ladning; frastøtning mellom samme type ladning:



## Enhet for ladning [YF 21.3 ; LHL 19.1] 102

- $1 \text{ C}$  (coulomb) =  $1 \text{ A} \cdot \text{s}$  = mengde ladning som passerer tverrsnitt av ledere pr sekund når strømstyrken er  $1 \text{ A}$  (ampere)
- $1 \text{ C}$  = ladning på hver av to like legemer som, i innbyrdes avstand  $1 \text{ m}$ , frastøter hverandre med kraft  $8.987551787\ldots \cdot 10^9 \text{ N}$ . Dermed:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2, \text{ med}$$
$$\epsilon_0 = 8.854187817\ldots \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$
$$= \text{vakuumpermittiviteten}$$

- $e = 1.602176621\ldots \cdot 10^{-19} \text{ C}$   
 $\approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

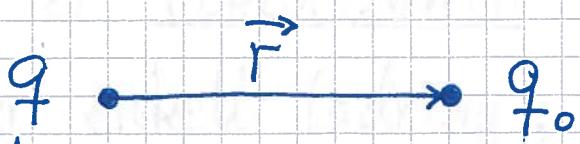
- Etter redefinisjon av SI-grunnenhetene kg, A, K og mol (2018 - 2019) :

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}; 1 \text{ s} = 9192631770 \text{ perioder av stråling pga overgang mellom "hyperfinsplittede" nivåer i } {}^{133}\text{Cs}$$

# Elektrisk felt [YF 21.3-5 ; LHL 19.3-5]

(103)



Referanseladning

Testladning

Kraft fra  $q$  på  $q_0$ :

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Elektrisk felt  $\stackrel{\text{def}}{=}$  El. kraft pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0 ; [E] = N/C}$$

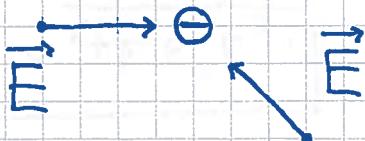
En punktladning  $q$  "omgir seg" derfor med et el. felt  $\vec{E}$ , som i avstand  $\vec{r}$  er

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

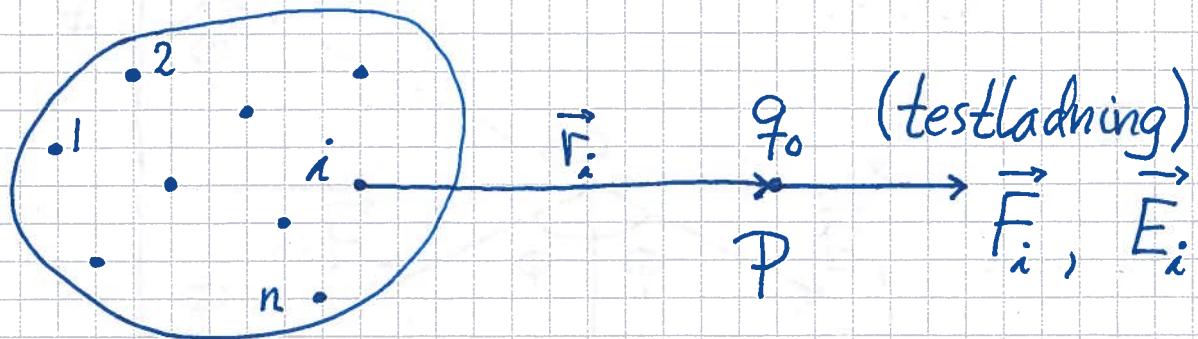
Radiet bort fra pos. ladn.:



Radiet inn mot neg. ladn. :



Total kraft og totalt felt fra flere ladninger er vektorsummen av bidragene fra hver enkelt ladning; dette kalles superposisjonsprinsippet ("SPP").



Ref. ladninger

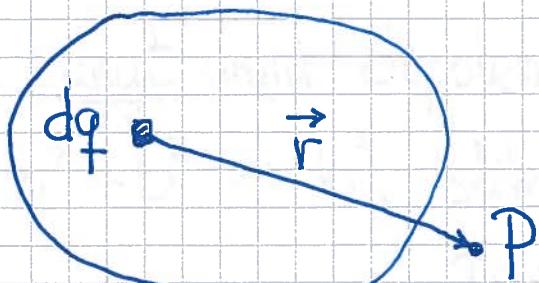
$$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0 \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2 q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \sum_i \vec{E}_i$$

= el. felt i posisjon P fra ref. ladn.  $\{q_1, \dots, q_n\}$

Hvis kontinuerlig fordeling av ref. ladn.:

$$q_i \rightarrow dq ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$



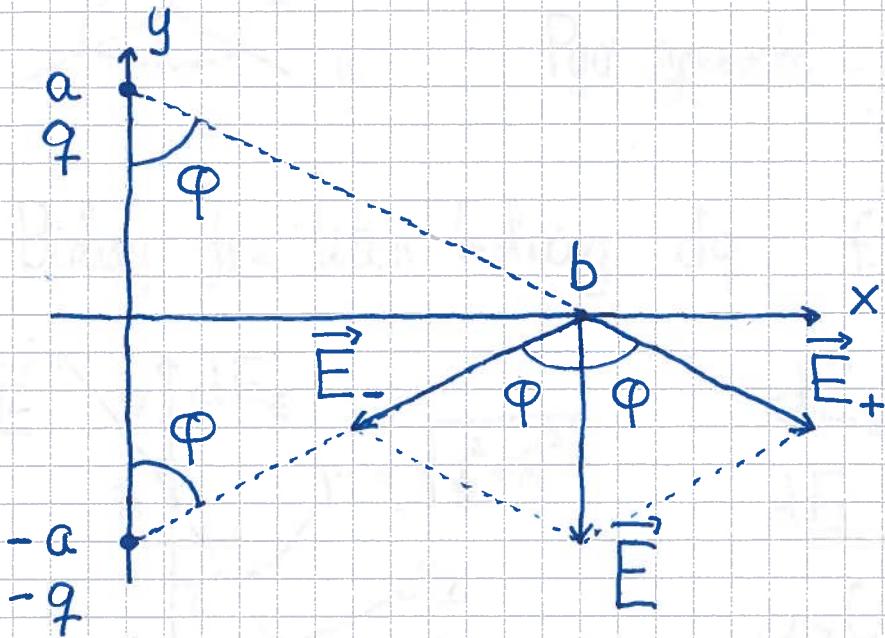
El. felt i pos. P:

$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

# Eks 1: Elektrisk dipol

Punktladn.  $\pm q$  i  $y = \pm a$ .

Hva er  $\vec{E}$  i  $x = b$  (på x-aksen)?



Figur / symmetribetraktnig gir

$$\vec{E} = -\hat{y}E; \quad E = 2E_+ \cos\varphi \quad (E_- = E_+)$$

$$E_+ = q / 4\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2); \quad \cos\varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa / (a^2 + b^2)^{3/2} 4\pi\epsilon_0$$

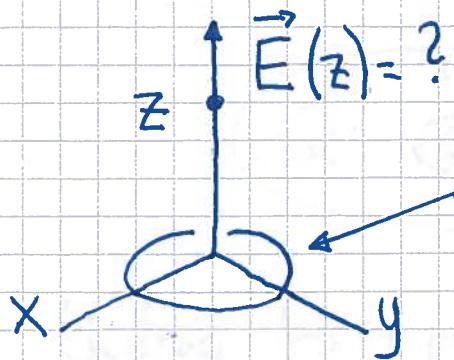
Langt unna dipolen, dvs  $b \gg a$ , kan vi sette

$$a^2 + b^2 \approx b^2, \text{ slik at}$$

$$E(b) \approx \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 b^3}; \quad \text{dvs } E \text{ går raskere mot null enn for en punktladn.}$$

## Eks 2: Feint ladet ring

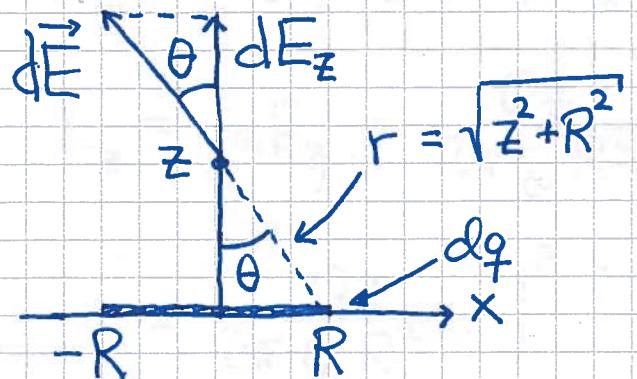
106



Radius  $R$ , ladning  $Q$

$$\text{Pga symmetri: } \vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$$

Bidrag fra liten ladning  $dq$ , f.eks. på  $x$ -aksen:



$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\cos \theta = z/r$$

$$\Rightarrow E_z(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \underline{\underline{\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}}}$$

Rimelig svar: Riktig enhet;  $E_z(0) = 0$ ;

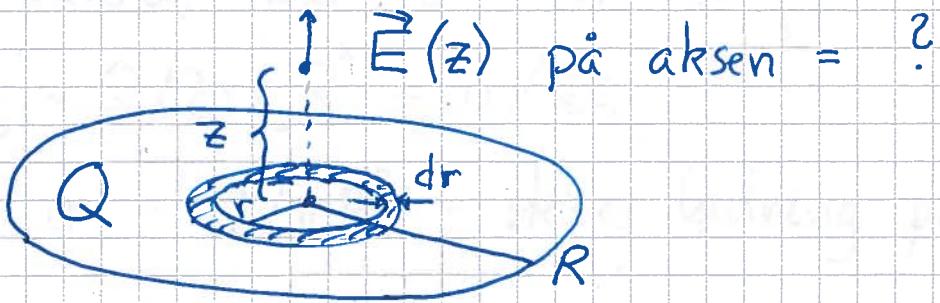
$E_z(-z) = -E_z(z)$ ; dessuten er

$$E_z(z) \approx Q / 4\pi\epsilon_0 z^2 \text{ når } z \gg R$$

OK; ringen ser da ut som punktladning  
 $Q$  i origo!

### Eks 3: Feunt ladet skive

(107)



Bidrag fra tynn ring, radius  $r$ , bredde  $dr$ , ladning

$$dq = Q \cdot dA/A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2 \text{ er}$$

$$dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}, \text{ slik at}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ - (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right\}$$

Rimelig svar: Langt unna skiva er  $z \gg R$

$$\Rightarrow (1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2$$

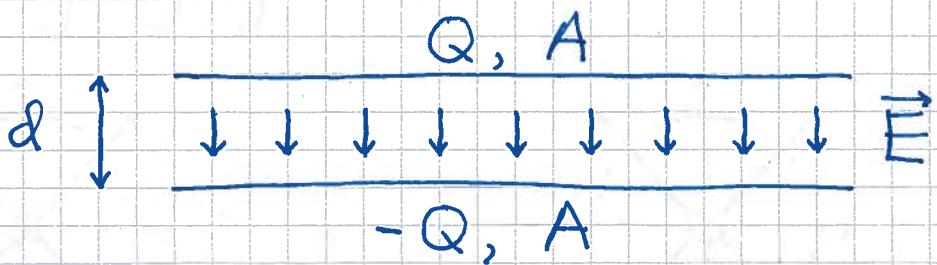
$\Rightarrow E_z \approx Q / 4\pi\epsilon_0 z^2$ , som er felet i avstand  $z$  fra punktladning  $Q$  i origo.

När skiva, när  $z \ll R$ , er

$$E_z \approx Q / 2\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma / 2\epsilon_0$$

med  $\sigma = Q / \pi R^2$  = skivas ladning pr flateenhet.

Nyttig resultat: En mye brukte kretskomponent er parallelplatekondensatoren, som er to parallele metallplater som kan tilføres like stor ladning med motsatt fortegn,  $\pm Q$  (med f.eks. et batteri) :



Med listen plateavstand  $d$  blir

$$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = Q/A)$$

mellan platene, mens

$$E \approx 0$$

utenfor platene.

## Feltlinjer for $\vec{E}$ [YF 21.6; LHL 19.6]

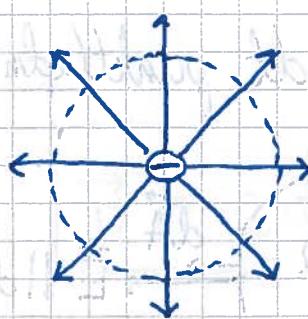
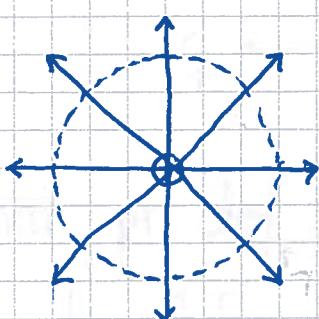
(109)

Visuelt bilde av  $\vec{E}$  i området omkring ladningen ( $e$ ). Retning:  $\vec{E} \parallel$  feltlinjene.

Feltstyrke:  $E = |\vec{E}|$  er prop. med antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet.

Eks 1: Punktladning

Feltlinjene starter/slutter på positiv/negativ ladning og går radielt utover/innover.



Anta  $N$  feltlinjer ut/inn gjennom kuleflate med radius  $r$ , areal  $4\pi r^2$ .

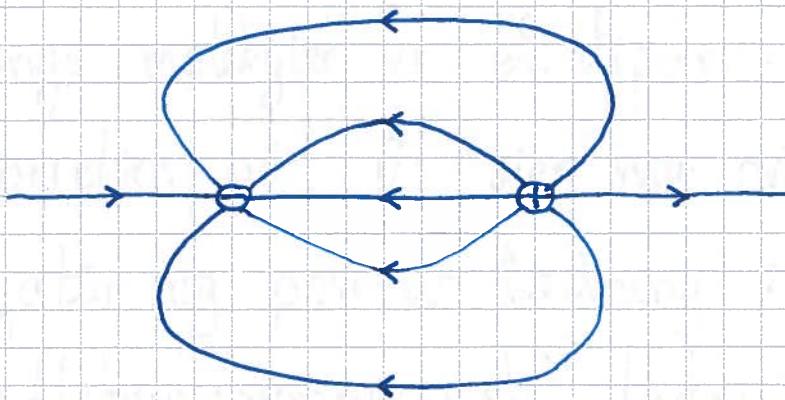
$$\text{Feltlinjetetthet på kuleflaten: } \frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2}$$

$$\text{Feltstyrke } \xrightarrow{\parallel} : E = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

$\Rightarrow E$  og  $N/A$  avtar begge som  $1/r^2$

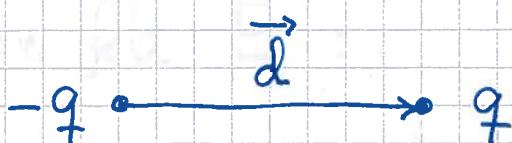
$\Rightarrow E$  er prop. med  $N/A$ , som antatt

## Eks 2: Elektrisk dipol



Elektrisk dipolmoment [YF 21.7 ; LHL 19.10]

En enkel dipol,

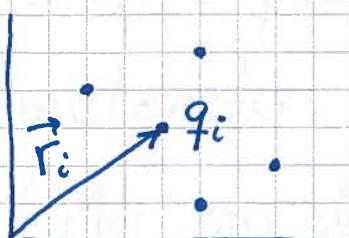


har pr def dipolmoment

$$\vec{p} = q \vec{d}$$

med SI-enhet C·m.

Generelt, for system med flere punktladninger :



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

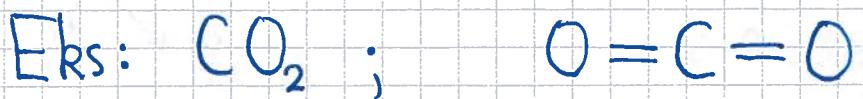
Med kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq$$

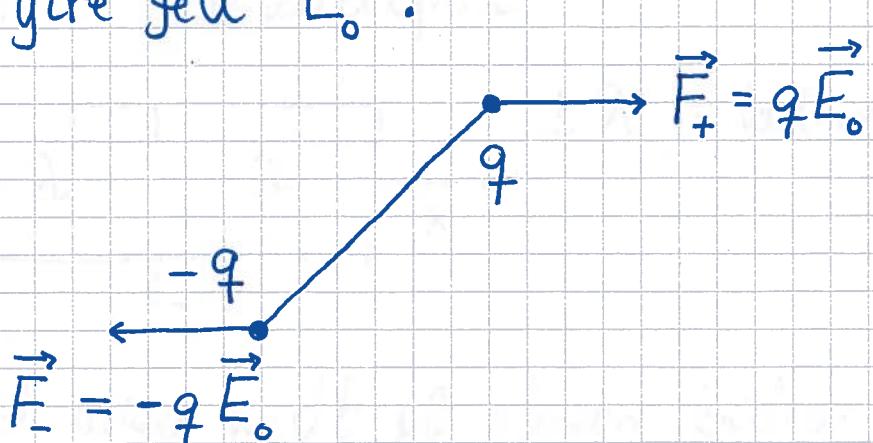
NB: Netto ladning = 0 for elektrisk dipol!

## Anwendelser :

- Mange molekyler er el. dipoler:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$  etc.  
Størrelsen på  $|\vec{p}|$  sier noe om fordelingen av negativ og positiv ladning i molekylet.  
"Refleksjonssymmetrisk" ladningsfordeling mhp et punkt i molekylet gir  $p=0$ .

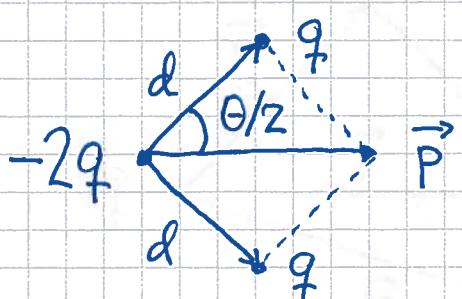
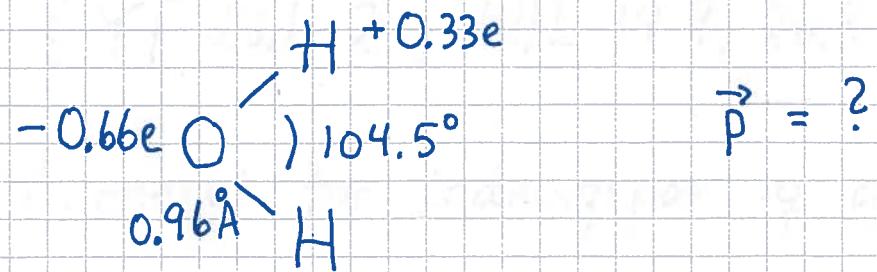


- Molekulære dipoler rettes inn langs et ytre felt  $\vec{E}_0$ :



Stoffet polaniseres. Viktig for å skjønne materialers elektriske egenskaper.  
(Mer om det senere.)

# Eks 1: Punktladningsmodell for $\text{H}_2\text{O}$



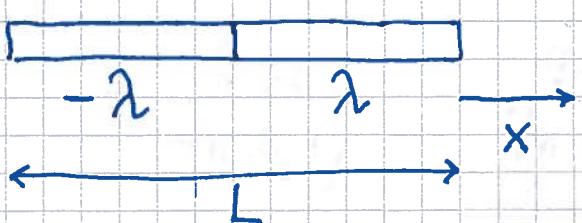
Med  $-2q$  i origo:

$$p = 2q d \cos \theta/2$$

$$= 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{\AA} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= \underline{\underline{0.39 \text{ e\AA}}} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Gm}$$

# Eks 2: Stavdipol



$\pm \lambda$  = ladning pr lengdeenhet

Med origo midt på staven bidrar ladningsparet

$$\pm dq = \pm \lambda \cdot dx \quad i \text{ posisjon } \pm x \text{ med}$$

dipolmoment  $d\vec{p} = 2x \lambda dx \hat{x}$ . Totalt dipolmoment blir

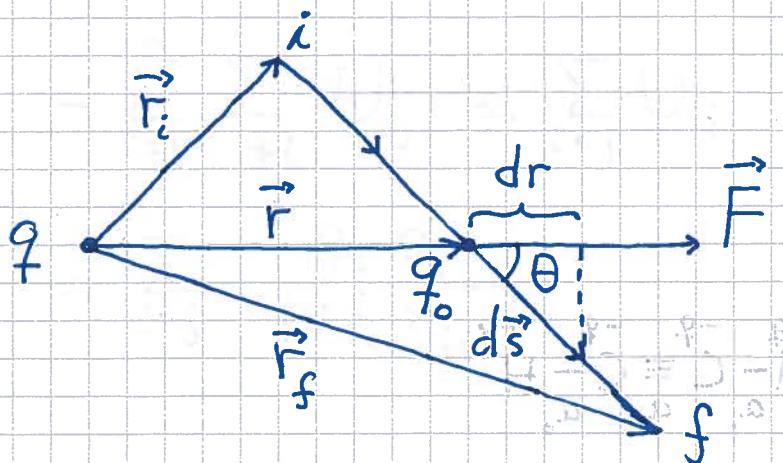
$$\vec{P} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} 2x \lambda dx \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

[Rimelig?  $[\lambda L^2] = \text{G} \cdot \text{m}$ ; som punktladn.  $\pm \lambda \cdot L/2$  i innbyrdes avstand  $L/2$ ; OK!]

# Potensiell energi. Elektrisk potensial

[YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi for ladningspar  $q$  og  $q_0$ :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U = U_f - U_i &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r_f} - \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r_i}\end{aligned}$$

Her naturlig å velge  $U = 0$  for  $r \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r}$$

for ladn. par  $q, q_0$  i innbyrdes  
avstand  $r$

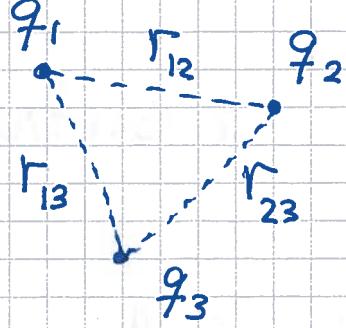
Flere ladninger : Alle  $q_i$  og  $q_j$

vekselvirker parvis ; med  $U_{ij} = 0$  for  $r_{ij} \rightarrow \infty$ :

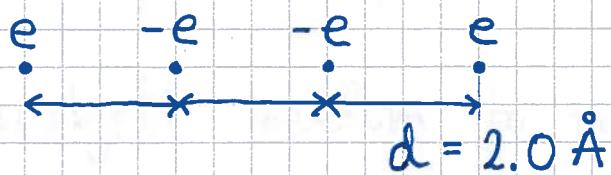
$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{23} + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} U_{ij} = \sum_{i < j} U_{ij}$$

$$= \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$$



Eks: Beregn  $U$  for systemet



Lösn: 6 ladn. par bidrar

$$U = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \left\{ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{(-1)}{2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} \right\}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \cdot \left( -\frac{5}{3} \right)$$

$$\approx -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{3 \cdot 2.0 \cdot 10^{-10}} \quad J = \underline{-1.9 \cdot 10^{-18} \quad J}$$

[Ser at 1 J er en stor energi på atomært nivå...!]

Elektrisk potensial  $\stackrel{\text{def}}{=}$  pot.energi pr ladningsenhet

(115)

$$\Rightarrow V = \frac{U}{q_0} ; [V] = \text{J/C} = \text{V (volt)}$$

For ladn. par  $q, q_0$  i innbyrdes avstand  $r$

$$\text{er } U = qq_0 / 4\pi\epsilon_0 r.$$

En punktladning  $q$  omgir seg derfor med potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Goulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner  $f$  og  $a$ :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^f \vec{E}_{q_0} \cdot d\vec{s} = - \int_a^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

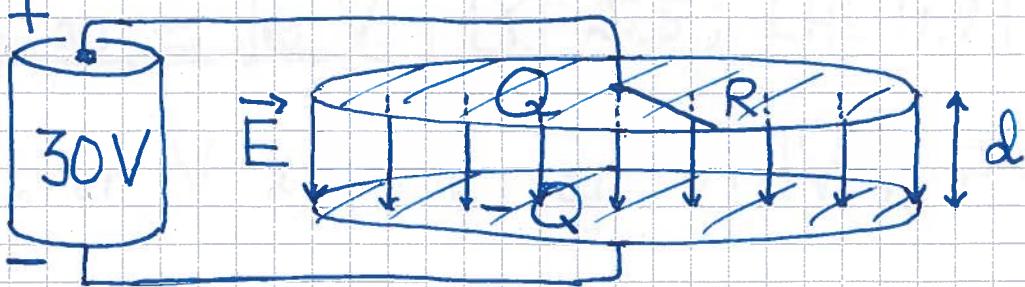
dvs

$$V_f - V_a = - \int_a^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Ser da at  $[E] = \text{V/m}$  (mer brukt enn  $\text{N/C}$ )

- Energienheten  $eV$  (elektronvolt) = elementærladningen  $e$  gange med 1 V, dvs  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Hensiktsmessig med eV på atomær skala.

Eks:



Platekondensator,  $d = 2.0 \text{ mm}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $\Delta V = 30 \text{ V}$ .

Finn ladningen  $\pm Q$  på metallplatene

Løsn: Fra s. 108 er  $E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$

mellom platene ( $E=0$  utenfor).

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{+}^{-} E \cdot ds = E \cdot d$$

$$= Q \cdot d / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow Q = \Delta V \cdot A \epsilon_0 / d = 30 \text{ V} \cdot \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2 \cdot$$

$$8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} / 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 4.2 \cdot 10^{-9} \text{ C} = \underline{\underline{4.2 \text{ nC}}}$$

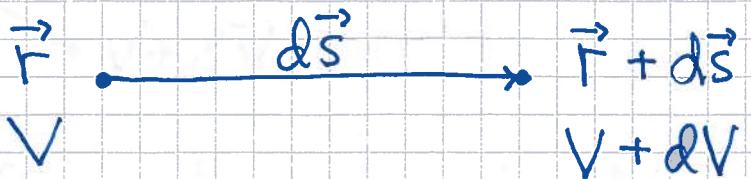
$$(V \cdot m^2 \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{J} \cdot \text{m}} \cdot \frac{1}{m} = \text{C} ; \text{OK})$$

Siden  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ , peker  $\vec{E}$  i retning lavere potensial. Vet fra før at  $\vec{E}$  går fra  $+Q$  mot  $-Q$ . Følgelig høyere potensial på plate med pos. ladn. enn  $\underline{\underline{+}}$   $\underline{\underline{-}}$  neg.  $\underline{\underline{-}}$

## Beregning av $\vec{E}$ fra $V$ [YF 23.5; LHL 19.9]

117

Hvis pot. er  $V$  i pos.  $\vec{r}$  og  $V+dV$  i  $\vec{r} + d\vec{s}$ ,



så kan pot. endringen  $dV$  uttrykkes slik:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{et "totaltdifferensial")}$$

$$= \left\{ \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \cdot \left\{ \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right\}$$

$$= \nabla V \cdot d\vec{s}$$

(gradienten til  $V$ ) (veilelement)

Samtidig er  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ .

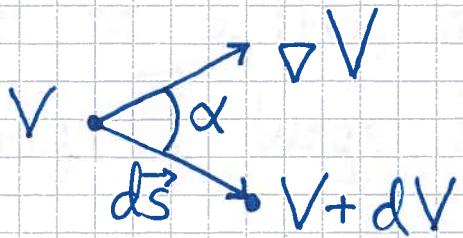
Dermed må vi ha:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

(Siden  $\vec{E} = \vec{F}/q_0$  og  $V = U/q_0$ , har vi også  $\vec{F} = -\nabla U$ )

# Huordan tolke vektoren $\nabla V$ ?

118



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

$\Rightarrow$  Vi får maksimal pot. endring  $dV$  dersom forflytningen  $d\vec{s}$  er i samme retning som  $\nabla V$ . (Da er  $\alpha=0$  og  $\cos \alpha=1$ )

Med andre ord:

$\nabla V$  er en vektor som peker i den retningen som  $V$  øker raskest, med absoluttverdi lik endringen i  $V$  pr lengdeenhet.

Og  $|\nabla V|$  er lik den elektriske feltstyrken  $|\vec{E}|$  på det aktuelle stedet.

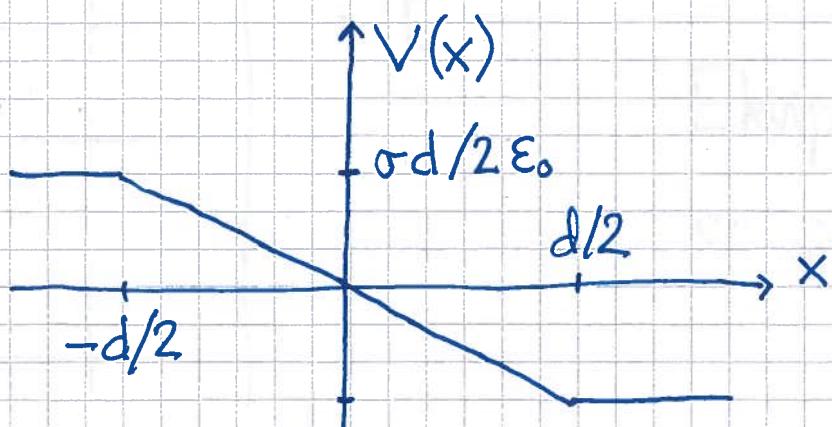
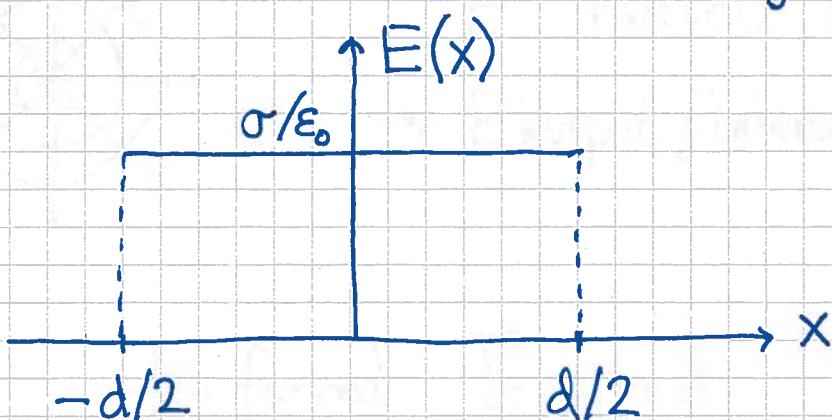
Eks: Finn uttrykk for  $\vec{E}(x)$  og  $V(x)$  i eks. på s. 116, og skissér  $E(x)$  og  $V(x)$ .

Velg  $\vec{E}$  langs  $\hat{x}$  og  $x=0$  midt mellom platene.

Løsn: Mellom platene er  $|\vec{E}| = Q/A\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$ , slik at  $\vec{E} = \hat{x}\sigma/\epsilon_0$  (uavh. av  $x$ ). Med  $\vec{E} = -\nabla V = \hat{x}\sigma/\epsilon_0$  er  $dV/dx = -\sigma/\epsilon_0$ , slik at  $V(x) = \boxed{-\sigma x/\epsilon_0}$  ~~+~~

Skisser:

(for  $|x| < d/2$ )



der vi valgte  $V_+ = V(-d/2) = \boxed{\sigma d/2\epsilon_0}$

# Ekvipotensialflater [YF 23.4; LHL 19.11]

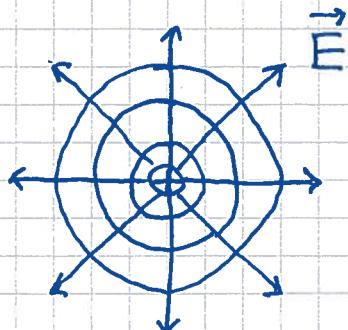
(20)

= flater med konstant potensial  $V$

Hvis  $d\vec{s}$  er forflytning på en ekvipot. flate,  
er  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ , dvs  $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}$$

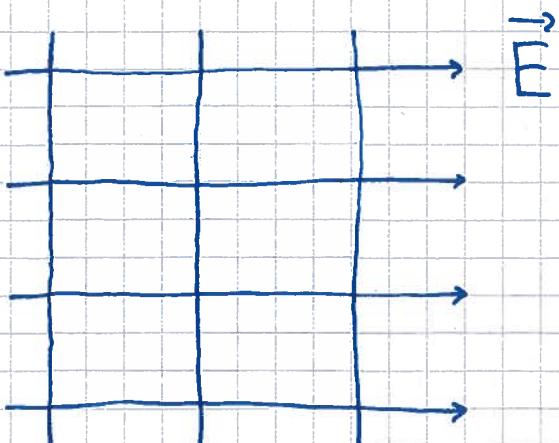
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$  radieelt rettet

$\Rightarrow$  Ekvipot. flatene er kuleskall

Eks 2: Uniformt  $\vec{E}$ -felt



Ekvipot. flatene

er plan

$\perp \vec{E}$

$$V_0 \quad V_0 + \Delta V \quad V_0 + 2\Delta V$$

(her med  $\Delta V < 0$ )

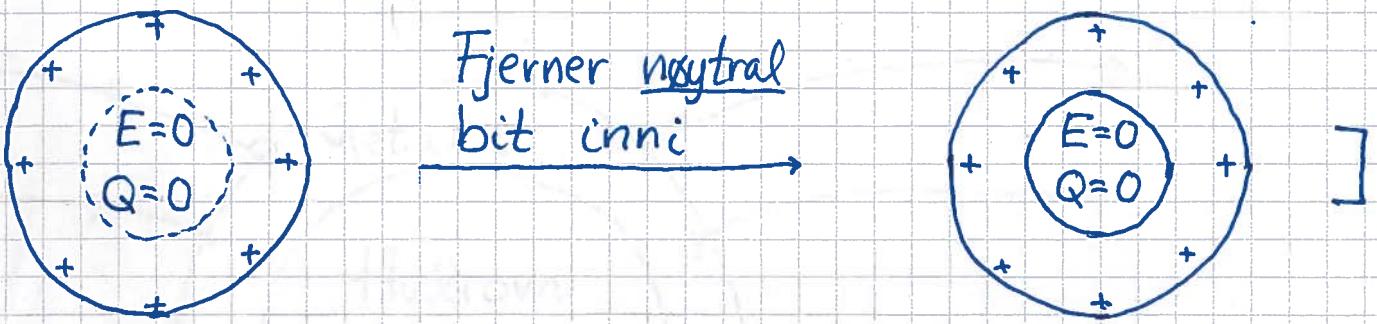
# Materialers elektriske egenskaper

Ledere [YF 22.5 ; LHL 19.8]

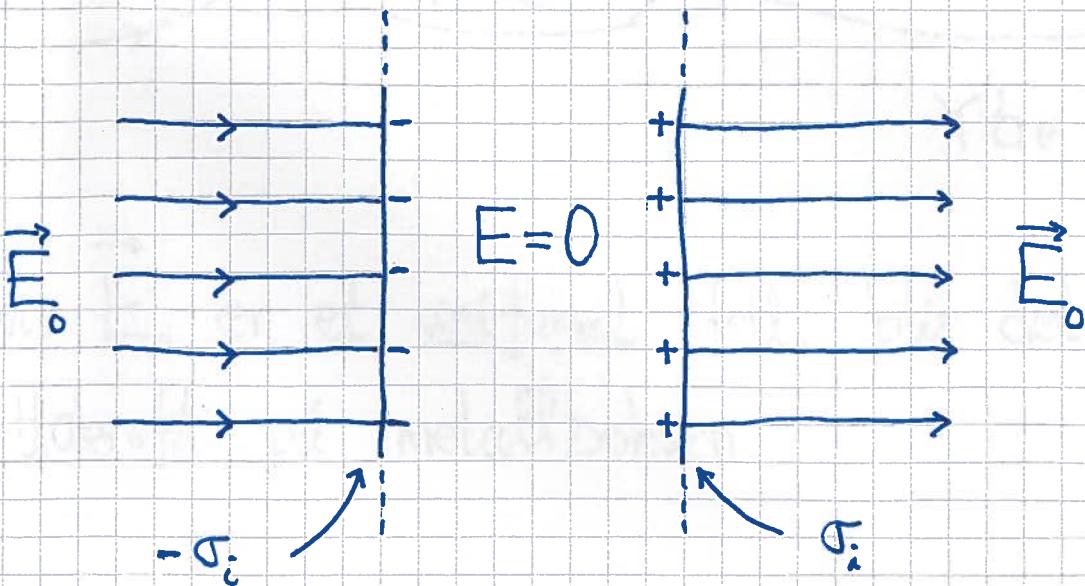
Metaller har frie elektroner (typisk 1-2 pr atom) som vil flytte seg hvis de utsettes for en nettokraft. Konsekvenser, i elektrostatisk likevekt:

- $\vec{E} = 0$  inni et metall  
[ $\vec{E} \neq 0$  gir kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$  på frie elektroner; dvs ikke likevekt]
  - Netto ladning ligger på overflaten av et metall  
[pga at  $F(r) \sim 1/r^2$  og Gauss' lov; ikke pensum]
  - På overflaten:  $\vec{E} \perp$  overflaten  
[ $E_{||} \neq 0$  gir kraft  $F_{||} = -eE_{||}$  på frie elektroner]
- $$E_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \sigma = \text{overflateladn. pr flateenhet}$$

- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial  
 $[dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0]$ ; inni er  $\vec{E} = 0$ , på overflaten  
 er  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ ]
- Metall med hulrom:  $E = 0$  i hulrommet,  
 all nettoladning på gtre overflate  
 [Bevis: Ingen ladningsmessig forskjell på  
 kompakt metallbit og metallbit med hulrom!]



Eks: Metallskive i uniformt ytre felt  $\vec{E}_0$



I likevekt er  $E = 0$  inni metallet.

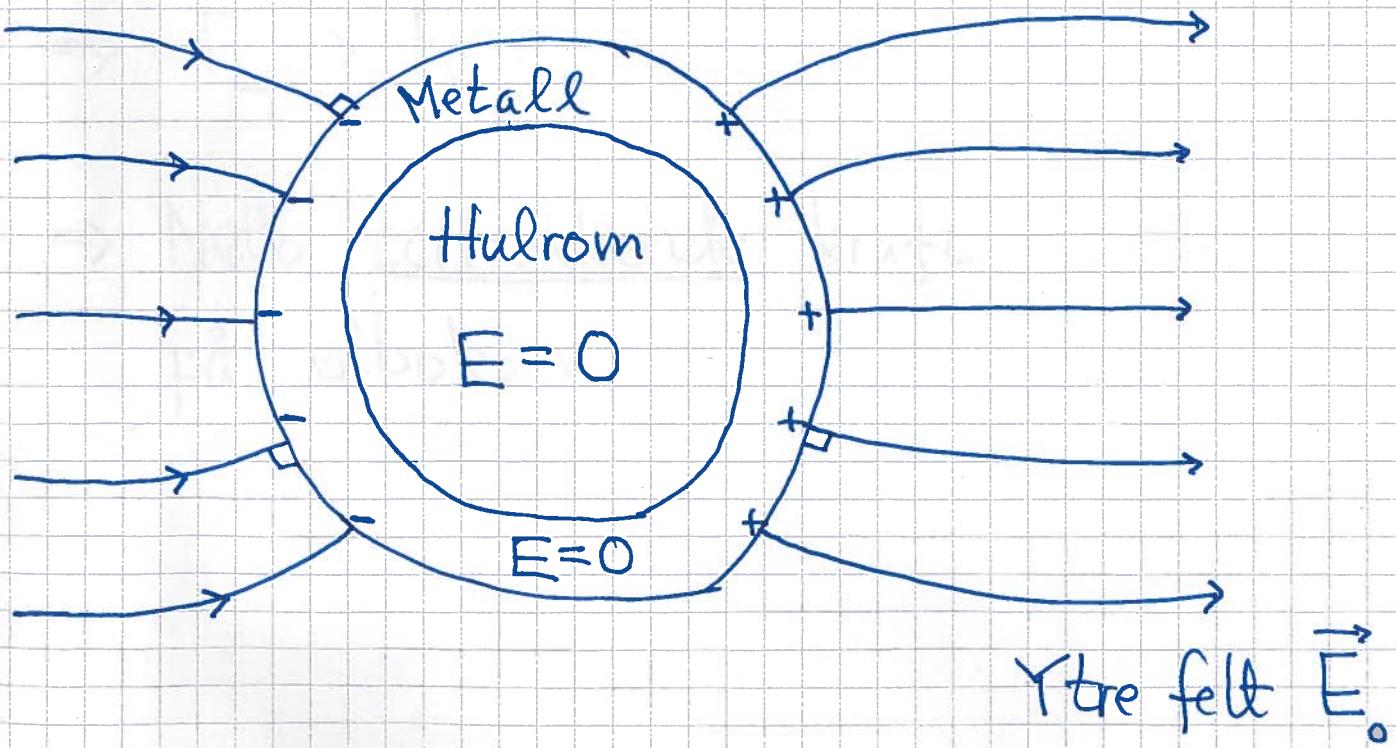
Oppnås med indusert overflatedladning  $\pm \sigma_i$ ,

med  $\sigma_i = \epsilon_0 E_0$ . Gir indusert felt

$$\vec{E}_i = -\vec{E}_0 \text{ og totalt felt } \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$$

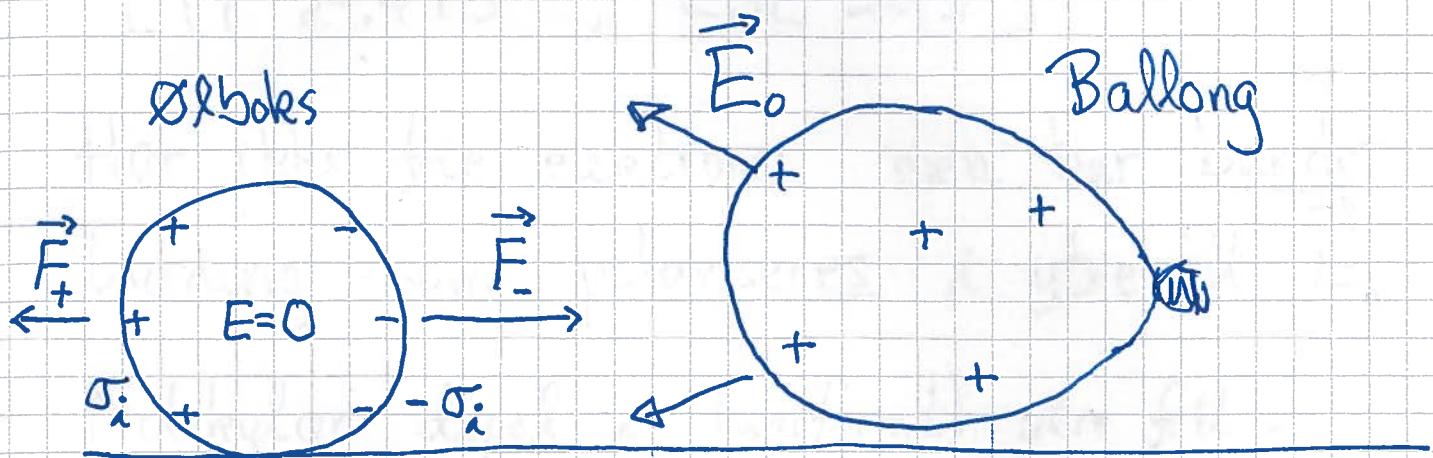
inni metallet.

Eks: Faradaybur (elektrostatisk skjerming)



Hvis  $\vec{E}_0$  er et uniformt felt, blir det ingen nettkraft på metallboksen.

# Eks: Metallboks i inhomogent felt



Kortest avstand mellom ballong og negativ indusert ladning

$$\Rightarrow F_- > F_+$$

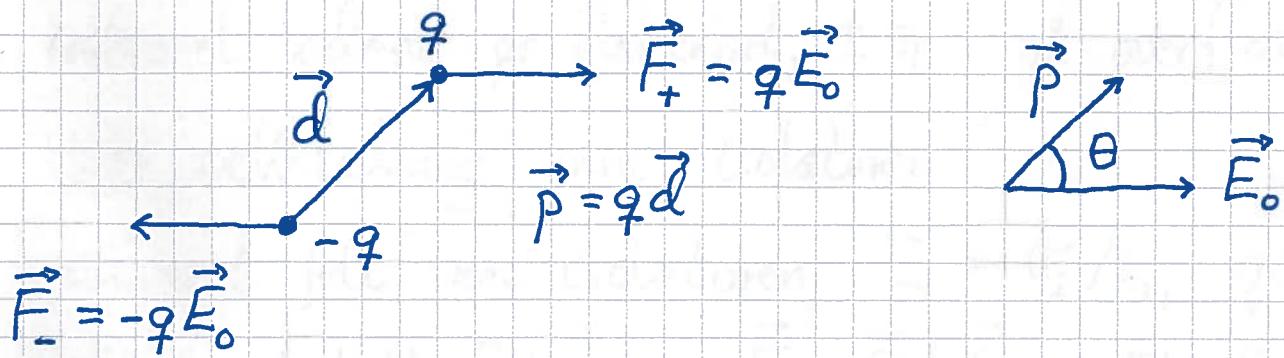
$\Rightarrow$  Netto tiltrekkende kraft på ølboksen.

# Dielektrikum (isolator)

[YF 24.4+5 ; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som polariseres i ytre felt  $\vec{E}_0$ .

Molekylær dipol i (uniformt) ytre felt:



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \dots \text{giving } \vec{\tau}_{...} = \vec{P} \times \vec{E}_0$$

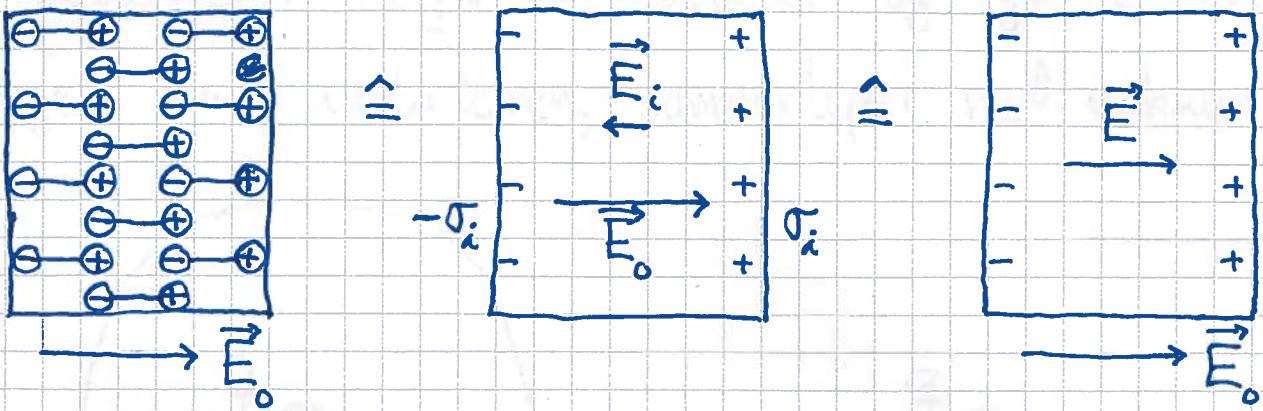
Dipolens pot. energi :

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \dots = - \vec{P} \cdot \vec{E}_0$$

(med valget  $U=0$  for  $\theta = \pm \pi/2$ )

dvs: tendens til innretting av molekylære dipoler langs ytre felt  $\vec{E}_0$

# Netto makroskopisk effekt:



- indusert ladning pr flateenhet,  $\pm \sigma_i$ , på overflaten
- null nettolading inni isolatoren
- indusert felt inni isolatoren,  $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$ , gir sveleket totalt felt inni,  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ ,  $E = E_0 - E_i$
- vi antar lineær respons:  $E_i$  prop. med  $E_0$ , og dermed  $E$  prop. med  $E_0$ .
- isolatorens relative permittivitet  $\epsilon_r$ :

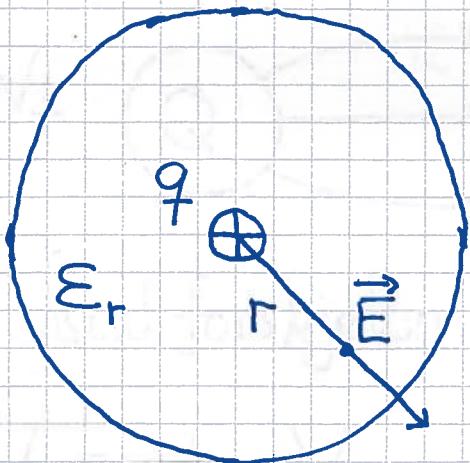
$$\epsilon_r = E_0 / E, \text{ dus } E = E_0 / \epsilon_r \quad (\epsilon_r \geq 1)$$

noen tallverdier:

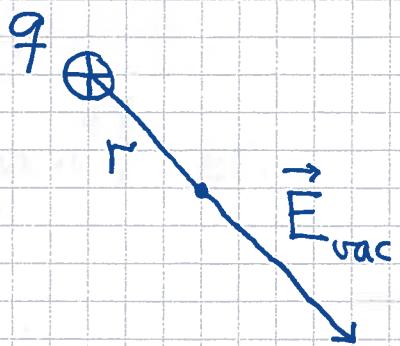
Stoff	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
$\epsilon_r$	1	1.00054	2 - 6	80	$\infty$

- isolatorens permittivitet:  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

- en ladning  $q$  plassert inni en isolator polariserer omgivende isolator og gir et svekket felt inni isolatoren, sammenlignet med vakuum:

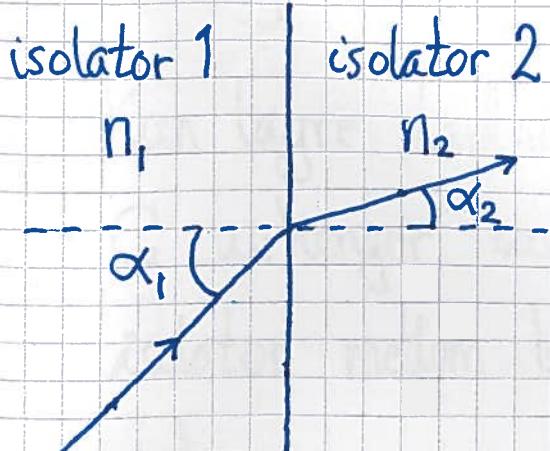


$$\begin{aligned} E(r) &= q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2 \\ &= q / 4\pi \epsilon r^2 \end{aligned}$$



$$E_{vac}(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

- lysfarten i en isolator:  $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$   
( $c = 299792458 \text{ m/s}$  = lysfarten i vakuum)
- lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$$n = \sqrt{\epsilon_r} = \text{brytingsindeks}$$

Snells lov:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Rødt lys:  $n = 1.33$   
Blått lys:  $n = 1.35$

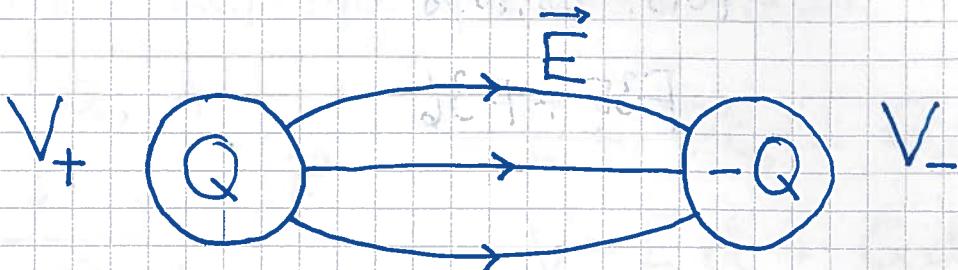
$\Rightarrow$  Regnbue m.m.

# Kondensator og kapasitans [YF 24; LHL 20]

(128)

(=capacitor)      (=capacitance)

Generelt: To ledere adskilt av isolator (f.eks. luft)



Potensialforskjellen ("spenningen") er

$$V = V_+ - V_- = - \int_{\text{under}}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

og er prop. med  $Q$ , siden  $\vec{E}$  er prop. med  $Q$  (Gauss' lov).

Kondensatorens kapasitans:

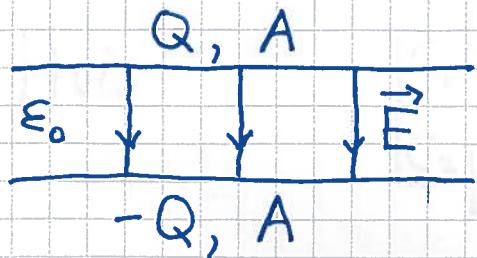
$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V$$

- Enhet:  $[C] = C/V = F$  (farad)
- Kretssymbol:
- Kan lagre ladning og energi
- $C$  avhenger av utforming/geometri og type isolator mellom lederne. Merk at  $C$  ikke avhenger av  $Q$  eller  $V$ .

- Beregning av  $C$ : Anta ladning  $\pm Q$   
på de to lederne og regn ut  $V$ . Da er  $C = Q/V$ .

(129)

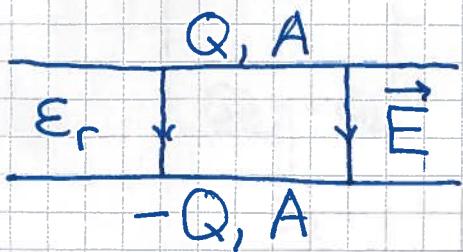
Eks 1: Luftfyld platekondensator.



$$\begin{aligned} E &= \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0 \\ V &= Ed = Qd/A\epsilon_0 \\ \Rightarrow C &= \underline{\epsilon_0 A/d} \end{aligned}$$

Med  $d = 2.0 \text{ mm}$  og  $A = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$  :  $C \approx 0.14 \text{ nF}$

Eks 2: Platekond. fyldt med dielektrikum



$$\begin{aligned} E &= \sigma/\epsilon = Q/A\epsilon_r\epsilon_0 \\ V &= Ed = Qd/A\epsilon_r\epsilon_0 \\ \Rightarrow C &= \underline{\epsilon_r \epsilon_0 A/d} \end{aligned}$$

Dvs:  $C$  økes med faktor  $\epsilon_r$

---

Enhet for permittivitet:  $\underline{[\epsilon] = F/m}$

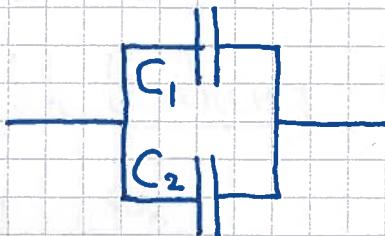
# Kobling av flere kapasitanser

130

[YF 24.2; LHL 20.2]

Parallelkkobling:

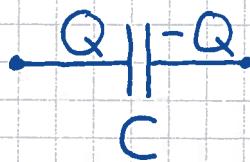
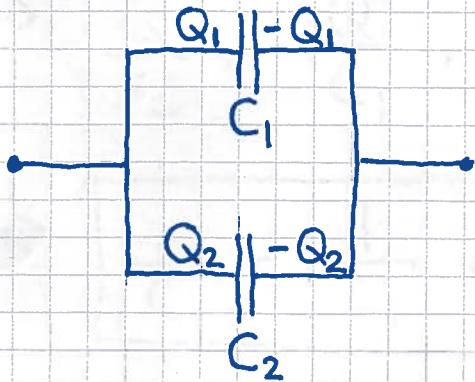
Hvis



skal erstattes av

$\frac{C}{||}$  og oppføre seg likt, hva er da C?

Har lik spenning V over kond. 1 og 2:



$$V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = Q/C \quad \text{og} \quad Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = C$$

Med N kond. i parallel:

$$C = \sum_{j=1}^N C_j$$

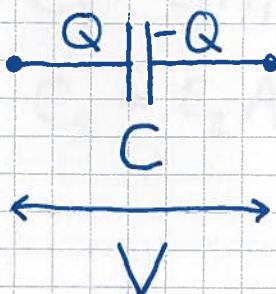
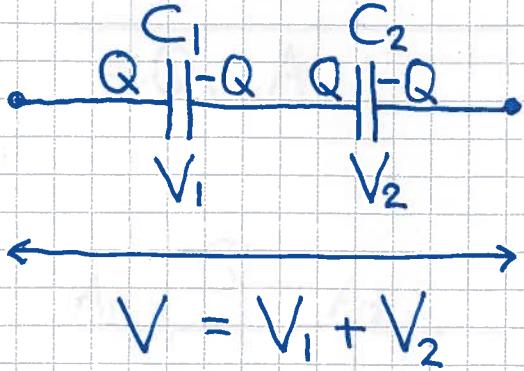
# Seriekobling:

Hvis  skal erstattes av 

(131)

Hva er da  $C$ ?

Har her lik ladning  $\pm Q$  på nr 1 og 2:



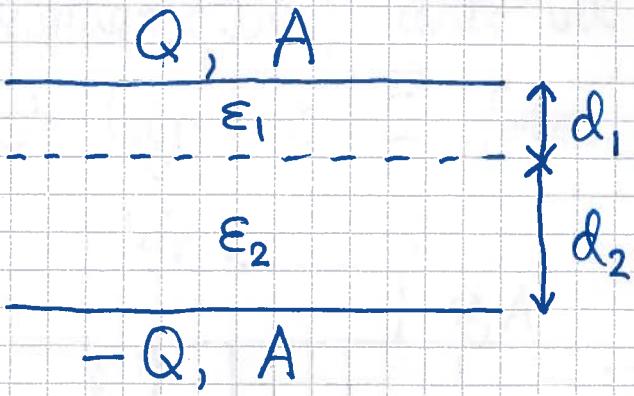
$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med  $N$  kond. i serie:

$$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^n C_j^{-1}}$$

Kondensator fylt med ulike dielektrika blir som parallel- eller seriekobling:

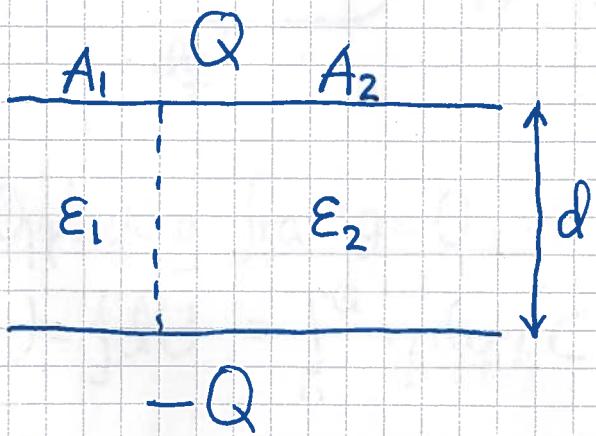


Seriekobling:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

$$C_1 = \epsilon_1 A / d_1$$

$$C_2 = \epsilon_2 A / d_2$$



Parallelkobling:

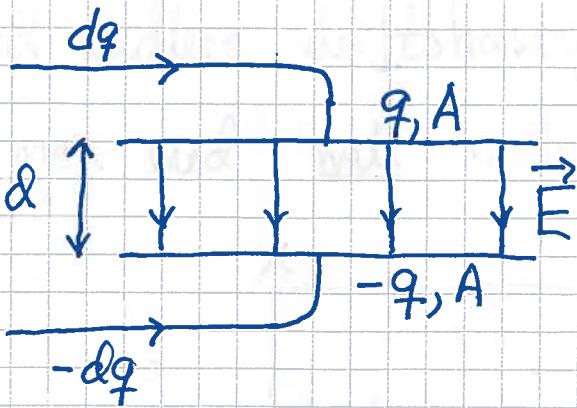
$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \epsilon_1 A_1 / d$$

$$C_2 = \epsilon_2 A_2 / d$$

## Energi i $\vec{E}$ -felt [YF 24.3; LHL 20.4]

Vi beregner arbeidet  $W$  som skal til for å lade opp en kondensator; dette vil tilsvare potensiell energi  $U$  lagret i  $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Økt ladning, fra  $\pm q$  til  $\pm (q+dq)$  gir økt pot. energi:  
 $dU = v(q)dq = \frac{q}{C} dq$

$\Rightarrow$  Opplading fra  $q=0$  til  $q=Q$  gir pot. energi  
 $U = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / 2C = \frac{1}{2} CV^2$

som med  $C = \epsilon_0 A / d$  og  $V = Ed$  gir  
 $U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A / d) \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$

med  $A \cdot d =$  volumet mellom platene, dvs der  $E \neq 0$

$\Rightarrow$  Energien pr volumenhett i et elektrisk felt er

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

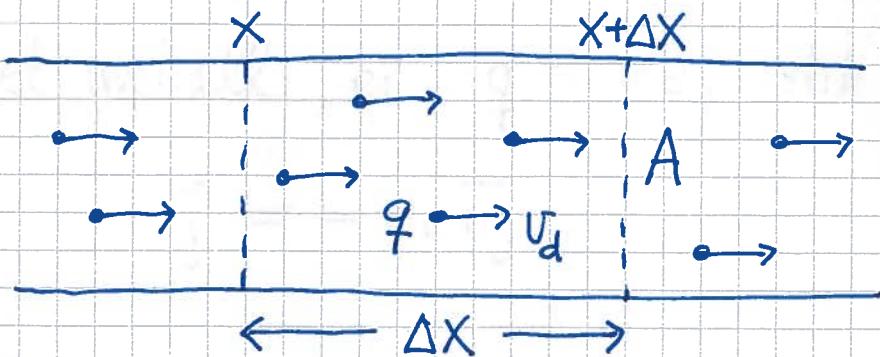
som gjelder generelt.

# Elektrisk strøm [YF 25, 26; LHL 21, 22]

134

## Strøm og strømtetthet [YF 25.1 ; LHL 21.1]

Leder med  $n$  frie ladninger pr volumenhett,  
med middlere driftshastighet  $v_d$  langs lederen  
(men med null nettoladning) :



Strøm  $\stackrel{\text{def}}{=}$  ladning som passerer et tværsnitt  
av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \text{C/s} = \text{A} \quad (\text{ampere})$$

$$\text{All fri ladning } \Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$$

$$\text{i volumet } \Delta V = A \cdot \Delta x \text{ passerer ved } X + \Delta X$$

$$\text{i løpet av tida } \Delta t = \Delta x / v_d$$

$$\Rightarrow I = \frac{q n \Delta x A}{\Delta x / U_d} = n q U_d A$$

(135)

Strømtetthet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  strøm pr flateenhet

$$j = I/A ; [j] = A/m^2$$

$$\Rightarrow j = n q U_d , \text{ dus } \boxed{\vec{j} = n q \vec{U}_d}$$

I et metall er  $q = -e$ , slik at

$$\vec{j} = -n e \vec{U}_d$$

---

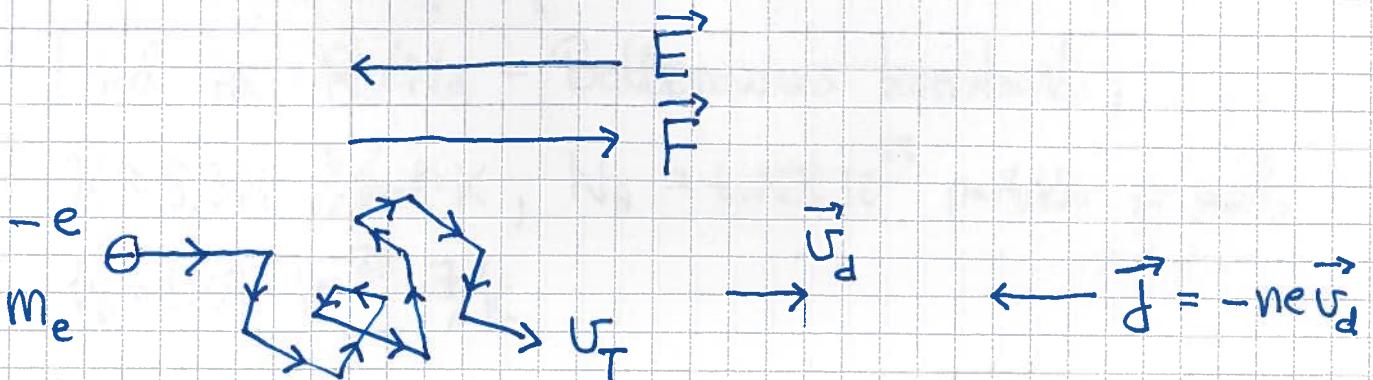
→ elektrisk strøm  
← partikkkelstrøm

---

Ohms lov [YF 25.2, 25.6 ; LHL 21.2, 21.4]

Ytre felt  $\vec{E}$  gir kraft  $\vec{F} = -e \vec{E}$ , som

vil drive frie elektroner gjennom metallet :



Anta  $d$  = middlere avstand mellom kollisjoner (136)

$\tau = d/v_T$  = middlere tid mellom kollisjoner

$v_T$  = middlere elektronfart ved temperatur  $T$

$$\rightarrow v_d \approx \frac{e \vec{E}}{m_e} \cdot \tau = - \frac{e \vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

= middlere driftshastighet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} ; \quad \sigma = n e^2 \tau / m_e = \text{materialets konduktivitet (elektrisk ledningseune)}$$

Dette er Ohms lov (på mikroskopisk form), i følge Paul Drude, ca 1900.

Pga hyppige kollisjoner blir  $v_d$  svært mye mindre enn  $v_T$ .

Termodynamikkens ekvipartisjonsprinsipp sier at ved absolutt temperatur  $T$  bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med  $\frac{1}{2} k_B T$  pr partikkel.

[Med  $k_B = R/N_A$  = Boltzmanns konstant;

$R \approx 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ,  $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$  partikler pr mol,

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

For elektroner (i tre dimensjoner): (137)

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s} \text{ ved romtemperatur}$$

Estimerer  $v_d$  i kobber:

$$m(\text{Cu}) \approx 63 \text{ g/mol}; \rho \approx 9 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow n \approx 10^{29} \text{ frie elektroner pr m}^3 \text{ (1 pr Cu-atom)}$$

Anta  $d \approx 10^{-9} \text{ m}$   $\approx$  avstand mellom Cu-atomene

$$\text{dvs } \tau \approx d/v_T \approx 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} \approx 10^{-14} \text{ s}$$

Med Cu-ledninger i typiske elektriske kretser

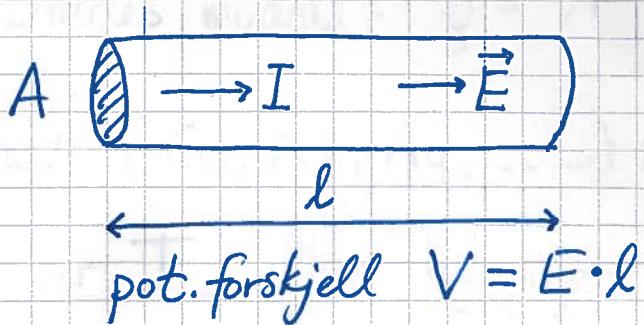
er  $E \sim 10^{-3} \text{ V/m}$  en realistisk verdi.

$$\text{Da er } v_d = e\tau E / m_e \approx 10^{-6} \text{ m/s},$$

$$\text{dvs } v_d / v_T \sim 10^{-11} (!)$$

Med  $v_d = 10^{-6} \text{ m/s}$  vil et gitt elektron bruke ca 100 timer på å komme seg gjennom en Cu-ledning med lengde 36 cm.

For ledet med lengde  $l$ , tverrsnitt  $A$ :



$$j = I/A = \sigma E$$

$$\text{Dermed: } I = \sigma EA = \sigma VA/l$$

$$\Rightarrow V = RI, \text{ med motstand (resistans)}$$

$$R = l/\sigma A$$

som er Ohms lov på "familier" (makroskopisk) form!

$$\text{Konduktans } G: I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A/l = 1/R$$

$$\text{Resistivitet } \rho: \rho = 1/\sigma$$

$$\text{Enheter: } [R] = V/A = \Omega \text{ (ohm)}$$

$$[G] = 1/\Omega = S \text{ (siemens)}$$

$$[\rho] = \Omega m; [\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = S/m$$

$\sigma, \rho$  er matialegenskaper;  $G, R$  er avhengige av  $A$  og  $l$

Kretssymbol:

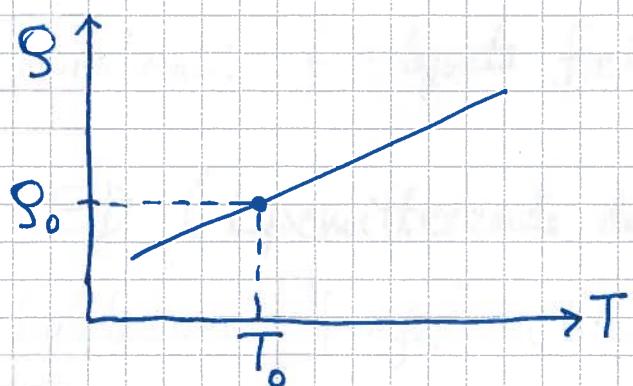


(Noen bruker

## Resistivitet og temperatur [YF 25.2; LHL 21.2+5] (39)

Fra Drudes modell:  $g = 1/\sigma = m_e/e^2 n \tau \sim 1/n \tau$

Metall (Cu, Al, Ag, ...): Stor  $n$  som avhenger lite av  $T$ . Men hyppigere kollisjoner når  $T$  øker, dvs mindre  $\tau$  og større  $g$ . Exp. gir typisk en lineær  $g(T)$ :

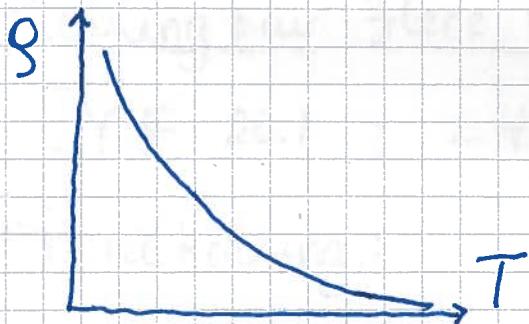


$$\Rightarrow g(T) = g_0 \{ 1 + \alpha \cdot (T - T_0) \}$$

$$\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1} \text{ for både Cu, Al og Ag}$$

Halvleder (Si, Ge, GaAs, GaN, ...): Isolator, med  $n \approx 0$  ved  $T \approx 0$ . Økt  $T$  gir sterkt økning i  $n$ , slik at  $g$  øker med økende  $T$ .

(Også forurensningsatomer - doping - øker  $n$  og reduserer  $g$ .)



Solceller: Lys, dvs fotoner med energi  $hf$ , absorberes av elektroner i halvlederen, blir frie elektroner som kan bidra til elektrisk strøm. ( $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$  Js = Plancks konstant;  $f$  = lysets frekvens)

LED (Lysemitterende dioder): Fri elektron i halvlederen "fanges" i tilstand med lavere energi (et "hull"); frigjort energi sendes ut som foton.

Eks:

$(Al_x Ga_{1-x}) As$  :  $\lambda = 560 - 870$  nm (rødt-gult-rødt)

$(In_x Ga_{1-x}) N$  :  $\lambda = 360 - 620$  nm (blått-gult)

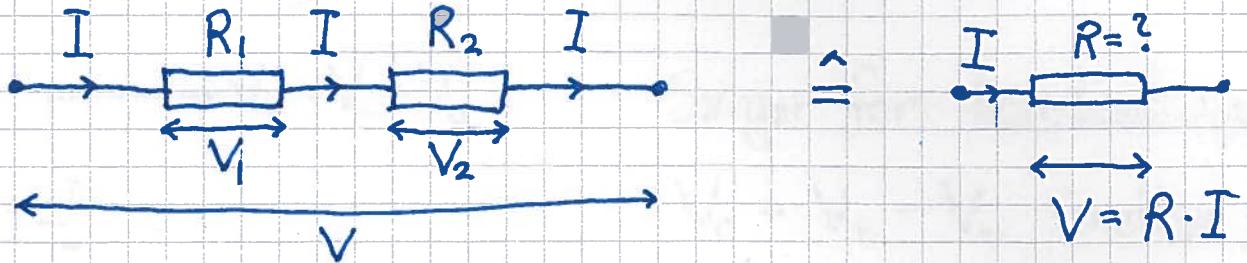
Kan kombineres og gi hvit lys med LED-pærer.

Nobelpris fysikk, 2014.

# Kobling av flere motstander

[YF 26.1 ; LHL 21.3]

Seriekobling:



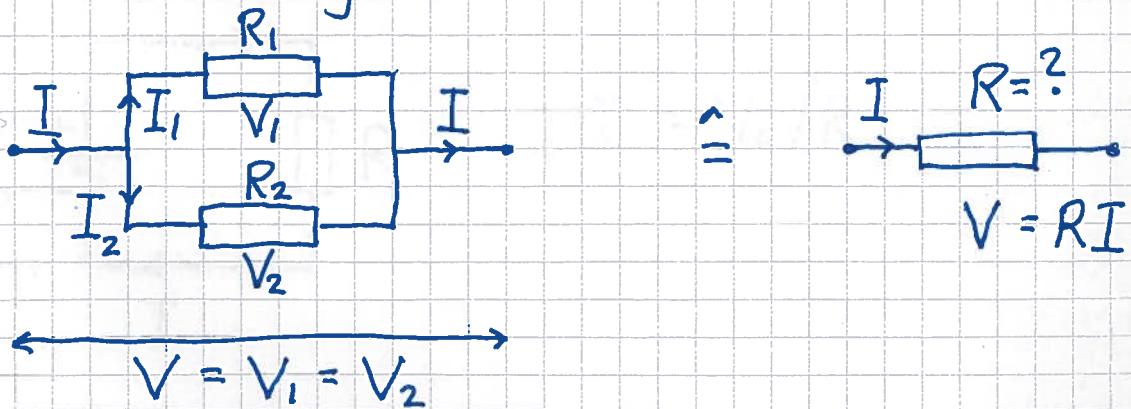
Samme strøm  $I$  gjennom  $R_1$  og  $R_2$ ;  $V = V_1 + V_2$

$$\Rightarrow V = R_1 I + R_2 I = R I \Rightarrow R = R_1 + R_2$$

Med  $N$  motstander i serie:

$$R = \sum_{j=1}^N R_j$$

Parallelkkobling:



Samme spenninng over  $R_1$  og  $R_2$ ;  $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Med  $N$  motstander i parallel:

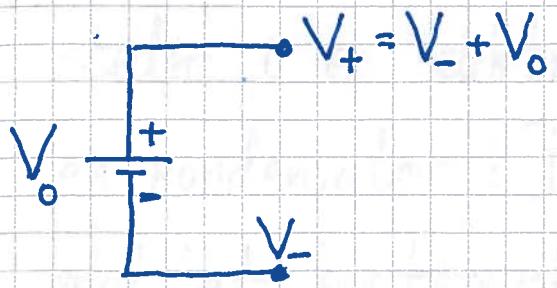
$$\frac{1}{R} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j}$$

# Likestromkretser [YF 26 (25); LHL 22]

(142)

DC = direct current = likestrom

Likespenningskilde :



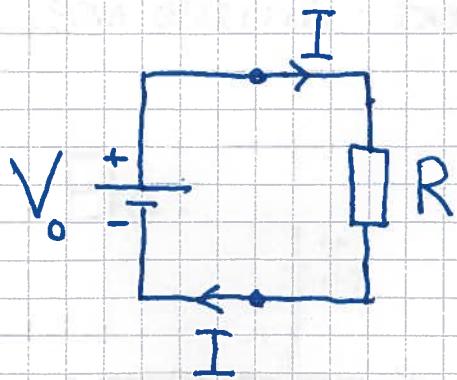
Sørger for konstant spenning

$V_o = V_+ - V_-$  mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri, solcelle

Kan koble spenningskilden til en motstand R.

Gir en tulkket krets, og strom bestemt av Ohms lov :



$$I = V_o / R$$

# Kirchhoffs lover (regler) [YF 26.2; LHL 22.3] (143)

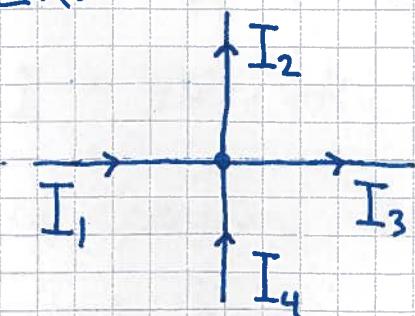
K1: Strømregel; knutepunktregel

Ladning vil ikke "hope seg opp" på ulike steder i en elektrisk krets. [Unntak: Platene i en kondensator!] Derfor må netto strøm inn mot et knutepunkt være lik netto strøm ut av knutepunktet.

$$\sum_j I_j = 0 \quad i \text{ alle knutepunkt i elektrisk krets}$$

(som allerede benyttet s. 141)

Eks:



Velg (f.eks) positivt fortegn inn og negativt fortegn ut  
 $\Rightarrow I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$

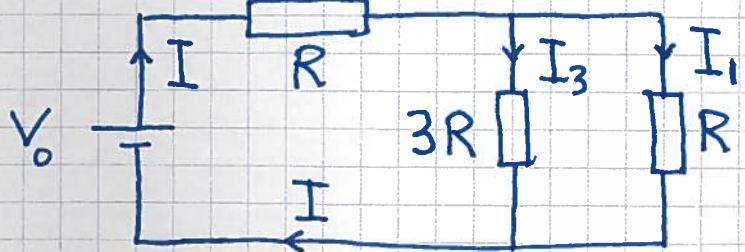
$$\underbrace{I_1 + I_4}_{\text{inn}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{ut}}$$

## K2: Spenningsregel; sløyferegel

En lading må oppleve et entydig potensial (dvs: ha en entydig pot. energi) på et gitt sted i en elektrisk krets. Derfor må sammen av alle potensialendringer rundt enhver lukket sløyfe være null

$$\sum_j V_j = 0 \text{ rundt alle sløyfer i elektrisk krets}$$

Eks:



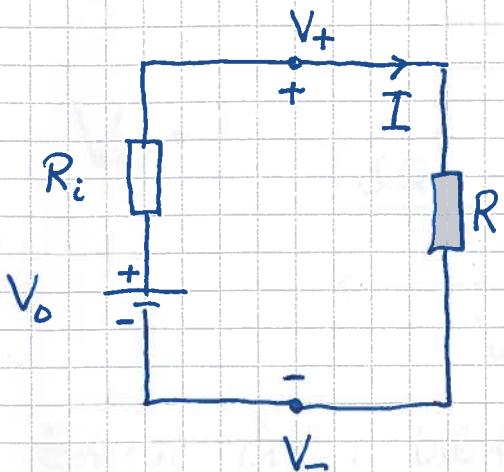
$$V_0 = I \cdot R_{\text{tot}} ; R_{\text{tot}} = R + \left( \frac{1}{3R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{7}{4}R$$

$$\Rightarrow I = 4V_0 / 7R, I_3 = \frac{1}{4}I = V_0 / 7R, I_1 = \frac{3}{4}I = 3V_0 / 7R$$

Lik spennin over de to parallellkoblede motstandene.

Reelle spenningskilder har indre motstand  $R_i$ :

(145)



$$K2: V_o - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_o}{R_i + R}$$

Spenningen over den ytre kretsen, her  $R$ , er

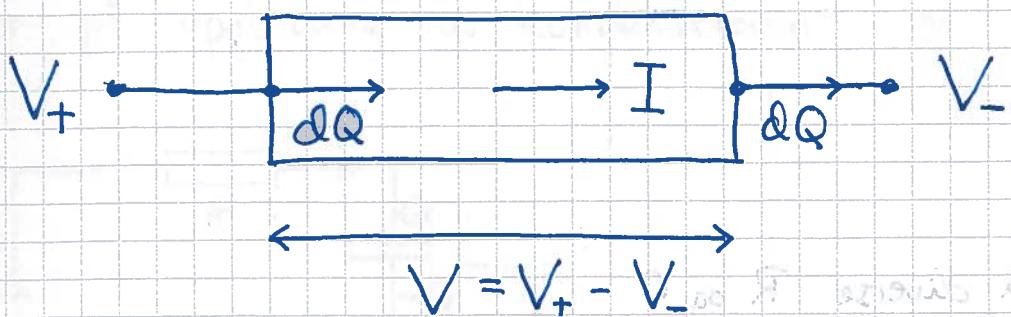
$$V_+ - V_- = V_o - R_i I < V_o$$

når  $I > 0$ .

Gamle batterier får større og større  $R_i$ , dus

mindre og mindre polspennning  $(V_+ - V_-)$  når  $I > 0$ .

## Elektrisk effekt: [YF 25.5; LHL 22.2]



Energi inn i lederbitten med ladning  $dQ$  ved potensial  $V_+$ :

$$dU_{\text{inn}} = V_+ \cdot dQ$$

Utt, med ladn.  $dQ$  ved pot.  $V_-$ :

$$dU_{\text{utt}} = V_- \cdot dQ$$

Differansen er elektrisk energi som omdannes til varmeenergi i lederbitten; effekttapet er

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{\text{inn}} - dU_{\text{utt}}}{dt} = \underbrace{(V_+ - V_-)}_{=V} \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I} = V \cdot I$$

Hvis lederbitten følger Ohms lov:

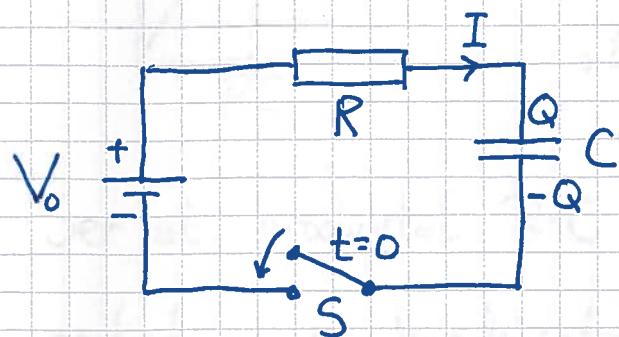
$$V = R \cdot I$$

$$\Rightarrow P = RI^2 = V^2/R$$

# RC-krets [YF 26.4; LHL 22.4]

(147)

Ser på opplasting av kondensatoren i en RC-krets:



- $Q=0$  og  $I=0$  før  $t=0$
- Lukker bryteren ved  $t=0$  med bryteren  $S$  (switch)
- Finn  $Q(t)$  og  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$

$$K2: V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

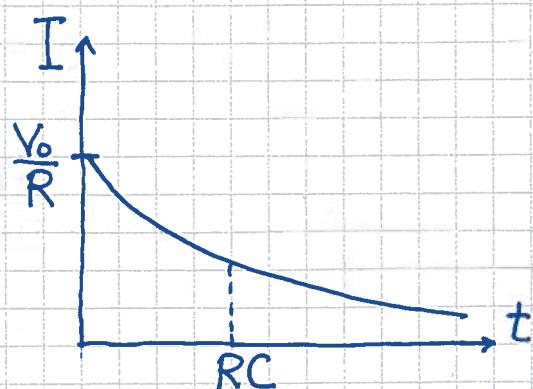
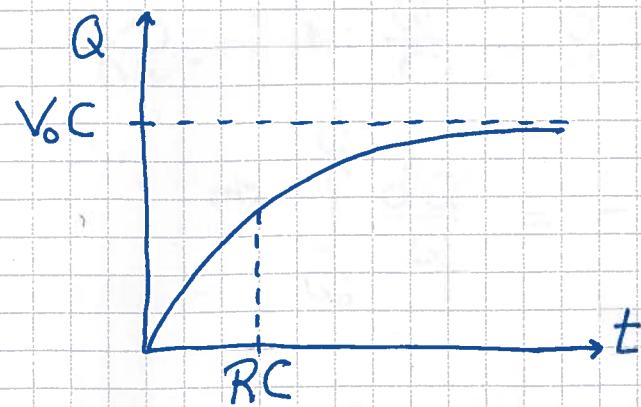
$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -t/RC$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q(t) = V_0 C \left\{ 1 - e^{-t/RC} \right\}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}}$$



Ser at produktet  $R \cdot C$  angir en "typisk" tid for oppplading av kondensatoren i en RC-krets.

Kalles kretsens tidskonstant:  $\tau = RC$

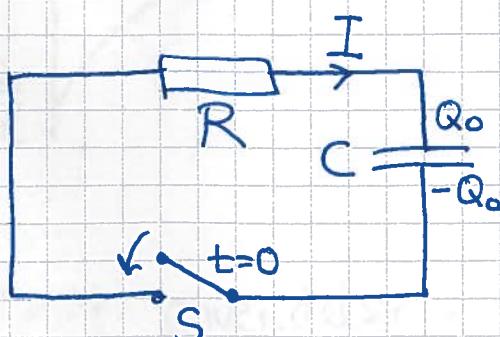
$$Q(\tau) = V_0 C (1 - 1/e) \approx 0.63 V_0 C$$

$$Q(3\tau) = V_0 C (1 - 1/e^3) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e} \approx 0.37 \frac{V_0}{R}$$

$$I(3\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e^3} \approx 0.05 \frac{V_0}{R}$$

Utlading av en oppladet kondensator:



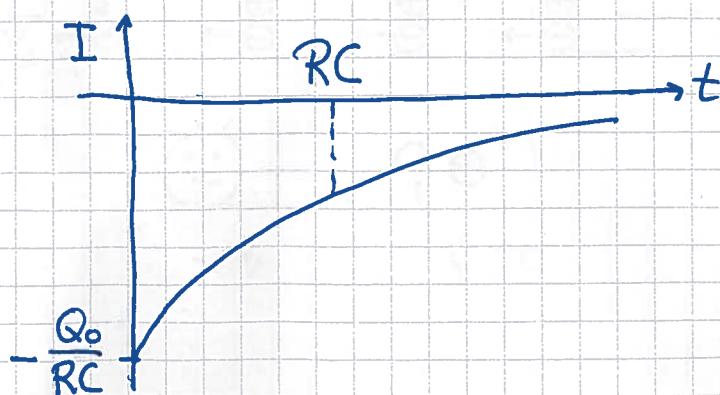
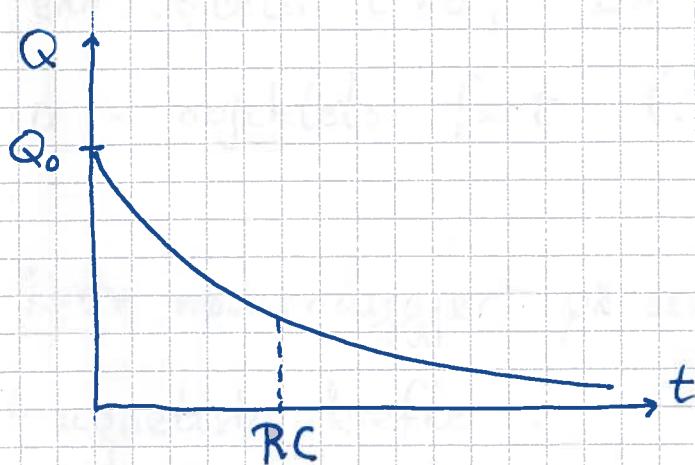
- $Q = Q_0$ ,  $I = 0$  før  $t = 0$
- Lukket krets fra  $t = 0$
- Finn  $Q(t)$  og  $I(t)$

$$K_2: -\frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$



Diverse anvendelser: Blinklys, Blitz,--

Frekvensfilter i AC-kretser

# Magnetostatikk [YF 27, 28 ; LHL 23]

(150)

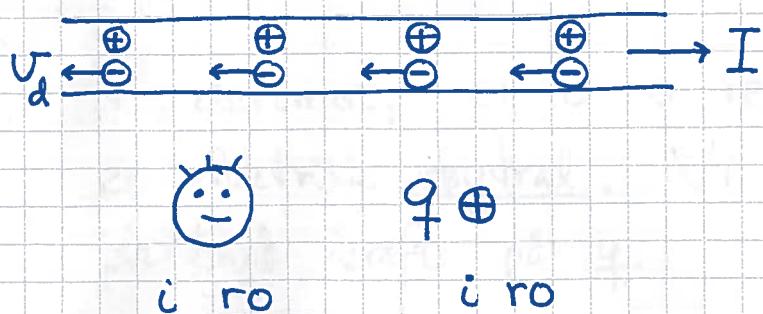
Einstein: "Alt er relativt!"

Men lysfarten (i vakuum) er  $c$  i alle inertialsystem, uavhengig av lyskildens fart.

En av flere konsekvenser av dette er såkalt

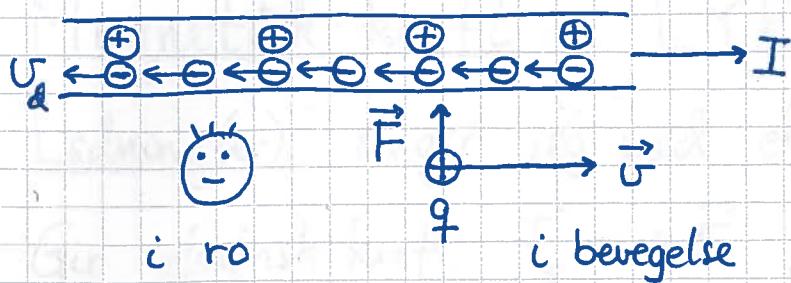
lengdekontraksjon: Objekter i bevegelse er kortere enn objekter i ro,  $\Delta x = \Delta x_0 \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$ , der  $u$  = objektets fart (i x-retning).

Dette nødvendiggjør på sett og vis magnetfeltet og magnetiske krefter:



Ladningen  $q$  er i ro og "ser" en nøytral strømførende ledet.

$\Rightarrow F=0$ ; ingen nettkraft på  $q$



Elektronene ( $\ominus$ ) har større hastighet enn kjernene / ionene ( $\oplus$ ) relativt ladningen  $q$ :

$$U_- \approx U + U_d ; \quad U_+ = U$$

Dermed størst lengdekontraksjon for avstanden mellom elektronene ( $\ominus$ ). Dermed "ser" ladningen  $q$  en negativt ladet leder når  $q$  er i bevegelse (langs lederen). Dermed påvirkes  $q$  av en elektrisk kraft  $\vec{F}$  (tiltrekkende huis  $q > 0$ ).

Vi, desimot, er i ro relativt lederen, som for oss er elektrisk nøytral. Vi mäter derfor ingen elektrisk kraft på  $q$ .

Vi mäter en magnetisk kraft  $\vec{F}_m$ . Denne utnyttes ved hjelp av et magnetfelt  $\vec{B}$ . Magnetfeltet  $\vec{B}$  skapes av strømmen  $I$ .

# Magnetisk kraft [YF 27.2; LHL 23.4]

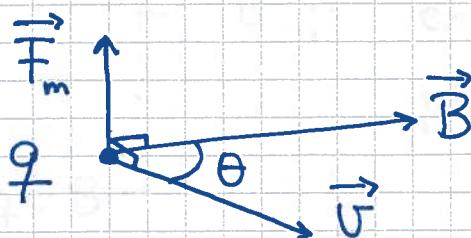
(152)

Ladning(er) omgir seg med elektrisk felt  $\vec{E}$ .

Gir elektrisk kraft  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  på en annen ladning  $q$

Strøm(mer) omgir seg med magnetfelt  $\vec{B}$ .

Gir magnetisk kraft  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  på ladning  $q$ ,  
når denne er i bewegelse med hastighet  $\vec{v}$



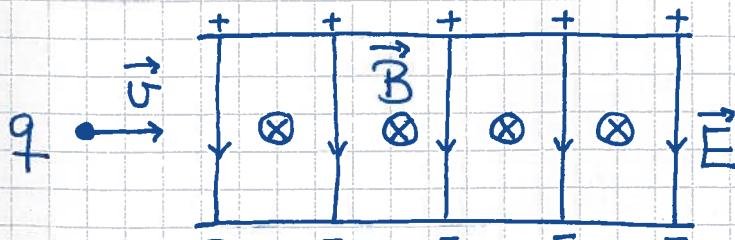
$$\vec{F}_m = qvB \sin\theta ; \quad \vec{F}_m \perp \vec{B} \text{ og } \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

$$\text{Enhet: } [B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}$$

Når både  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  er til stede:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Eks:



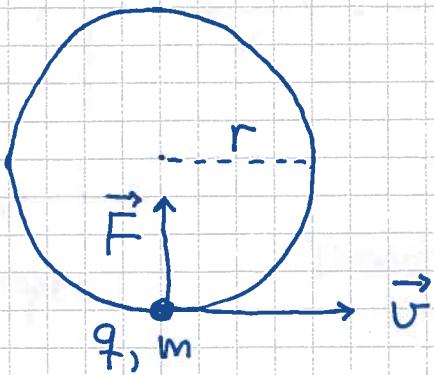
$\otimes \vec{B}$  inn  
 $(\odot \vec{B}$  ut)

Her er  $v = E/B$ , er  $\vec{F} = 0 \Rightarrow$  ingen avbøyning!

# Ladning i uniformt magnetfelt

[YF 27.4 ; LHL 23.1 + 4]

$\vec{B}$   $\otimes$   
(inn i planet)



Antar  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ; en komponent av  $\vec{v}$   $\parallel \vec{B}$  påvirkes ikke

$$\Rightarrow F = qvB$$

Merk: Med  $\vec{F} \perp \vec{v}$  er tilført effekt  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ .  
Magnetisk kraft kan ikke gjøre arbeid!

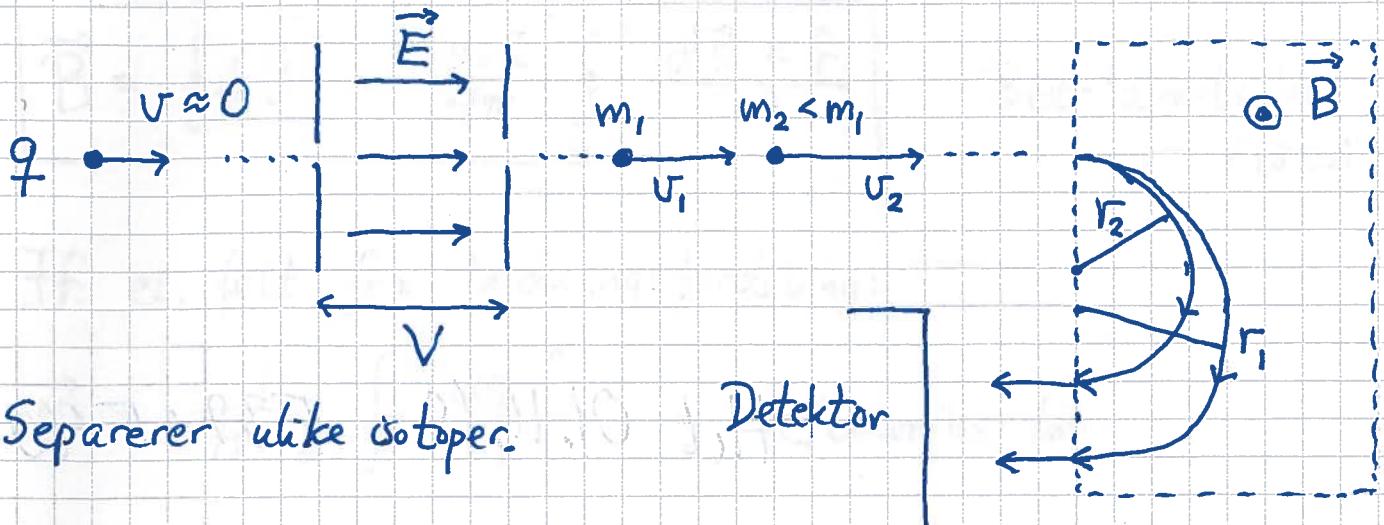
$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}$ ; vi får uniform sirkelbevegelse

$$N2: qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = \text{syklotronfrekvensen}$$

# Eks: Massespektrometer [YF 27-5] (Øv. 12)

(154)



Separerer ulike isotoper.

## Biot - Savarts lov

[YF 28.2 ; LHL 23.5]

Magnetostatikkens analogi til Coulombs lov:



Hver liten del  $d\vec{s}$  av strømsløyfa gir bidrag  $d\vec{B}$  til totalt felt  $\vec{B}$ :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = \text{vakuumpermeabiliteten};$$

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Totalt felt fra lukket strømsløyfe:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov  
(1820)

Jf. el. felt fra ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}; \text{ Coulombs lov}$$

Vi ser på tre sentrale eksempler, uten matematiske detaljer. (Et 5-siders pdf-notat ligger på websiden, for den som er interessert!)

Vi kan benytte oss av at

$$d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \hat{r} \quad (\text{evt. } I d\vec{s} \times \vec{r})$$

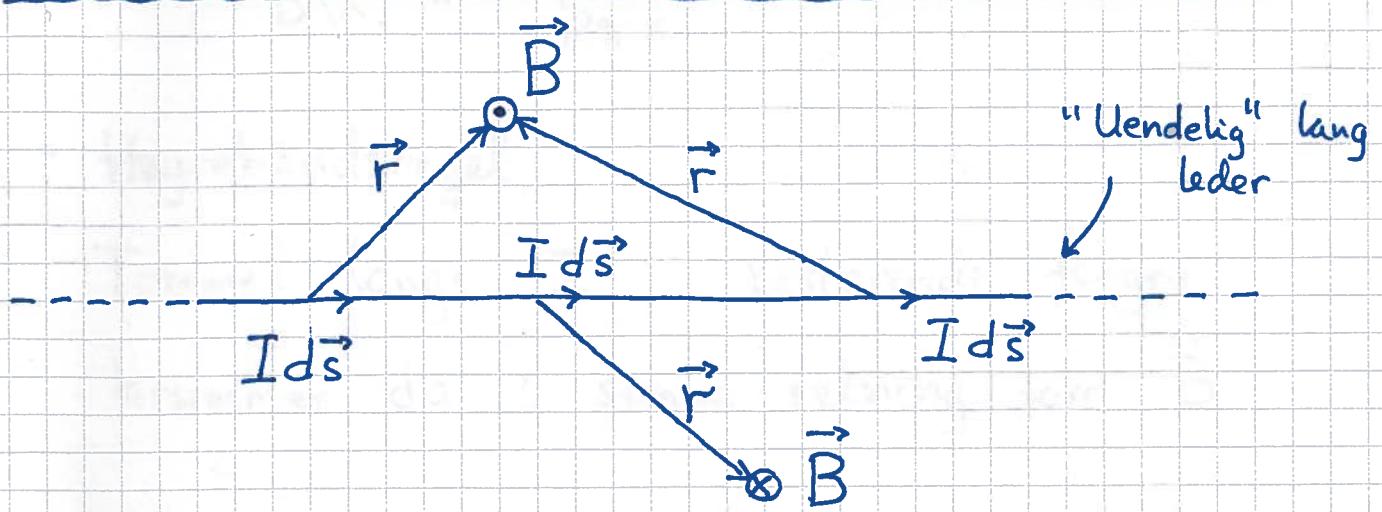
for å argumentere for retningen til  $\vec{B}$   
på ulike steder.

Ellers vil alltid  $|\vec{B}|$  inneholde faktoren  $\mu_0 I$ ,  
samt en faktor med enhet  $1/m$ .

$|\vec{B}|$  vil avta med avstanden fra strømlederen på  
ulike vis, avhengig av formen på strømlederen / strømsløyfa.

Eks 1:  $\vec{B}$  fra lang og rett strømførende

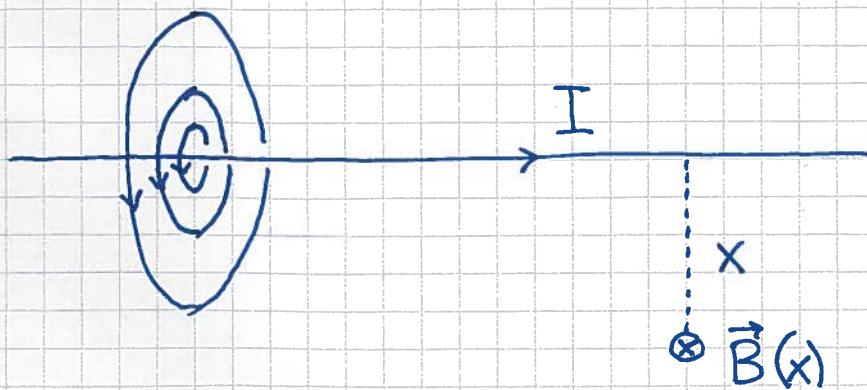
leder [YF 28.3; LHL 23.5]



Siden  $d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r}$ , peker alle bidrag ut på oppsiden og alle inn på nedsiden av lederen.

$\Rightarrow \vec{B}$  må være tangentiell til sirkel med sentrum på lederen

Feltneser for  $\vec{B}$  (som for  $\vec{E}$ -felt: linjer  $\parallel \vec{B}$  ; linjetetthet prop. med feltstyrken  $| \vec{B} |$ ) blir sirkler med sentrum på lederen.



- Biot - Savarts lov gir

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- Høyrehåndsregel :

Tommel langs  $I$ ; resterende fingre krummer da i samme retning som  $\vec{B}$

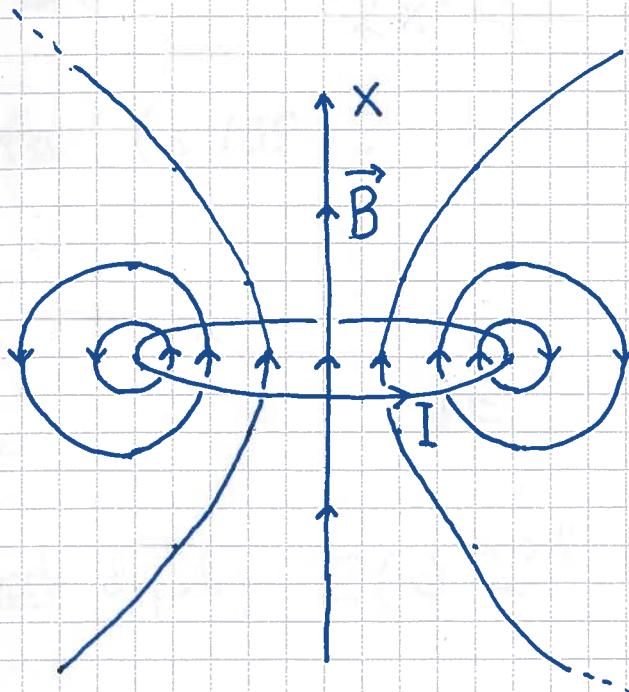
- Merk at feltlinjer for  $\vec{B}$  alltid er lukkede kurver.

Dette uttrykker at vi ikke har "magnetiske ladninger".

Men: Vi har magnetiske dipoler;  
se nest eksempel!

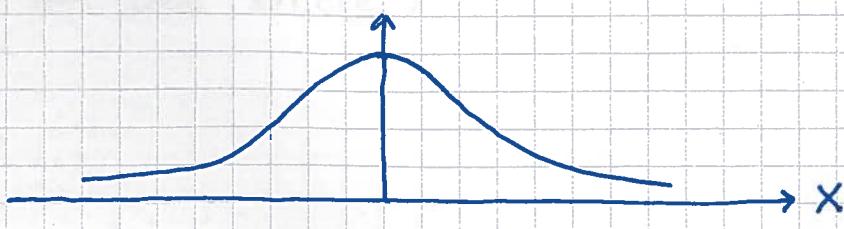
Eks 2:  $\vec{B}$  fra sirkulær strømsløyfe

[YF 28.5 ; LHL 23.6]



- Strømsløyfe i yz-planet, strøm  $I$ , radius  $R$ .
- Nær lederen er  $\vec{B}$  omrent som for lang rett ledet.
- På x-aksen er  $\vec{B} \parallel \hat{x}$  pga symmetri
- Biot - Savarts lov gir, på x-aksen:

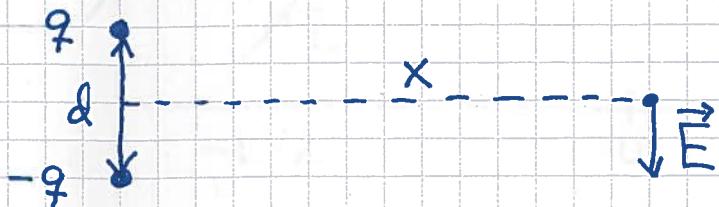
$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



- Langt unna strømsøyfa,  $x \gg R$ :

$$B(x) \approx -\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

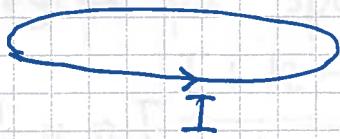
Fra før (s. 105):



Elektrisk dipol;  $E(x) \stackrel{x \gg d}{\approx} \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$

Strømsøyfa er en magnetisk dipol:

N (nord)

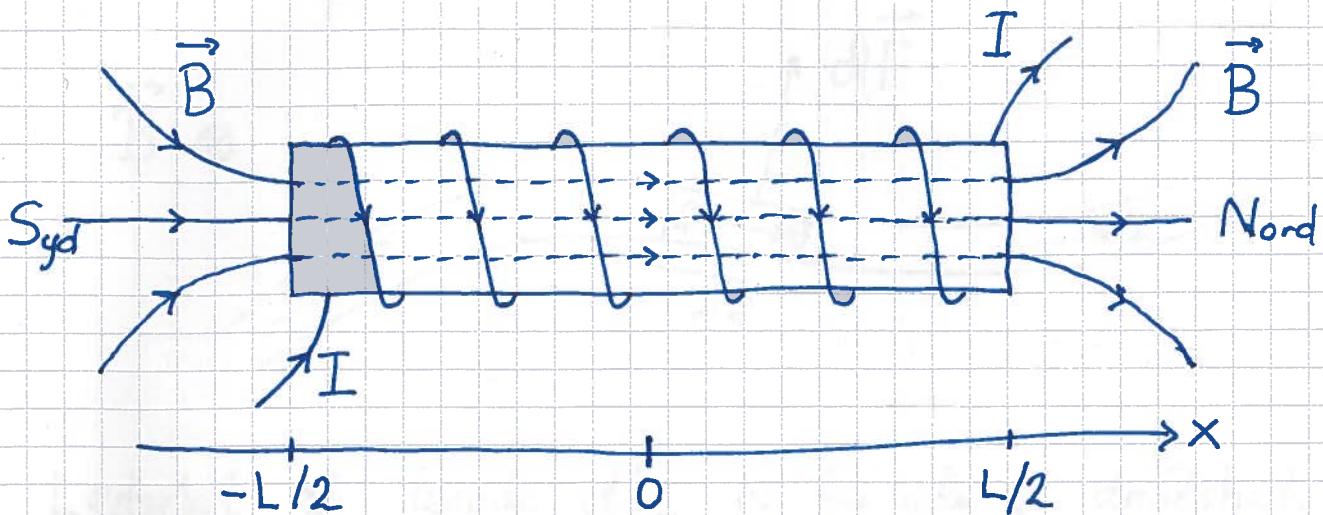


S (syd)

Atomer og molekyler er små magnetiske dipoler.

(Mer om det senere.)

Eks 3:  $\vec{B}$  fra strømførende spole [YF 28.7; LHL 23b] (160)



- $N$  viklinger på lengde  $L$ ; tverrsnitt  $A = \pi R^2$
- Tette viklinger  $\Rightarrow \vec{B}$  fra  $N$  sirkulære strømslayfer jevnt fordelt på lengde  $L \Rightarrow$  Kan summere (integrere)  $\vec{B}$  fra Eks 2 (se notat).

- Feltstyrke på spolens akse:

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$$

$n = N/L =$  antall viklinger pr lengdeenhet;  $[n] = 1/m$

- Lang spole,  $L/2 \gg R$ :

$$B(\pm L/2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

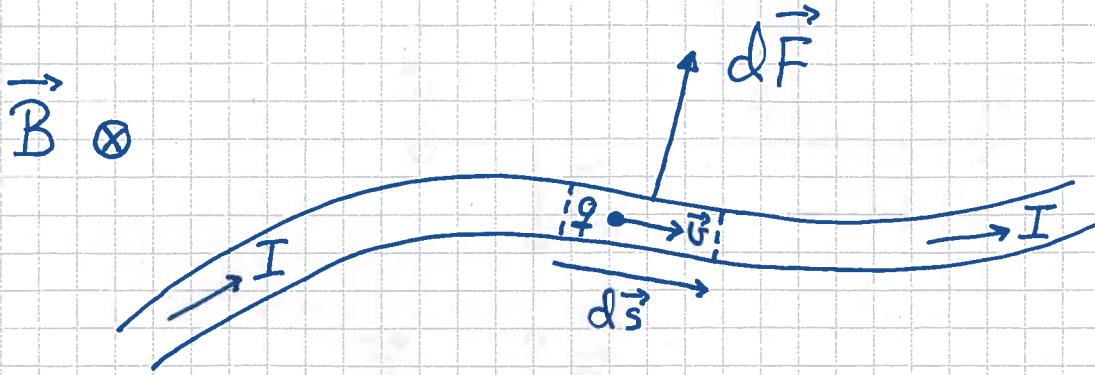
$$B(|x| \ll L/2) = \mu_0 n I$$

(overalt inni spolen)

$B \approx 0$  utenfor spolen

# Magnetisk kraft på strøm [YF 27.6 ; LHL 23.2]

(161)



Lederbit , lengde  $d\vec{s}$ ,  $N$  frie ladn.  $q$ , driftshast.  $\vec{v}$

$$\Rightarrow d\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = \text{kraft på lederbitten}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{ds/v} = \frac{1}{ds} Nqv \Rightarrow Nqv = I d\vec{s}$$

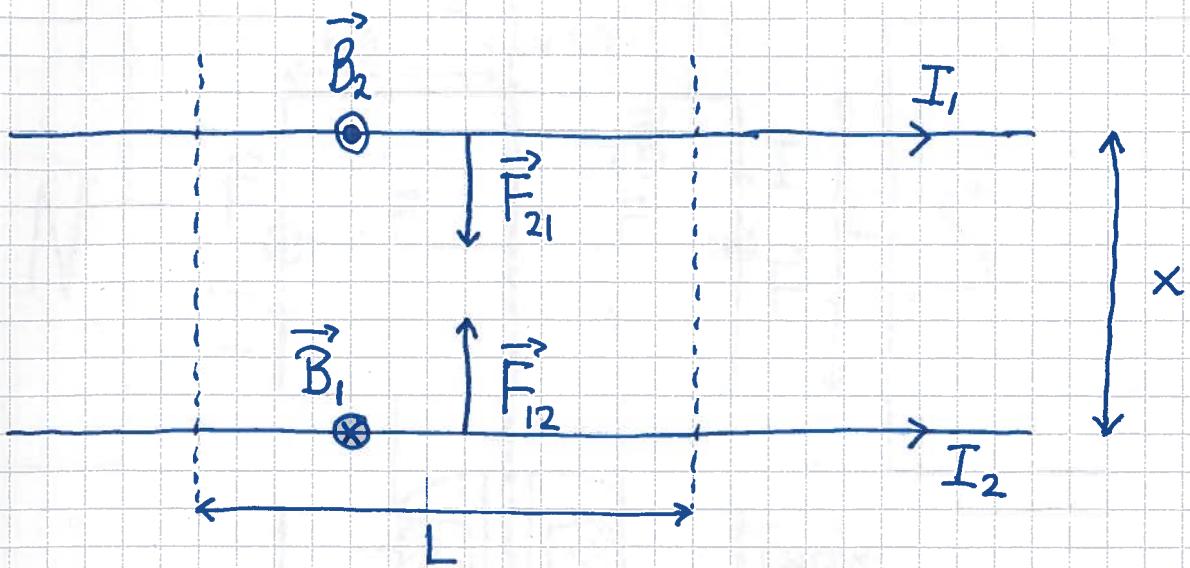
$$\Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$  Kraft på hele lederen:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

# Eks 1: Parallelle strømmer [YF 28.4; LHL 23.5]

(62)



$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi x} = \text{feltstyrke i avstand } x \text{ fra } I_{1,2}$$

Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F \quad (\text{N3})$$

$$F_{12} = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_2 I_1$$

$$F_{21} = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_1 I_2 = F_{12} \quad (\text{OK!})$$

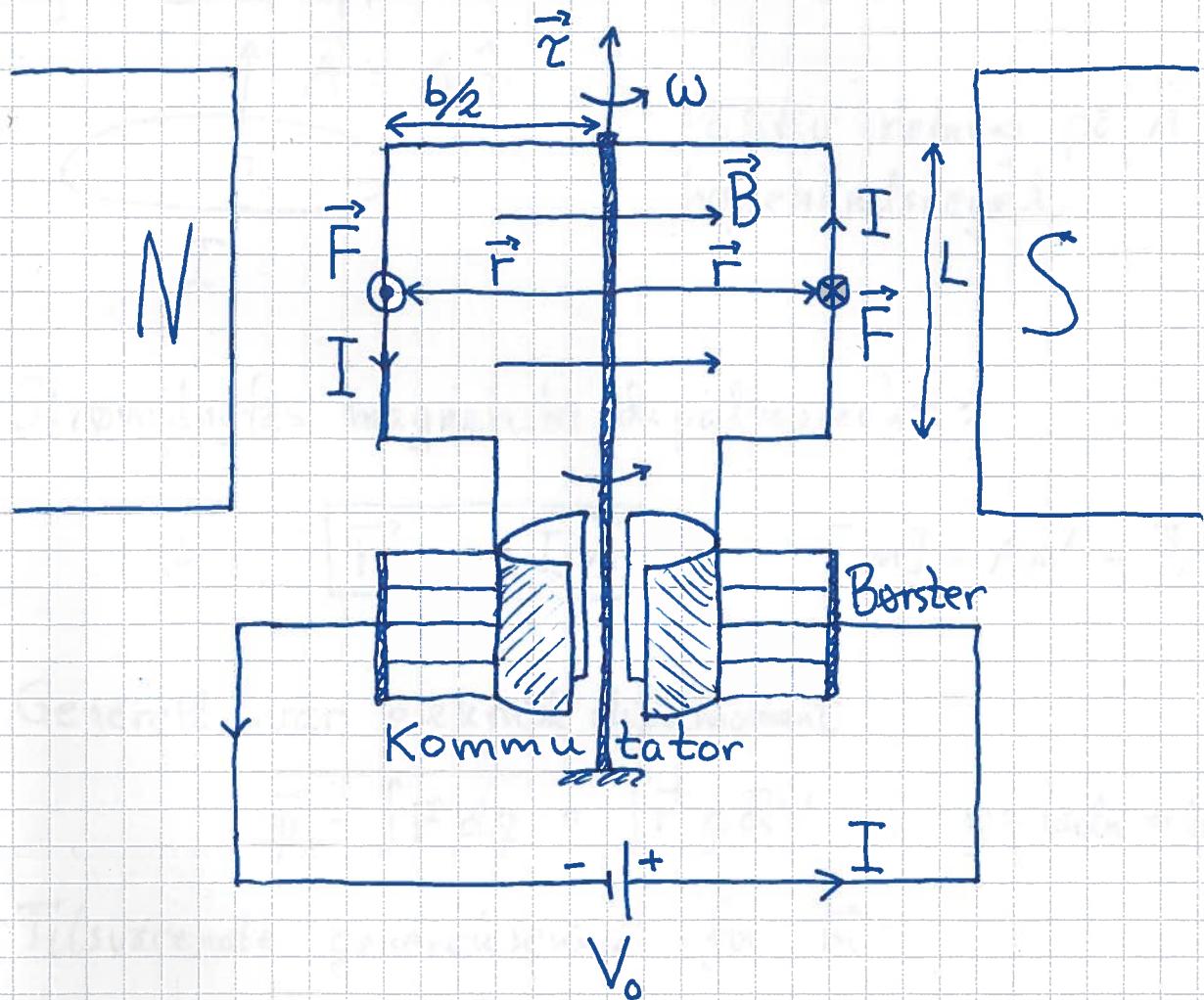
Kraft pr lengdeenhet:  $f = \underbrace{\frac{F}{L}}_{= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}}$

Tilfrekning når  $I_1$  og  $I_2$  i samme retning.

Fra støtning ————— II ————— motsatt ————— II —————.

## Eks 2: Likestrømsmotor [YF 27.8; LHL 26.3]

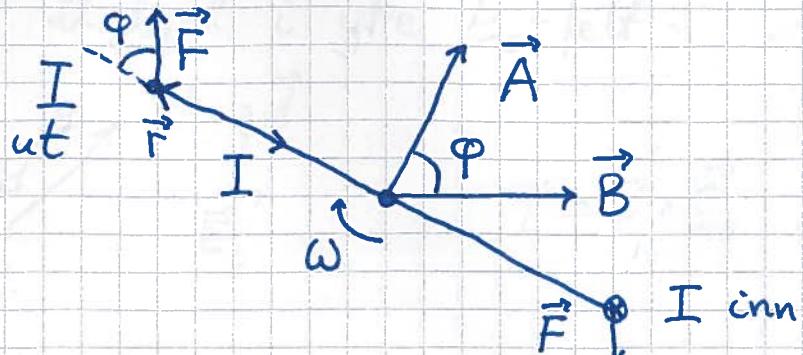
(163)



Kommutator roterer med sløyfa (eut spolen) og gir strømretning som i figuren; dermed dreiemoment  $\vec{\tau}$  i samme retning hele tiden:

$$\begin{aligned}\tau &= |\vec{\tau}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot I L B \cdot \sin\varphi \\ &= IA \cdot B \cdot \sin\varphi ; \quad A = b \cdot L\end{aligned}$$

Sett ~~ut~~ langs rotasjonsaksen ( $\vec{z}$  inn):

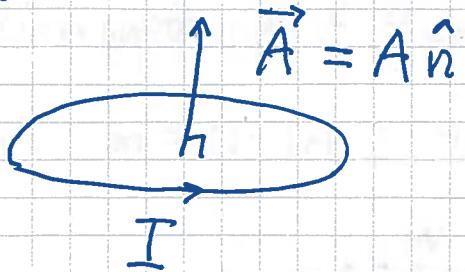


$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

( $N$  vinklinger:  
 $\vec{\tau} = N \cdot I \vec{A} \times \vec{B}$ )

# Magnetisk dipolmoment [YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]



Positiv retning på  $\vec{A}$  med høyrehåndsregel.

Strømslyfas magnetiske dipolmoment:

$$\vec{m} = IA$$

$$[m] = Am^2 = J/T$$

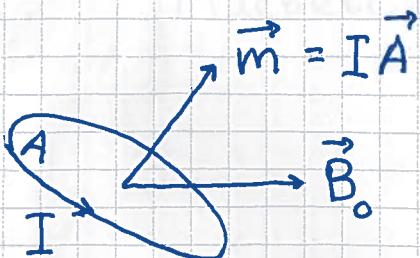
[Generelt var elektrisk dipolmoment

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV ; \rho = \text{ladv. tetthet}$$

Tilsvarende generalisering for  $\vec{m}$ :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV ; \vec{j} = \text{strømtetthet}$$

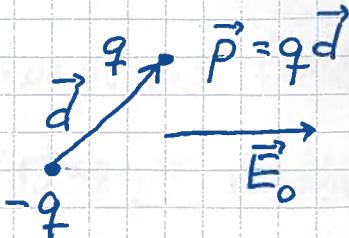
Magn. dipol i ytre  $\vec{B}$ -felt (jf DC-motoren):



$$\begin{aligned} \vec{\chi} &= \vec{m} \times \vec{B}_0 \\ U &= -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 \end{aligned}$$

(Øv.13)

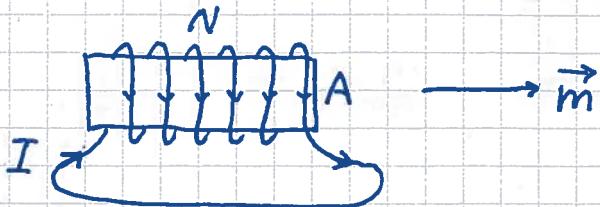
Jf. el.dipol i ytre  $\vec{E}_0$ -felt: (s.125; Øv.9)



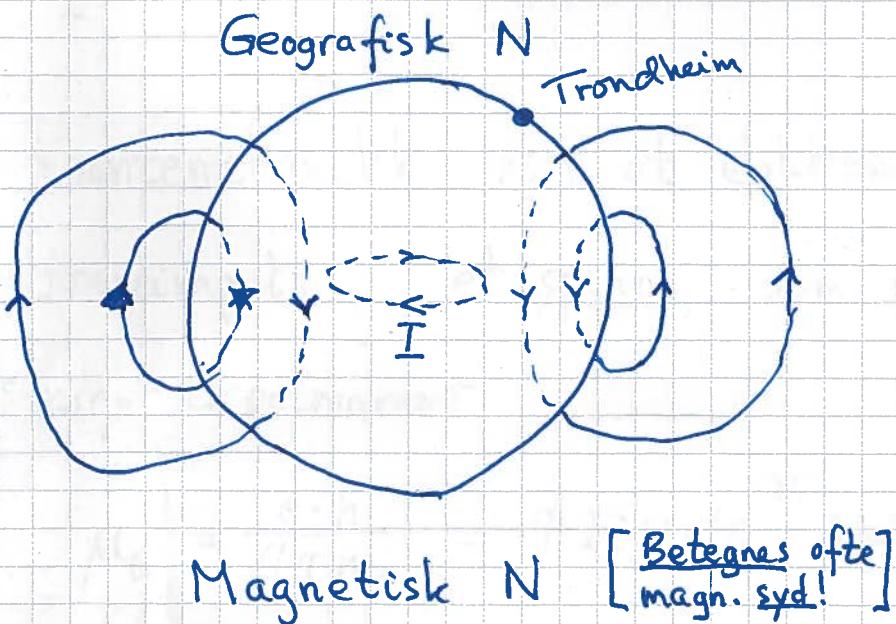
$$\vec{\chi} = \vec{p} \times \vec{E}_0 , \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Eks 1: Hva er  $|\vec{m}|$  for spole med  $N = 400$  viklinger og tuverrsnitt  $A = 4 \text{ cm}^2$  når strømmen er  $I = 0.2 \text{ A}$ ?

$$\text{Løsn: } m = N \cdot IA = 400 \cdot 0.2 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{0.032 \text{ Am}^2}$$



Eks 2: Jordkoden



Magn. poler der  
 $\vec{B}$  er vertikal.  
World Magnetic  
Model 2015:

Magn. Nord:  
 $64.3^\circ S, 136.6^\circ S$   
Magn. Syd:  
 $86.3^\circ N, 159.2^\circ V$

$$\downarrow \vec{m} \quad m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

I følge ngdc.noaa.gov online calculator er,  
i Trondheim:  $|\vec{B}| \approx 52 \mu\text{T}$ , med vertikal  
komponent (ned) ca  $50 \mu\text{T}$  og horisontal komp. ca  $13.6 \mu\text{T}$   
( $13.58 \mu\text{T}$  nordover,  $0.81 \mu\text{T}$  østover).  $\frac{d|\vec{B}|}{dt} \approx 27 \text{ nT pr år}$

# Materialers magnetiske egenskaper: Magnetisme

[YF 28.8; LHL 26.1 - 26.6]

Atomer er små strømsløyfer, og derfor små magn. dipoler:

$$I = \frac{e}{T}, T = \frac{2\pi r}{v}, A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r$$

$$\approx 10^{-19} C \cdot 10^6 m/s \cdot 10^{-10} m$$

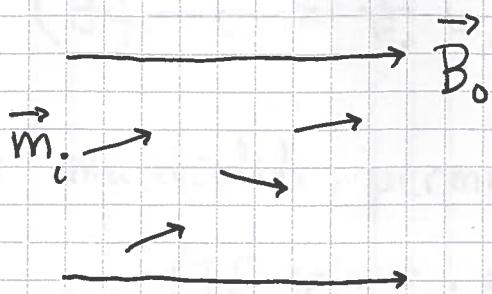
$$\approx 10^{-23} Am^2$$

Kvantemekanikk viser at elektroner har indre dreieimpuls, et spinn, som tilsvarer et magn. dipolmoment

$$\mu_B = \frac{e \cdot h}{4\pi M_e} \approx 9.274 \cdot 10^{-24} Am^2 = \text{et Bohr magneton}$$

med  $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} Js = \text{Plancks konstant}$

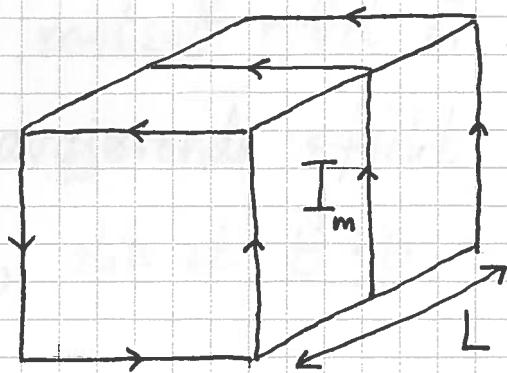
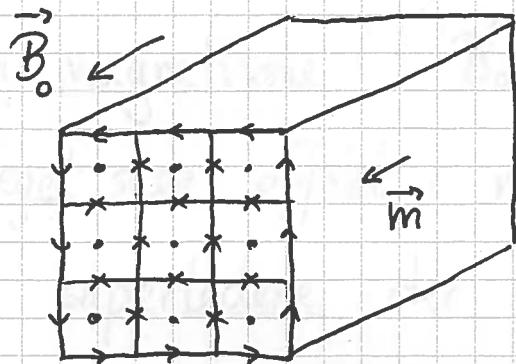
Materialer kan magnetiseres ved at atomære dipoler rettes inn med  $\vec{m}$  langs ytre felt  $\vec{B}_0$ :



$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V \neq 0$$

$$\vec{M} = \text{magnetiseringen } (A/m)$$

Netto makroskopisk effekt er en overflatesstrøm:



- bundet strøm i hvert atom:
- indre strømmer kansellerer
- induserer overflatesstrøm pr lengdeenhett:  $\dot{i}_m = \frac{I_m}{L}$
- ligner en spole!
- magnetfeltet styrkes inni materialet:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$
- lineær respons:  $B_m$  prop. med  $B_0 \Rightarrow B$  prop. med  $B_0$
- materialets relative permeabilitet  $\mu_r$ :

$$B = \mu_r B_0 \quad [\mu_r] = 1$$

(Jf.  $E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$  for dielektrikum)

- materialets permeabilitet:  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$   
(Jf.  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ )

Paramagnetisme: svak innretting av  $\vec{m}$  langs  $\vec{B}_0$ . Eks:  $\mu_r = 1.00002$  for Al

Diamagnetisme:  $\vec{B}_0$  induserer motsatt rettet  $\vec{m}$ .

Meget svak effekt i metall, avgjørende effekt i superledere der  $\vec{B}_m = -\vec{B}_0$ , slik at  $\vec{B} = 0$ .

## Ferromagnetisme

"Nabospinn" vekselvirker slik at parallele  $\vec{m}$  gir lavest energi:



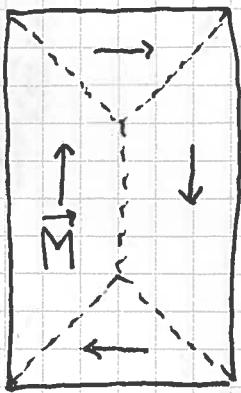
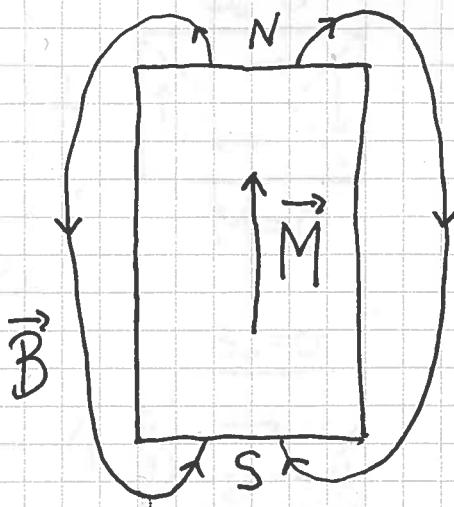
Eks: Fe, Ni, Co,  $Nd_2Fe_{14}B$  (Nd = neodym)

$\mu_r$  opp til  $10^3$  og mer

Gurie-temperaturen: Økende temp. T ødelegger innretningen av  $\vec{m}$ . Gir faseovergang fra ferromagnet til paramagnet ved kritisk temp.  $T_c$

Eks: Fe;  $T_c = 770^\circ C$

# Permanent-magnet vs umagnetisk ferromagnet:

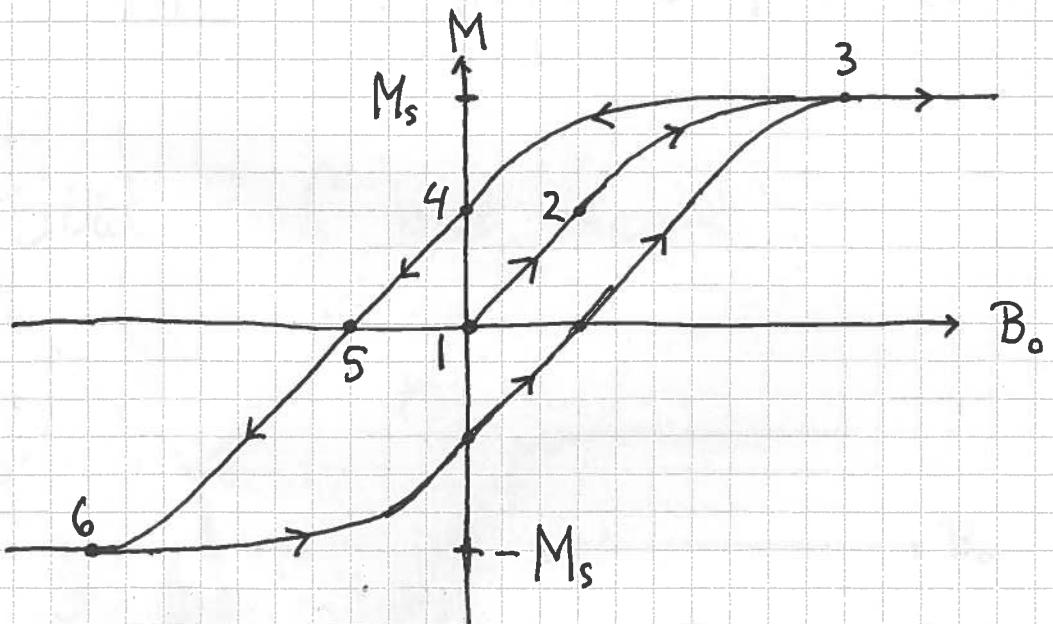
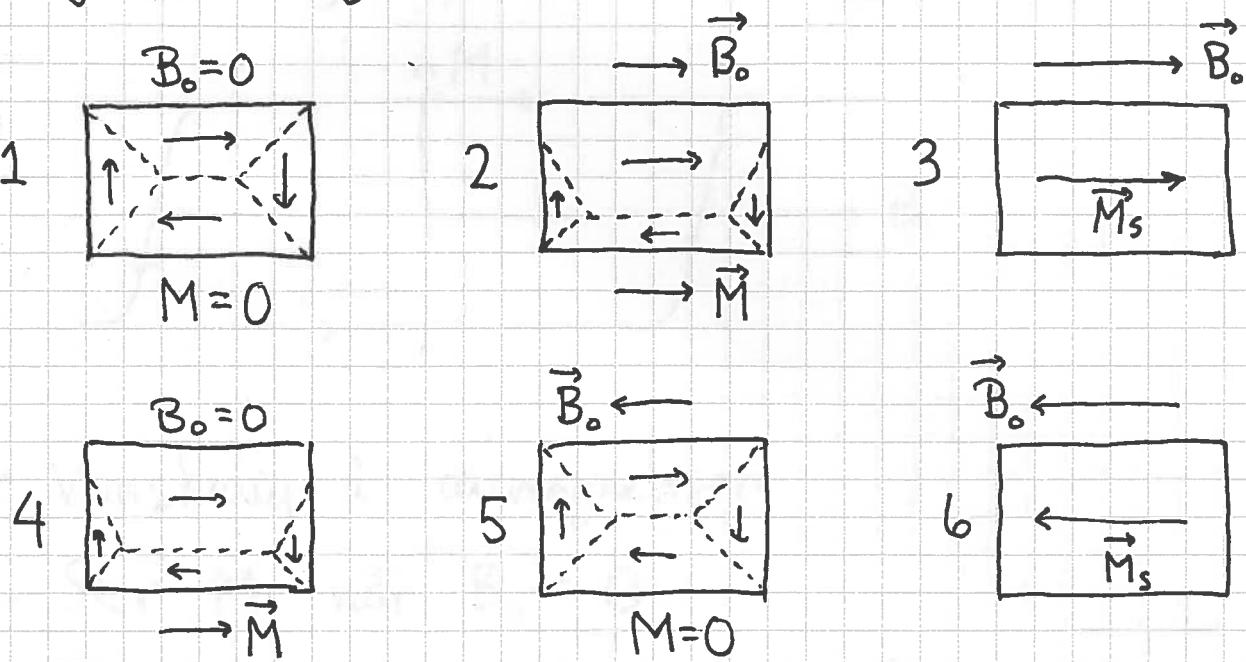


$B \approx 0$   
utenfor

- Stor energi omkring magneten,  $U_B = B^2 / 2\mu_0$
- Minimal vekselvirkningsenergi mellom atomære magnetiseringer  $\vec{m}$
- Eks: Neodymmagnet
- Liten energi omkring ( $B \approx 0$ )
- Større v.v. energi når domeneveggene (----)
- Typisk domene-størrelse:  $10^{-4} - 10^{-6} \text{ m}$
- Eks: Stål
- Magnetiseres i ytre felt  $\vec{B}_0$

# Magnetisk hysterese :

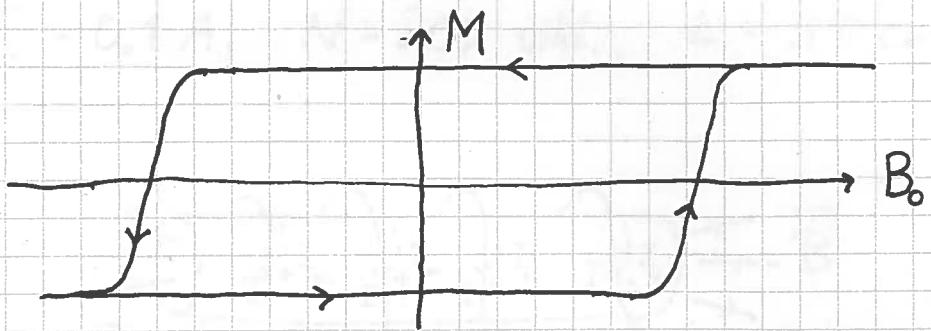
(170)



$M_s$  = metningsmagnetisering ; alle  $\vec{m}$  peker  
i samme retning ("saturation")

Permanentmagnet ("hard magnet") :

(171)



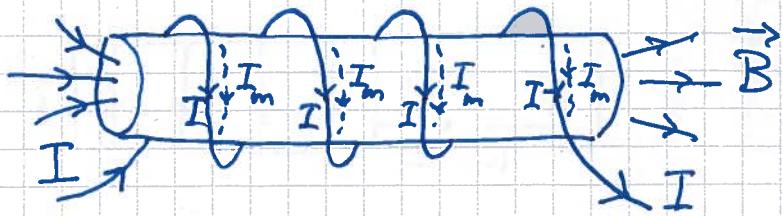
- Vanskelig å armagnetisere
- Stor  $M$  når  $B_0 = 0$
- Egnet som kjerne i spole (i AC-kretser)

Stål ("soft magnet") :



- Lett å (ar-)magnetisere
- Liten  $M$  når  $B_0 = 0$
- Egnet som kjerne i spole

Eks 1:  $B$  i spole med jernkjerne,  $\mu_r = 1000$ ,  
 $I = 0.1 \text{ A}$ ,  $N = 200$  vikl.,  $L = 40 \text{ cm}$



Spolestrøm  $I \Rightarrow$  "ytre felt"  $\vec{B}_0 = \mu_0 n I$  inni spolen,  
 der jernkjernen er. Jernet magnetiseres, med  $\vec{M}$   
 langs  $\vec{B}_0$ . Overflatesstrøm,  $I_m$  pr vikling, induseres.

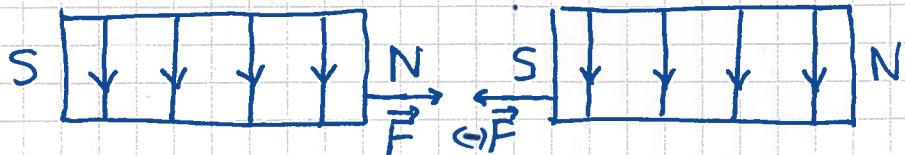
Magnetfeltet skyrkes med faktor  $\mu_r$

$$\Rightarrow B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I \quad (= \mu n I)$$

$$= 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{200}{0.40} \cdot 0.1 \quad \text{T}$$

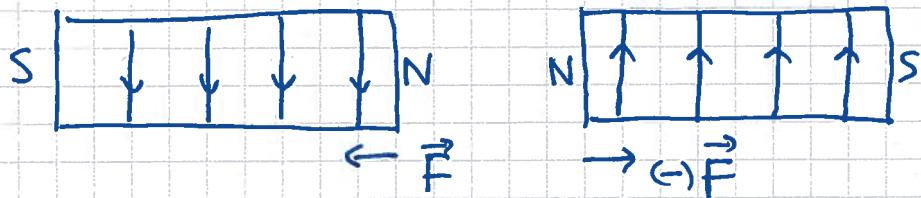
$$= 0.063 \text{ T} = \underline{\underline{63 \text{ mT}}}$$

Eks 2: Tilfrekning mellom motsatte poler (N og S), frastøtning mellom like poler.



Parallelle strømmer nærmest hverandre

⇒ Tilfrekning! (se s. 162)



Antiparalle strømmer nærmest hverandre

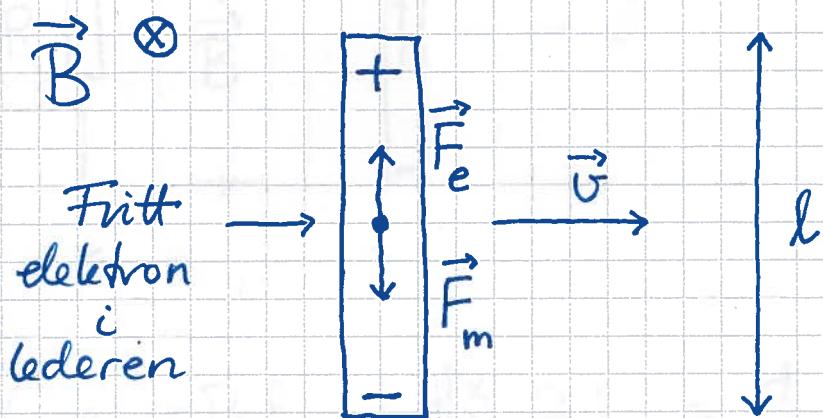
⇒ Frastøtning!

# Elektrodynamikk

[YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27]

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4 ; LHL 24.1]

Vi drar en ledet med lengde  $l$  gjennom et uniformt magnetfelt  $\vec{B}$ , med hastighet  $\vec{v} \perp \vec{B}$ :



$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$  har retning nedover og gir overskudd av elektroner nederst, underskudd øverst.

Et elektrisk felt  $\vec{E}$  er indusert i lederen, med retning fra pos. mot neg. ladning, dvs nedover.

Men da er det også indusert en spenning i lederen:  $\Delta V = E \cdot l$

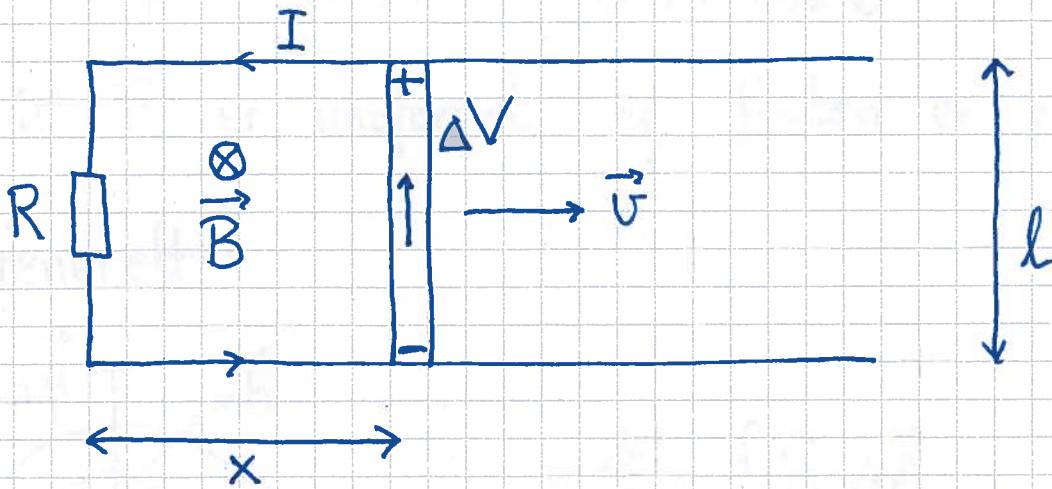
Likevekt når  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

(175)

$$\Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow \Delta V = vBl$$

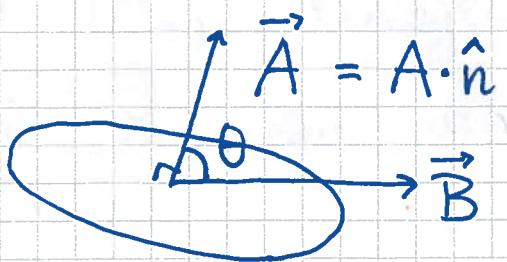
Spenningen  $\Delta V$  vil drive en strøm hvis vi lager lukket krets:  $I = \Delta V/R = vBl/R$



$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (Blx) = \frac{d}{dt} (B \cdot A)$$

med  $A = lx$  = areal omsluttet av strømsløyfa

# Magnetisk fluks [YF 27.3; LHL 23.7 (19.7)]

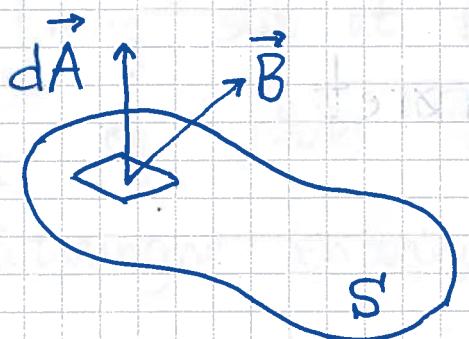


Magnetisk fluks gjennom flaten er

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

når  $\vec{B}$  er uniformt og flaten er plan.

Generelt:



$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

I eksemplet s. 175 har vi nå:

$$\Delta V = \leftrightarrow \frac{d\phi}{dt}$$

Faradays induksjonslov

Indusert spenning i sløyfe er lik endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet.

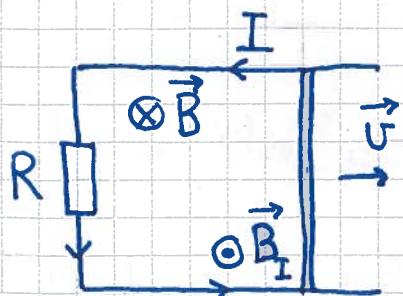
Dette viser seg å gjelde generelt, enten det er  $|\vec{A}|$ , retningen på  $\vec{A}$ ,  $|\vec{B}|$  eller retningen på  $\vec{B}$  som varierer med tiden  $t$ .

### Lenz' lov [YF 29.3 ; LHL 24.1]

"Naturen motsetter seg endringer"

Mer presist: Fortegnet på indusert spenning  $\Delta V$  er slik at (en eventuell) indusert strøm  $I$  får retning slik at tilhørende indusert magnetfelt  $\vec{B}_I$  og fluks  $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$  motvirker den påtvingne endringen representert ved  $\Delta\phi$ .

Eks:



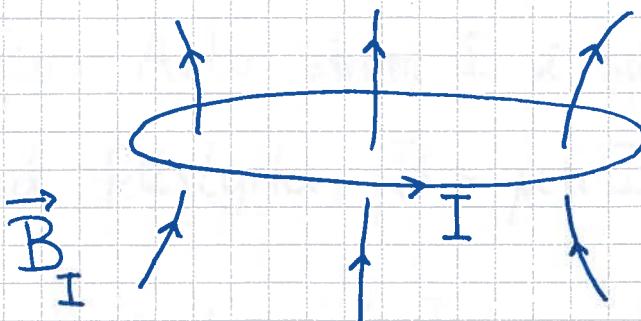
Påtvingen endring: Økt omsluttet fluks inn i planet (pga større areal)

Naturens svar: Indusert strøm

$I$  mot klokka, som gir omsluttet fluks  $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$  ut av planet, som motvirker endringen.

# Induktans [YF 30.2; LHL 25.1]

Selvinduktans :



Fra Biot - Savarts lov følger det at  $\vec{B}_I$  er proporsjonal med  $I$ , og dermed at omsluttet fluks

$$\phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

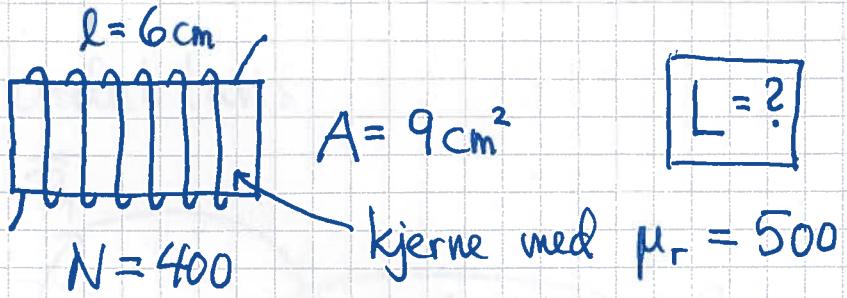
også er prop. med  $I$  :

$$\boxed{\phi = L \cdot I}$$

$L$  = sløyfes (selv-) induktans

Enhet:  $[L] = [\phi/I] = [B \cdot A/I] = T \cdot m^2/A$   
 $= H$  (henry)

Eks:



179

Løsn: Anta strøm  $I$  i spoletråden, og ideell spole med feltstyrke  $B = \mu_r \mu_0 A I$  overalt inni spolekjernen.

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\Rightarrow \Phi = NBA = N^2 \mu_r \mu_0 A I / l$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \underline{N^2 \mu_r \mu_0 A / l}$$

$$= 400^2 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-2}$$

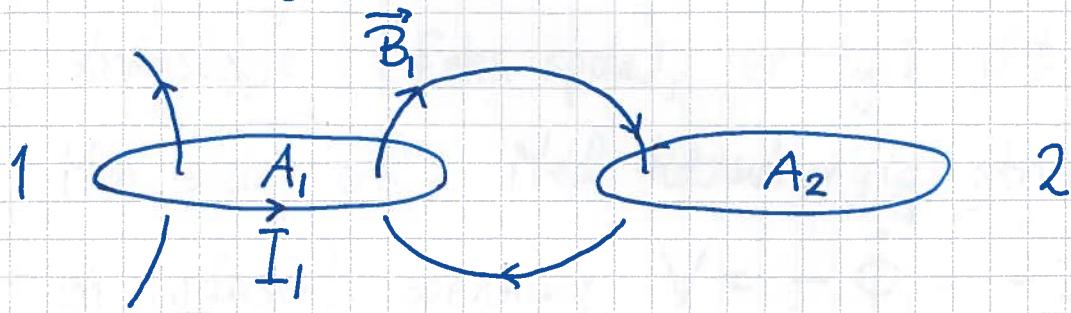
$$\approx \underline{1.5 \text{ H}}$$

- Merk at  $L$  øker med  $N^2$

- Med  $[L] = \text{H}$  og  $[A/l] = \text{m}$  ser vi at  
 $[\mu] = [\mu_0] = \text{H/m}$ .

$$(\text{Jf } [\varepsilon] = [\varepsilon_0] = \text{F/m})$$

## Gjensidig induktans



Strøm  $I_1$  i sløyfe 1  $\Rightarrow$  Fluks  $\phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$   
 omsluttet av sløyfe 2. Siden  $B_1$  er prop. med  $I_1$ ,  
 blir  $\phi_2$  prop. med  $I_1$ :  $\phi_2 = M_{21} \cdot I_1$

Og omvendt:  $I_2$  i sløyfe 2  $\Rightarrow \phi_1 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$   
 omsluttet av sløyfe 1, prop. med  $I_2$ :  $\phi_1 = M_{12} \cdot I_2$

Kan vises at  $M_{21} = M_{12} = M$ , dvs

$$\phi_2 = M I_1 \quad ; \quad \phi_1 = M I_2$$

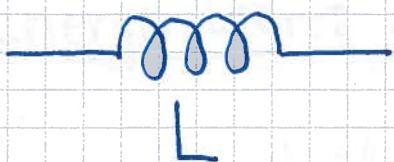
$M$  = sløyfenes gjensidige induktans

$$[M] = H \text{ (henry)}$$

Induksjon: Dersom  $dI/dt \neq 0$  i ei strømslayfe (f.eks. spole), er også  $d\phi/dt \neq 0$ .

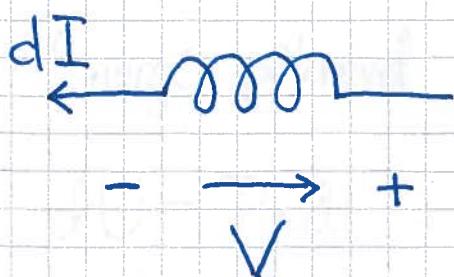
Med andre ord: Med tidsavhengig strøm  $I$  får en indusert spennning  $V = -\dot{\phi} = -L\dot{I}$ , med retning i tråd med Lenz' lov, dvs slik at påtrukningen endring i strømmen  $I$  motvirkes.

Spole som kretselement:

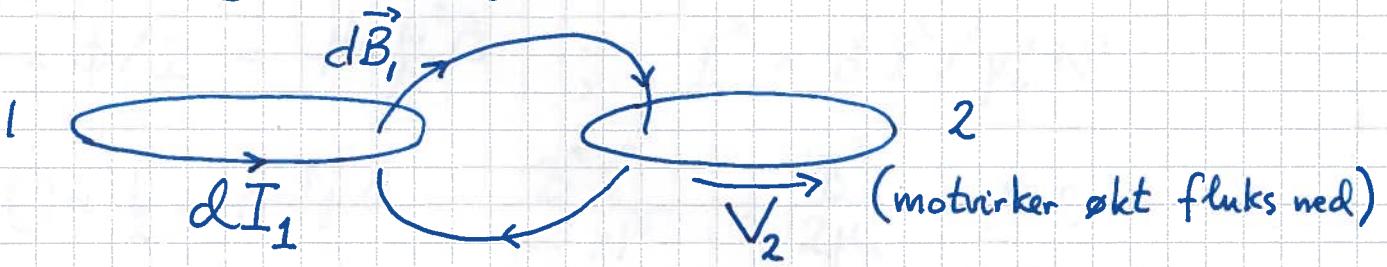


$$V = -L \frac{dI}{dt}$$

Retning på  $V$ :



## Gjensidig induksjon:



$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\phi}_2 = -M\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\phi}_1 = -M\dot{I}_2$$

Energi lagret i  $\vec{B}$ -felt [YF 30.3 ; LHL 25.3]

Regner ut arbeidet som må gjøres mot den induserte spenningen for å øke strømmen fra  $i=0$  til  $i=I$  i en ideell spole (dvs  $B=\mu_0 n I$  inni spolen).



Energi påkrevd for å øke strøm fra  $i$  til  $i+di$ :

$$dU = P \cdot dt = -v \cdot i \, dt = L \frac{di}{dt} \cdot i \, dt = L \cdot i \cdot di$$

Fra  $i=0$  til  $i=I$ :

$$U = \int dU = \int_0^I L i \, di = \underline{\underline{\frac{1}{2} LI^2}}$$

(183)

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I ; \quad \phi = NAB = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I ;$$

$$L = \phi / I = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} ; \quad I^2 = B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \cdot \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underline{A \cdot l}$$

= volum i spolen,  
der  $B \neq 0$

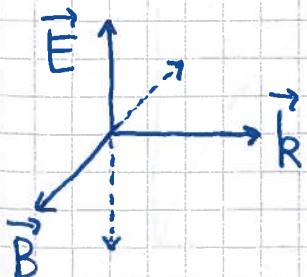
$\Rightarrow$  Energi pr volumenhet i magnetfelt :

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energitetthet i elektromagnetisk felt :

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Eks: Elektromagnetiske bølger (lys etc) er forplantning av  $\vec{E}$ -felt og  $\vec{B}$ -felt som begge står normalt på bølgens forplantningsretning, og på hverandre:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \lambda f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

$$E = c \cdot B \Rightarrow u_B = \frac{E^2/c^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_E$$

(siden  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ )

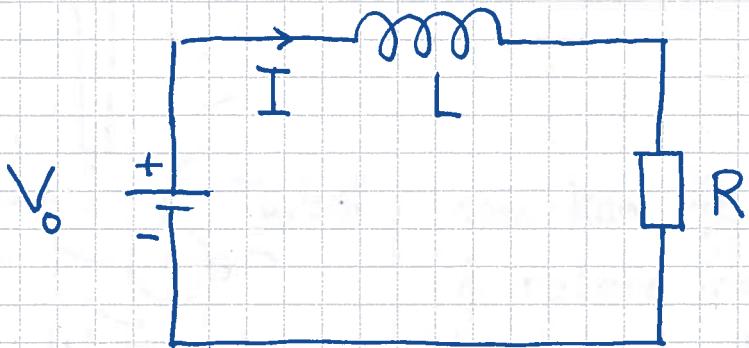
$$\Rightarrow u = 2u_E = \epsilon_0 E^2$$

# Kretser og anvendelser ; DC og AC

(184)

[YF 30.4+5+6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]

## ① RL-krets ; DC



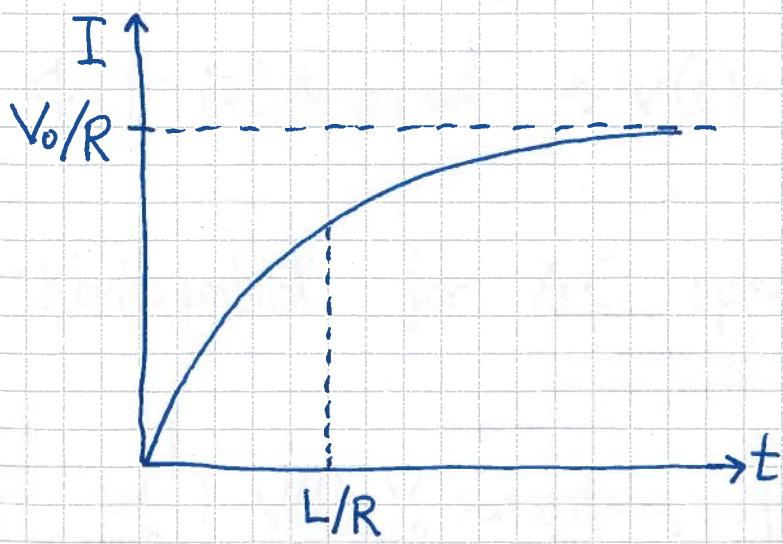
$V_o$  kobles til ved  $t = 0$

$$K2 : V_o - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning for  $I$  som for  $Q$  i RC-kretsen

$$\Rightarrow \text{Tilsvarende løsning: } I(t) = \frac{V_o}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

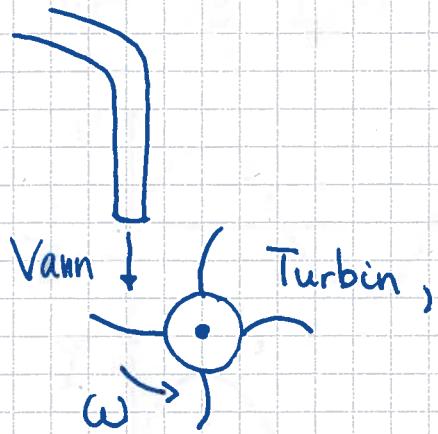
med tidskonstant  $\tau = L/R$



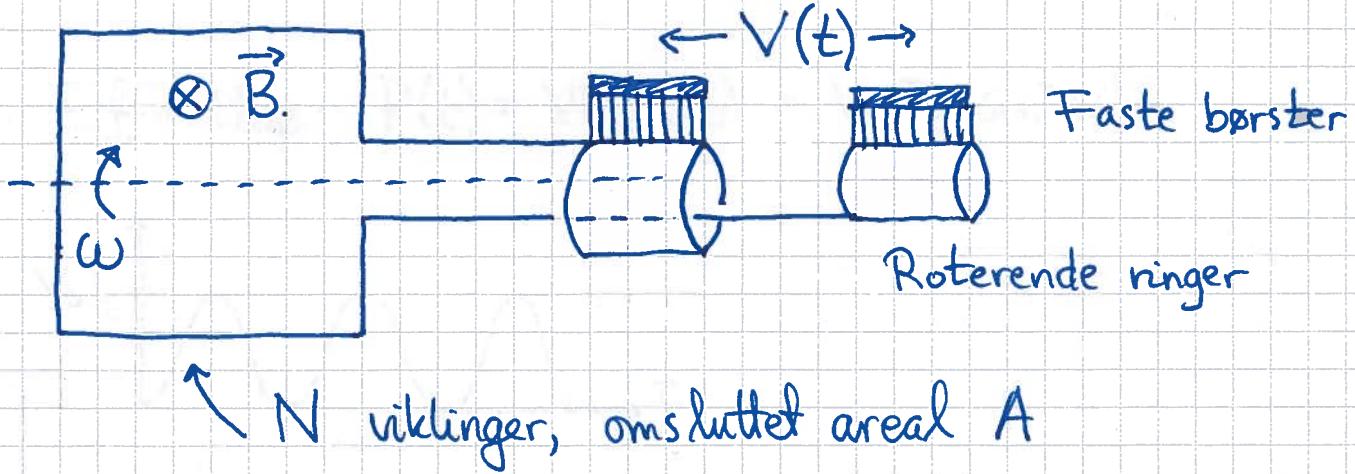
Induktansen  $L$  gir indusert motspenning i kretsen når vi med  $V_o$  prøver å øke strømmen. Derved blir  $I$  ikke umiddelbart lik  $V_o/R$ ; det tar litt tid; tidskala gitt av  $\tau = L/R$

# AC spenningskilde ( $AC = \text{alternating current}$ = vekselstrøm)

AC-generator ; prinsipp :



som kan få magnetter eller spoler til å rotere relativt hverandre og gi harmonisk tidsavhengig omsluttet fluks.



$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t \Rightarrow V(t) = V_0 \sin \omega t ; V_0 = NBA\omega$$

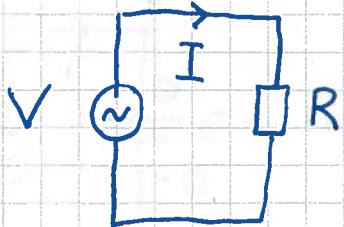
Kretssymbol for AC spenningskilde :



$$V(t) = V_0 \sin \omega t ; \text{ frekvens } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Europa: 50 Hz (USA: 60 Hz)

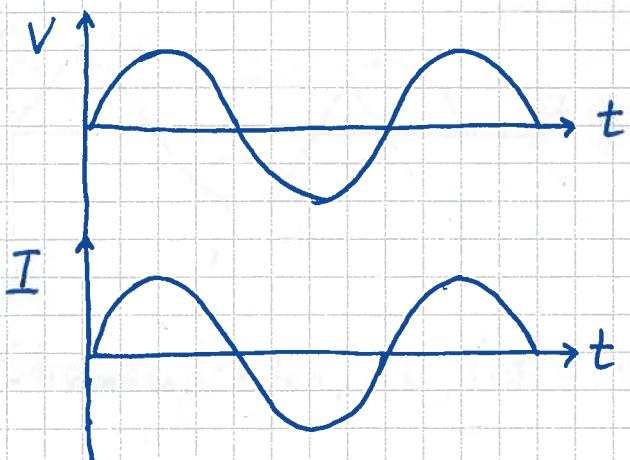
②



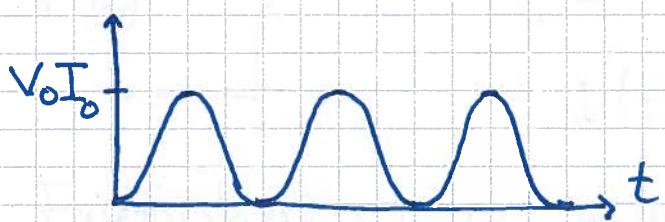
$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$V(t)$  og  $I(t)$  "svinger" fram og tilbake i fase:



$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$



$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

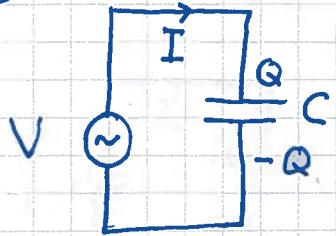
$$\text{Effektivverdier: } \langle P \rangle = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}} \text{ med}$$

$$V_{\text{rms}} = V_0 / \sqrt{2}, \quad I_{\text{rms}} = I_0 / \sqrt{2}$$

$$I \text{ veggkontakten: } V_{\text{rms}} \approx 230 \text{ V} ; \quad V_0 \approx 325 \text{ V}$$

$$(\text{Root Mean Square: } V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} = V_0 / \sqrt{2})$$

③

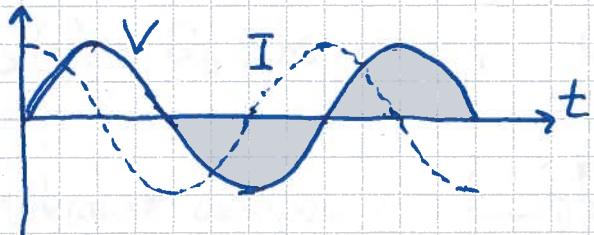


$$K2: V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

Dvs faseforskjell  $\pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ :

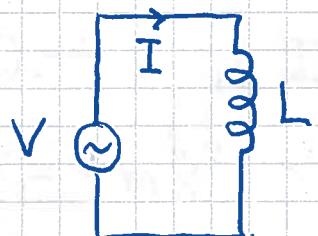


$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle \\ = \frac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Tapsfritt kretselement.

Strømamplittuden,  $I_0(\omega) = V_0 \omega C$ , øker med frekvensen.

④

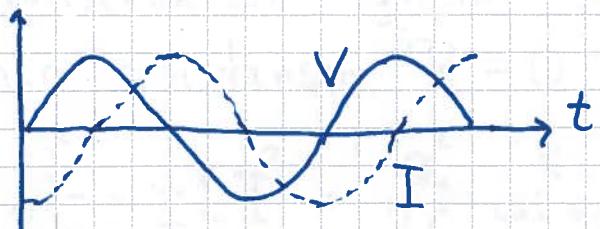


$$K2: V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = - \frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

Faseforskjell  $\leftarrow \pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ :

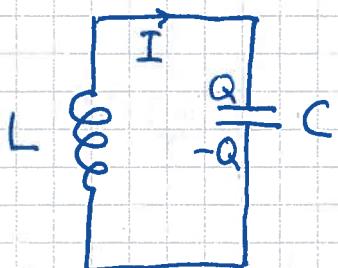


$$\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = 0$$

Tapsfritt.

$I_0(\omega) = V_0 / \omega L$  avtar med frekvensen.

## (5) LC-krets

Anta  $Q(0) = Q_0$ 

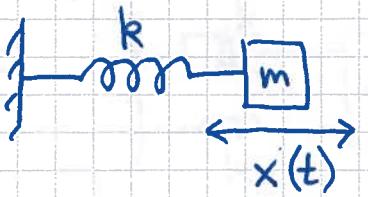
$$K2: -LI - Q/C = 0 ; I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

 $\Rightarrow$  Harmonisk oscillator!

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mekanisk analogi:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Analoge størrelser:

$$Q \leftrightarrow x ; I \leftrightarrow \dot{x} ; L \leftrightarrow m ; C \leftrightarrow 1/k$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = -\text{ii} \quad \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$$

Konservert system, ingen dissipasjon av energi  
når resistansen  $R = 0$ :

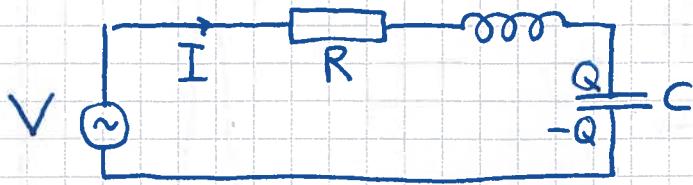
$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC} \sin^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant}$$

6

## RLC resonanskrets

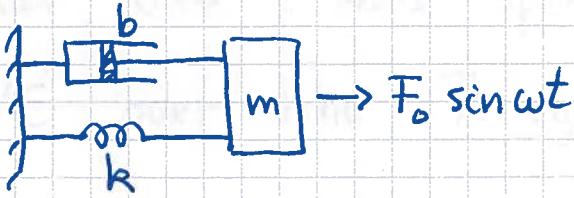
(189)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI - LI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

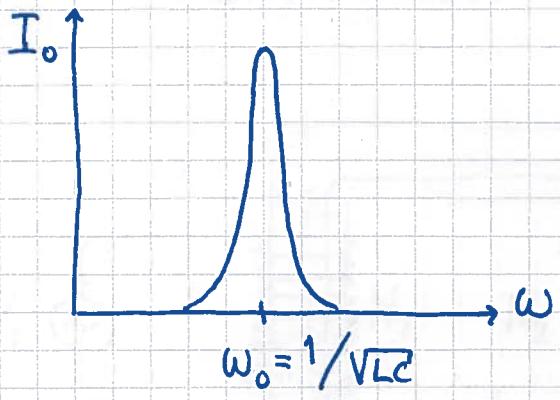
dvs  $b \leftrightarrow R$  og  $F_0 \leftrightarrow V_0$

$\Rightarrow$  Resonans når  $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , dvs maksimal strømamplitude  $I_0$  når  $\omega \approx \omega_0$ . Alt vi kan om det mek. syst. kan "oversettes" til RLC-kretsen:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} ; \quad 2\gamma = R/L$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \text{ med } I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



Halverdibredde:

$$\Delta\omega = 2\delta = R/L$$

Kvalitetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Møler  $I_0(\omega)$  og  $Q_0(\omega)$  ved å måle spenningene

$V_R = RI$  og  $V_C = Q/C$  over hhv  $R$  og  $C$ .

Impedans:

$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0(\omega)}$  = kretsens impedans; en slags

generalisert motstand for AC-kretser. Vi ser at

$[Z] = \Omega$ , og at  $Z_R = R$  (uavh. av  $\omega$ ),

$Z_C = 1/\omega C$ ,  $Z_L = \omega L$ .

For RLC resonanskretsen:

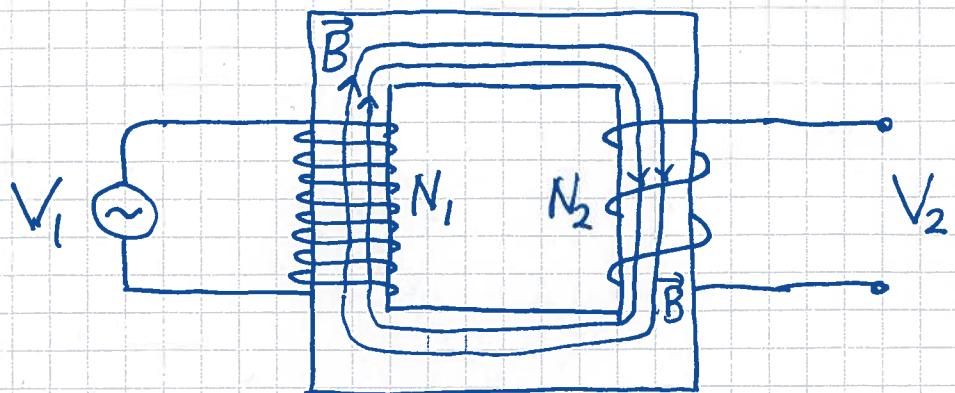
$$Z(\omega) = \omega L \cdot \sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + (2\delta/\omega)^2}$$

som blir spesielt liten når  $\omega = \omega_0$

(7)

## Transformator

(191)



Jernkjernen fører til at feltlinjene for  $\vec{B}$  følger jernet  
 $\Rightarrow$  samme  $|\vec{B}|$  i begge spoler

$$\phi_1 = N_1 AB, \quad \phi_2 = N_2 AB$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{\phi}_1}{\dot{\phi}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$\Rightarrow$  Spenningen inn ( $V_1$ ) kan transformeres  
 til spenning ut ( $V_2$ ), med redusert  
 eller økt amplitude, med hhv  $N_2 < N_1$   
 og  $N_2 > N_1$  :

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$