

Oppstart

①

- Emnesiden

- Referansegruppe

MTDT SELMA GUDMUNDSEN selmag

MTKOM MAREN FAGERHAUG JOHANSEN marenfj

MTDESIG AGNES GOUJON Agnesgo

MTKJ Deniz Yapici DENIZY

BELDIG Victor André Stokkvold Figueiredo vafigue

- Labinfo

DYNAMIKK

②

[OS1 1-12, 15 (openstax.org)]

[YF 1-11, 14 (Young og Freedman)]

[LL 1-6, 9 (Lien og Løvhøiden)]

Størrelser og enheter [OS1 1 ; YF1]

Eks, fysisk størrelse: Lengde (rundt Ekvator)

$L = 40075 \text{ km}$

↑ symbol ↑ tallverdi ↑ dekadisk forstørelse ($k = \text{kilo} = 10^3$) ← SI-enhet

evt. $L = \underbrace{4.0075 \cdot 10^7 \text{ m}}_{5 \text{ gjeldende siffer}} \approx \underbrace{4.0 \cdot 10^7 \text{ m}}_{2 \text{ gjeldende siffer}}$

Notasjon: $[L] = \text{m}$
(Enheteren for lengde er meter)

Grunnenheter i SI-systemet:

lengde	$[l] = \text{m}$	} mekanikk
masse	$[m] = \text{kg}$	
tid	$[t] = \text{s}$	
strømstyrke	$[I] = \text{A}$	} elmag
temperatur	$[T] = \text{K}$	} termisk fysikk
stoffmengde	$[n] = \text{mol}$	
lysstyrke	$[I] = \text{cd}$	

1m, 1kg osv defineres med utgangspunkt i eksakte verdier for ulike naturkonstanter (c, e, k_B, N_A, h) (siden 20.05.2019).

Størrelser med sammensatte enheter:

(3)

hastighet (fart) $[v] = \text{m/s}$

akselerasjon $[a] = (\text{m/s})/\text{s} = \text{m/s}^2$

Størrelser med avledet enhet:

kraft $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$

energi $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$

effekt $[P] = \text{J/s} = \text{W}$

Andre enheter:

1 tomme = 1 in = 25.4 mm

1 fot = 1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yard = 1 yd = 3 ft = 91.44 cm

1 ångstrøm = 1 Å = 0.1 nm = 10^{-10} m

$a_0 \approx 0.529 \text{ Å}$ (Bohr-radien)

1 knop = 1 kn = 1 kt = 1852 m/h (h = hour)

1 elektronvolt = 1 eV = $1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Eks 1: Hvor lang tid bruker lyset rundt ekrator?

Løsn 1: $v = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $l \approx 4 \cdot 10^7 \text{ m}$

$t = L/c \approx 0.13 \text{ s}$

Eks 2: Gjennomsnittlig strømpris i Trondheim i dag (11/1) er 108.64 øre pr kWh. Hvor mange joule får du da for 100 kr?

Løsn 2: $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ J/s} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$.

kWh for 100 kr = $100/1.0864 = 92.047$

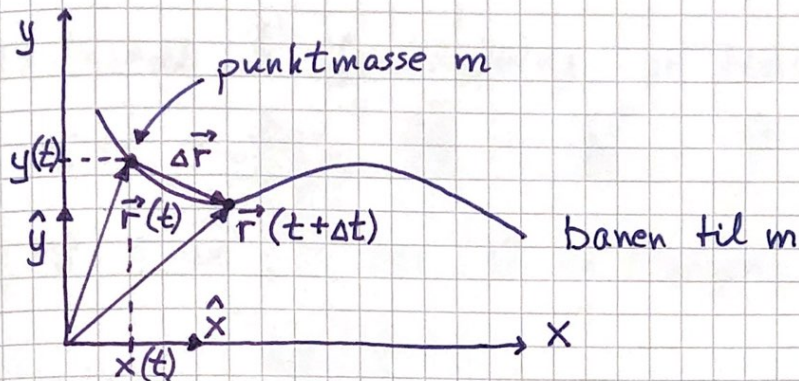
$\Rightarrow 92.047 \cdot 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} \approx 331 \cdot 10^6 \text{ J} = 331 \text{ MJ}$ for 100 kr

(M = mega = 10^6)

Kinematikk

[OS1 3,4 ; YF 2,3 ; LL1]

④



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = \text{posisjon ved tid } t$$

$$\text{i 3D: } \vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

enhetsvektorer : \hat{x} , \hat{y} , \hat{z}

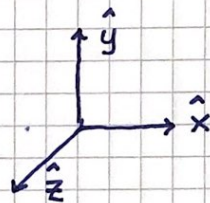
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$

(dvs dimensjonsløse)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$



$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

Forflytning ~~na~~ i løpet av Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet ^{def} = forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, dvs \vec{v} er tangent til banen

Akselerasjon ^{def} = hastighetsendring pr tidsenhet :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$, dvs i samme retning som fartsendringen

Kartesiske komponenter :

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{osu}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{osu}$$

Integrasjon av \vec{v} og \vec{a} gir hhv \vec{r} og \vec{v} :

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \quad (6)$$

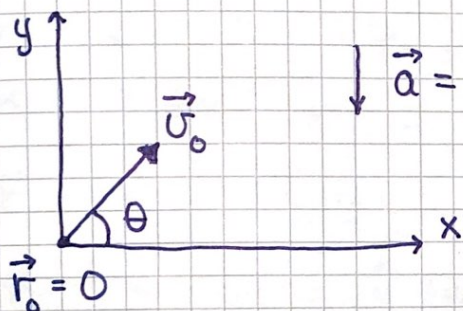
$$\Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis \vec{a} er konstant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

$$\text{der } \vec{v}_0 = \vec{v}(0) ; \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(0)$$

Eks: Skrått kast



Finn $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

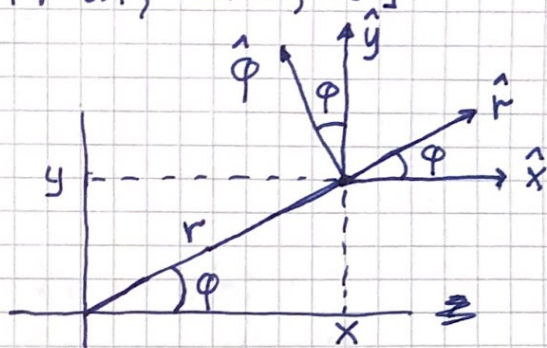
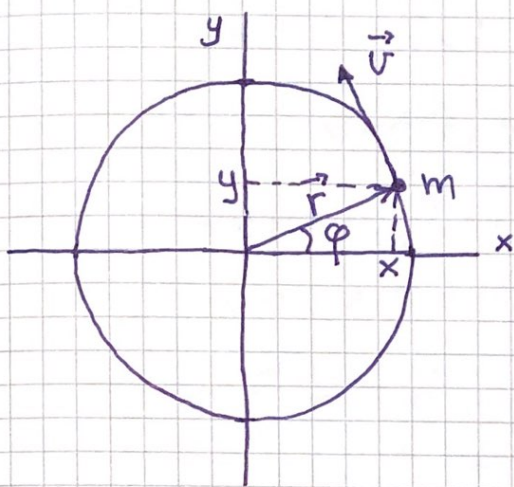
$$= \hat{x} \cdot v_0 t \cdot \cos \theta + \hat{y} (v_0 t \cdot \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2)$$

$$\text{Banen: } t = x / v_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow y(x) = x \cdot \tan \theta - \frac{1}{2} g x^2 / v_0^2 \cos^2 \theta$$

Sirkelbevegelse [OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

(7)



Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom \hat{x} og \hat{r} ;
positiv mot klokka

Fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r\cos\varphi + \hat{y}r\sin\varphi = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde/radius}$:

$$\Delta\varphi = \Delta s/r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidsenhet}$:

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = 1/s \quad (\text{evt. rad/s})$$

Med "bitteliten" (infinitesimal) dt er $dr = ds = r d\varphi$
slik at $v = dr/dt = r \cdot d\varphi/dt = r \cdot \omega$.

Retning: Vi ser at $\vec{v} \perp \vec{r}$ og at $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

Dermed:

$$\boxed{\vec{v} = r\omega\hat{\varphi}}$$

8

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

$$\vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \varphi(t) + \hat{y} r \sin \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -\hat{x} r \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi} + \hat{y} r \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}(t) &= -\hat{x} r \cos \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi} - \hat{x} r \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - \hat{y} r \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2 + \hat{y} r \cos \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi} \\ &= -\vec{r}(t) \cdot \omega^2 + \hat{\varphi} r \dot{\omega} \\ &= -\hat{r} r \omega^2 + \hat{\varphi} r \dot{\omega} \end{aligned}$$

Sentripetalakselerasjon: $\vec{a}_{\perp} = -r\omega^2 \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$,
med retning inn mot sirkelens sentrum.

Baneakselerasjon: $\vec{a}_{\parallel} = r\dot{\omega} \hat{\varphi} = \dot{v} \hat{\varphi}$,
med retning tangentielt til sirkelbanen.

Med uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω og v ,
er $\dot{\omega} = 0$ og $\dot{v} = 0$, og dermed $a_{\parallel} = 0$.

Andre størrelser som opptrer ved sirkelbevegelse:

vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$; $[\alpha] = \frac{1}{s^2}$ (evt $\frac{\text{rad}}{s^2}$)

periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} ; [T] = s$$

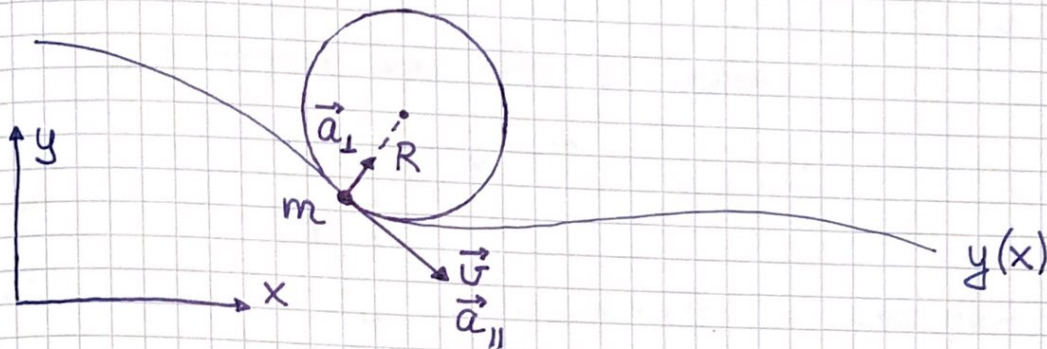
frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} ; [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz (hertz)}$$

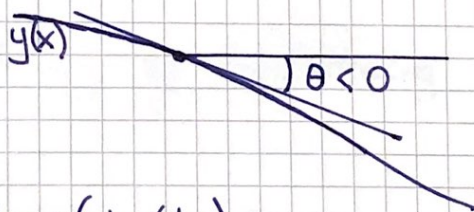
Bewegelse langs krum bane

(LAB!)

9



- R = krumningsradius = radius i sirkel som best tangerer banen $y(x)$
- $\frac{1}{R} =$ banens krumning = $|y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$
(se TFY4104 H2019 s.10-11 for utledning)
- $a_{\perp} = v^2/R$, retning inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow \frac{1}{R} = |y''|$
- $y'' = 0$ i vendepunkter og for rett bane $\Rightarrow \frac{1}{R} = 0; R \rightarrow \infty$
- banens helningsvinkel θ :



$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$$

Eks: Hva er $R(x)$ når $y(x) = x^2/2a$? ($a > 0$)

Løs: $y'(x) = x/a$; $y''(x) = 1/a \Rightarrow R(x) = a \cdot (1 + x^2/a^2)^{3/2}$

Dvs minst $R = a$ i $x = 0$.

Newtons Lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3]

10

m, \vec{v}, \vec{a} = hhv legemets masse, hastighet, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}$

N2: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

N3: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$; dvs krefter er vekselvirkninger mellom legemer : Hvis legeme 1 virker på legeme 2 med kraft \vec{F}_{12} , virker 2 på 1 med kraft $-\vec{F}_{12}$

Enhet: $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

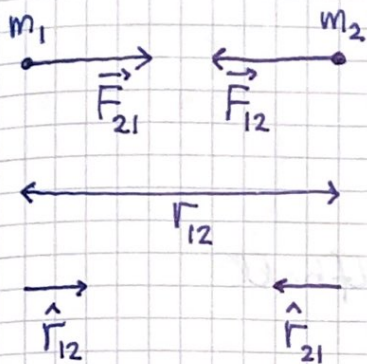
Legemets impuls (= bevegelsesmengde): $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Fundamentale krefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3 ; YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser
- Coulombkrefter: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger
- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

Gravitasjon:



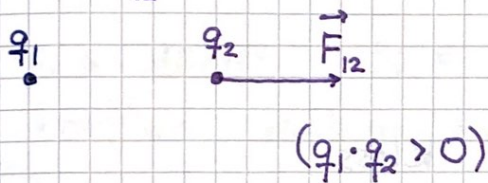
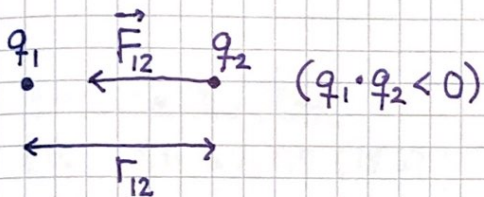
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombkrefter:



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Enhet for ladning:

$$[q] = C \text{ (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

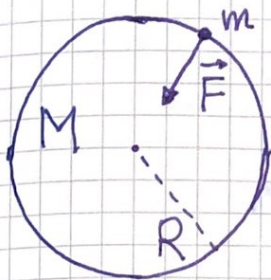
(vakuumpemittiviteten)

Krefter i mekanikken:

- tyngdekraften fra jorda
- kontaktkrefter mellom legemer i kontakt;
i bunn og grunn coulombkrefter

Tyngde [OS1 13.2, 5.4; YF 4.4; LL 2.5]

(12)



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; R \approx 6370 \text{ km}$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \text{ med } g = \frac{G \cdot M}{R^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

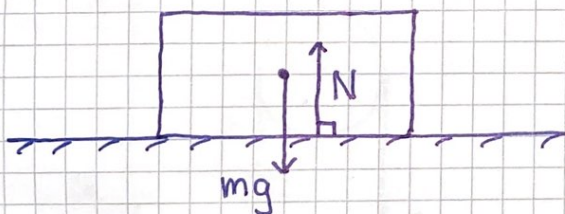
tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten

Fritt fall: Når $F = mg$ er eneste kraft på m , gir N2
 $mg = ma$, dvs $a = g$.

Kontaktkrefter

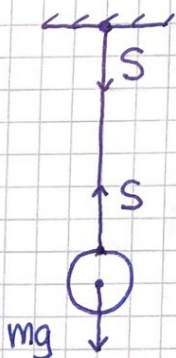
[OS1 5.6, 6.2, 6.4 (14.3); YF 4.1, 5.3; LL 3, 8]

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer



$$N = mg \text{ hvis kloss i ro (pga N1)}$$

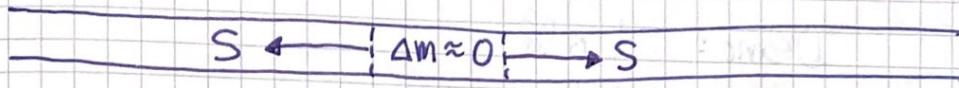
Snorkraft: S = kraft fra snora på legemet festet til snora



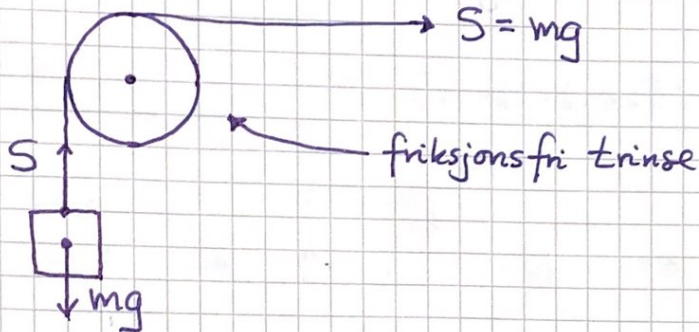
$$S = mg \text{ hvis kule i ro (pga N1)}$$

Spm: Hva er "N3-motkreftene" til N , S og mg ?

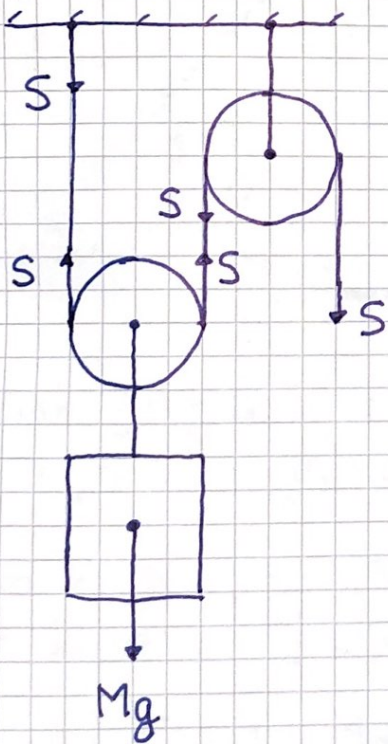
Snorer er som regel lette (tilnærmet masseløse), (13)
rette, og med konstant snordrag S :



Trinser endrer retningen på \vec{S} :



Talje:



N1 for kassa:

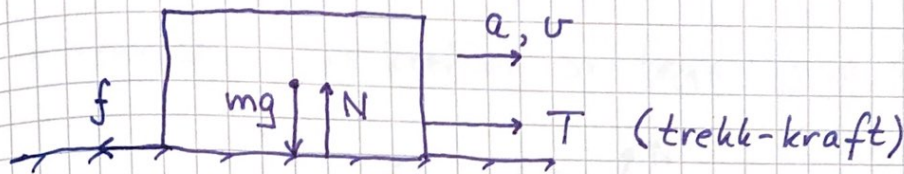
$$2S - Mg = 0$$

$$S = \frac{1}{2} Mg$$

Kraft på taket: $\frac{3}{2} Mg$

Friksjonskrefter: [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1]

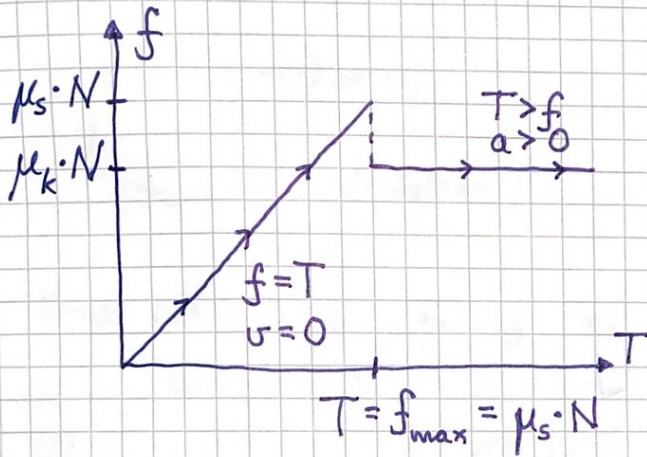
f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; \vec{f} rettet mot legemenes relative bevegelse



$N \perp$ bordet $\Rightarrow N = mg$

$N \parallel$ " " $\Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$

Exp. gir:



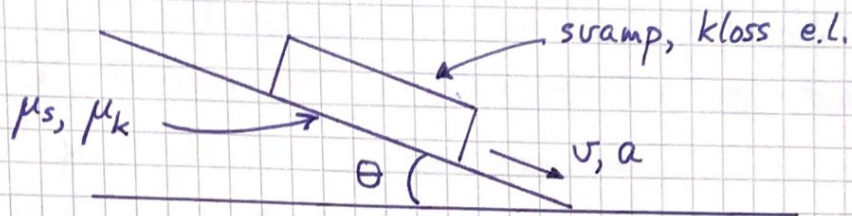
Statisk friksjon: Kloss i ro ($v = 0, a = 0$), $f = T$, $f_{max} = \mu_s \cdot N$, μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Kinetisk friksjon: Klossen glir, $f = \mu_k \cdot N$, μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

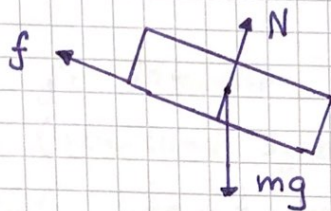
Enhet: $[\mu] = 1$. Som regel er $\mu_s > \mu_k$ fordi ujevnheter gir best grep når $v = 0$.

På løb: Gummi mot plast, $\mu_s \approx 0.6 - 1.0$

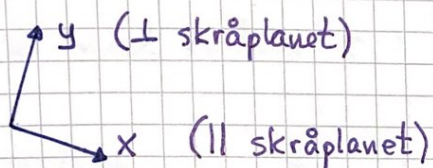
Løsningsstrategi via standard eksempel:



- Finn alle ytre krefter og tegn fritt-legeme-diagram



- Velg passende koordinatsystem. Dekomponér.



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene.

$$N1 \perp \text{skråplanet}: \quad N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{skråplanet}: \quad mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Statisk (} a=0 \text{): } f = mg \sin \theta \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \text{bare mulig så lenge } \tan \theta \leq \mu_s$$

$$\text{Kinetisk: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

- Måling av μ_s : Øker θ inntil legemet begynner å gli ved vinkel θ_{\max} ; da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$

Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7; YF 5.3; LL8]

(16)

Legeme med fart \vec{v} bremses av omgivende fluid (gass eller væske), karakterisert ved massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ . Et par viktige eksempler:

Fluid	ρ (kg/m^3)	μ ($\text{kg/m}\cdot\text{s}$)
Luft	1.2 - 1.3	$2 \cdot 10^{-5}$
Vann	1000	10^{-3}

Liten fart v gir laminær (pen, lagdelt) strømming av fluidet rundt (noenlunde symmetriske) legemer, og friksjonen f øker lineært med farten,

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' Lov)

Stor fart gir turbulent (uordnet) strømming av fluidet, og f øker kvadratisk med farten,

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}$$

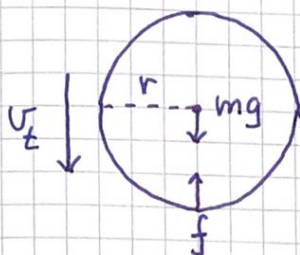
C_d = drag-koeffisienten

A = legemets areal målt $\perp \vec{v}$

Eks: Kule med radius r

$$C_d = 0.5, \quad A = \pi r^2$$

Eks: Terminalfart, dvs maks. fart v_t for kuler/baller som faller. Anta turbulens.

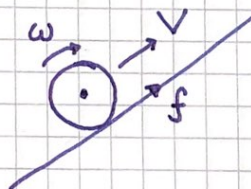
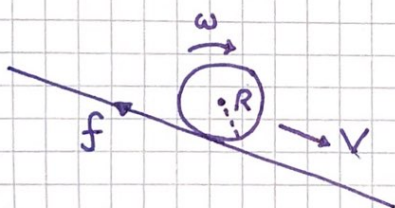


$$N1 \Rightarrow f = mg \Rightarrow \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2 = mg$$
$$\Rightarrow v_t = \left\{ \frac{2mg}{\rho A C_d} \right\}^{1/2}$$

med $A = \pi r^2$, $C_d = 0.5$, $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$

- Bordtennis ($r = 20 \text{ mm}$, $m = 2.7 \text{ g}$) : 8.4 m/s
- Golf ($r = 22 \text{ mm}$, $m = 46 \text{ g}$) : 31 m/s
- Regndråpe ($r \approx 1 \text{ mm}$, $m = 0.0042 \text{ g}$) : 6.6 m/s

Friksjon i labprosjektet:



Kula ruller uten å gli $\Rightarrow \omega = v/R$.

Friksjonskraften f sørger for at $\dot{\omega} > 0$ nedover og $\dot{\omega} < 0$ oppover.

Friksjonen er statisk, og mekanisk energi er bevart.

Arbeid og energi [OS1 7,8; YF 6,7; LL 4]

(18)

Arbeid [OS1 7.1; YF 6.1-6.3; LL 4.1]

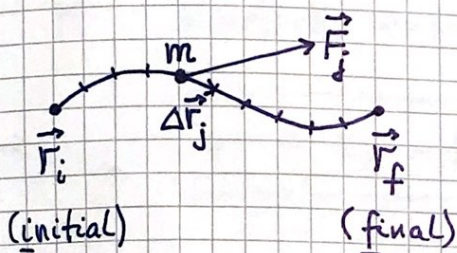
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \cdot \text{forflytning}$



$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$\text{Enhet: } [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \cdot \Delta r_j \cdot \cos \theta_j$$



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av \vec{F} på massen m

Effekt [OS1 7.4; YF 6.4; LL 4.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{arbeid (evt. energi) per tidsenhet}$

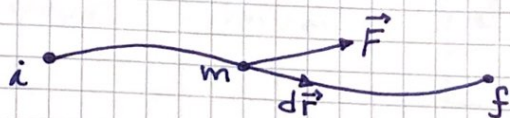
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2; YF6.2; LL4.2]

(19)

Vi bruker def. av arbeid, og N2:



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

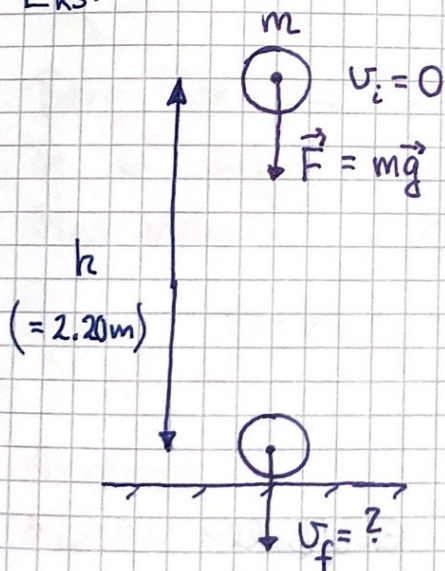
$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_i^f d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Eks:



$$K_i = 0, \quad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$W = F \cdot h = mgh$$

$$W = \Delta K$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

$$(\approx 6.57 \text{ m/s})$$

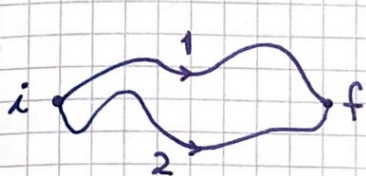
Konservative krefter og potensiell energi

[OS1 8.1-8.4 ; YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

\vec{F} er konservativ dersom $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

↑ integral rundt lukket bane

Da er arbeidet uavhengig av veien fra i til f :



$$W_1 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1$$

$$W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$\Rightarrow W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\Rightarrow W_1 = W_2$, dvs uavh. av veien

Forskjellen i potensiell energi, $\Delta U = U_f - U_i$, er nå definert som

$$\Delta U = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning, og vi velger hvor vi vil sette $U=0$.

Med valget $U(\vec{r}_0) = 0$ er

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Anvendt på kjent (?) eksempel:

Masse m i tyngdefeltet med $y=0$ og $U=0$ på bakken.

Da er $\vec{F} = -mg\hat{y}$ og

$$U(h) = - \int_0^h (-mg) dy = \underline{mgh}$$

Kjent $U(\vec{r})$ gir \vec{F} ved derivasjon:

(21)

$$1D: dU = -F(x) dx \Rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til U :

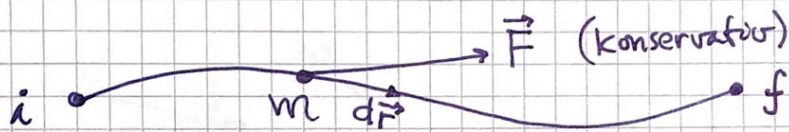
$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z}$$

= en vektor i den retning som U øker raskest
 $\Rightarrow \vec{F}$ peker i den retning U avtar raskest

Eks: Masse m i tyngdefeltet

$$U = U(y) = mgy \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \frac{\partial U}{\partial y} = mg$$
$$\Rightarrow \vec{F} = -mg\hat{y}; \text{ OK!}$$

Bevaring av mekanisk energi [OST 8.3; YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\Delta K = K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

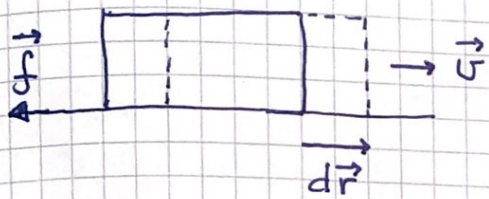
$$\Rightarrow K_f - K_i = U_i - U_f \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$$

Dvs: Total mekanisk energi, $E = K + U$, er bevart i et konservativt system.

Eks: Masse m som slippes i tyngdefeltet.

$$y_i = h, v_i = 0, y_f = 0, v_f = ? \quad K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1; YF 7.3; LL 4.5] (22)



$$dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \text{ med}$$

kinetisk friksjon da \vec{f} er
motsatt rettet $d\vec{r}$

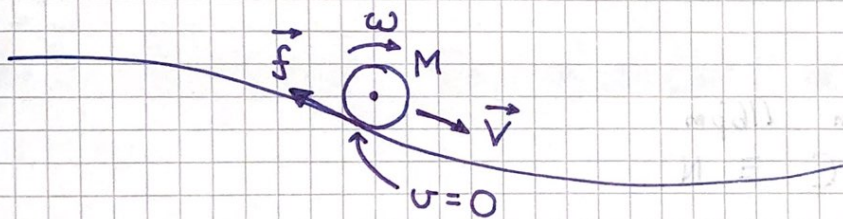
Mekanisk energi omdannes til varme, lyd etc.

Siden $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ er kinetisk \vec{f} ikke konservativ.

Men statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi, ettersom relativ forflytning $d\vec{r} = 0$.

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

Lab: Ren rulling (dvs uten å gli) av kule.



Kulas kontaktpunkt med banen er i ro!

Dermed statisk friksjon \vec{f} og mekanisk energibevarelse.

“Komplikasjon”: Kinetisk rotasjonsenergi pga kulas rotasjon om en akse gjennom massesenteret (CM), i tillegg til translasjonsenergi ($\frac{1}{2}MV^2$) knyttet til at CM beveger seg med hastighet \vec{V} .

Massecenter [OS1 9.6; YF 8.5; LL 5.6, 5.8, 6.1] (23)
 eller tyngdepunkt.

$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad \text{er massecenteret (CM) for } N \text{ punktmasser } m_1, m_2, \dots, m_N \text{ i posisjoner } \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse.}$$

For kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r} dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

$$dm = \begin{cases} \lambda dl & \lambda, \sigma, \rho = \text{masse pr lengde-, flate-,} \\ \sigma dA & \text{volumenhet} \\ \rho dV & dl, dA, dV = \text{lengde-, flate-, volumelement} \end{cases}$$

Med uniform massefordeling (konstant massetetthet):

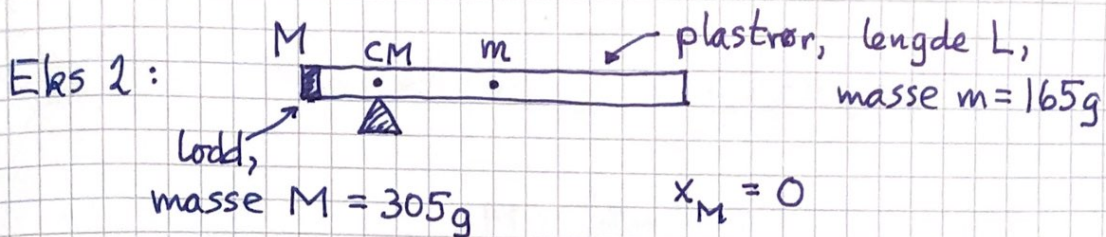
$$dm = \frac{M}{L} dl \text{ (1D)}; \quad dm = \frac{M}{A} dA \text{ (2D)}; \quad dm = \frac{M}{V} dV \text{ (3D)}$$

Eks1: HCN, blåsyre, lineært, H-C \approx 109 pm, C \equiv N \approx 116 pm

H	C	N	
•	•	•	
x = 0	109	225 pm	
m = 1u	12u	14u	(u = 1.66 · 10 ⁻²⁷ kg)

$$\Rightarrow \bar{x}_{CM} = \frac{1}{27u} \{ 0 \cdot 1u + 109 \text{ pm} \cdot 12u + 225 \text{ pm} \cdot 14u \} \approx 165 \text{ pm}$$

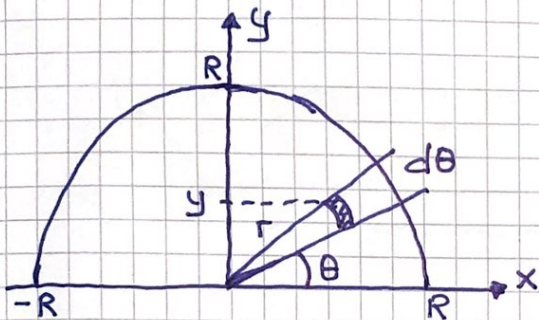
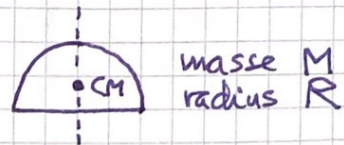
dvs 56 pm fra C og 60 pm fra N



(24)

$$\Rightarrow \bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{m \cdot L}{2(m+M)} \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 3: Halv sirkulær plate



$$dA = r d\theta \cdot dr ; A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

$$\vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y} \quad (\bar{x}_{CM} = 0)$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin\theta \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3 ; \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \int_0^\pi (-\cos\theta) = 1 + 1 = 2$$

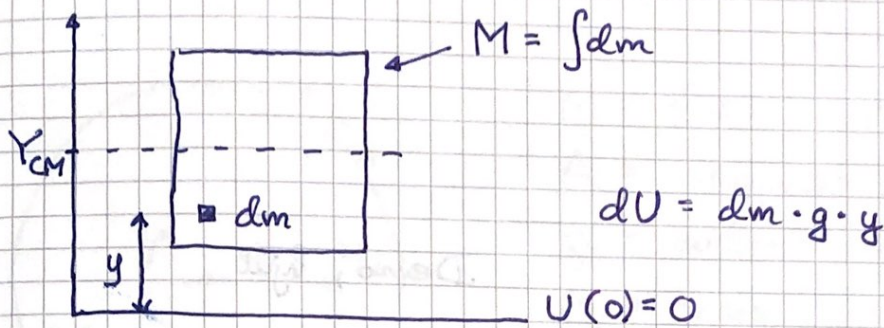
$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{\underline{0.42R}}$$

Halvsirkelformet bølge: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$

Halvdel av kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$

Eks 4: Potensiell energi i tyngdefeltet

(25)

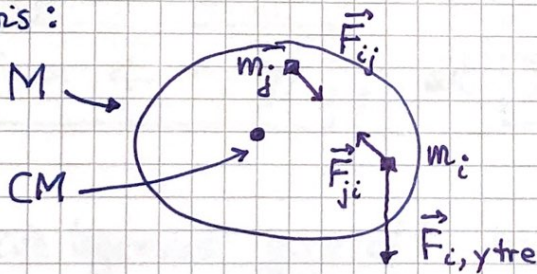


$$U = \int dU = \int g y dm = \underline{\underline{g \cdot M \cdot Y_{CM}}}$$

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6; YF 8.5; LL 5.8]

Kast som gir både translasjon og rotasjon antyder at CM beveger seg som om hele massen var samlet i CM.

Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Legger sammen N2 for alle m_i i legemet/systemet:

$$\text{Venstre side: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{CM} \} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\text{Høyre side: } \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\text{netto ytre kraft på legemet, } \vec{F}_{ytre}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga N3}} = \vec{F}_{ytre}$$

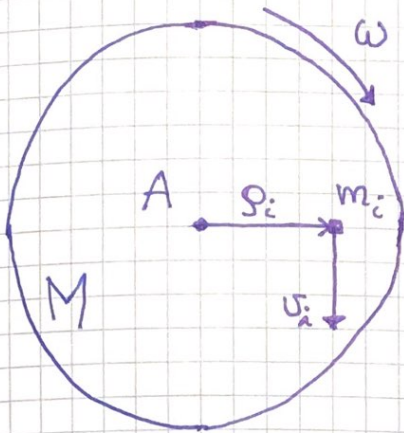
$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

N2 for CM

Rotasjonsenergi og treghetsmoment

(26)

[OS1 10.4, 10.5 ; YF 9.4-9.6 ; LL 6.2-6.4]



$$M = \sum_i m_i = \text{legemets masse}$$

A = rotasjonsaksen

ρ_i = avstand fra m_i til A

(r_i = avstand fra m_i til origo)

$v_i = \rho_i \omega$ = farten til m_i

ω = legemets vinkelhastighet

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$$

= kinetisk energi for m_i

⇒ Legemets totale rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Legemets treghetsmoment, mhp aksen A:

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 ; \text{ evt } I = \int \rho^2 dm \text{ for kontinuerlig massefordeling}$$

Stive legemers generelle bevegelse: Translasjon av CM (fart \vec{V}) kombinert med rotasjon om akse gjennom CM (vinkelfart ω ; evt $\vec{\omega}$ med retning langs rotasjonsaksen).


Total kin. energi: (se utlagt notat for utledning)

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

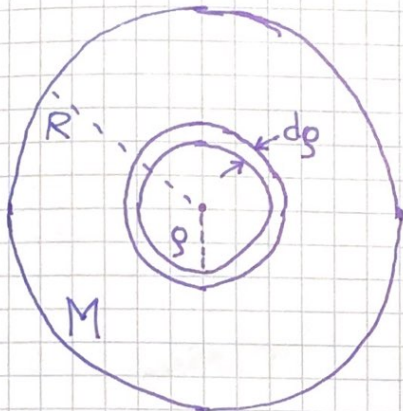
Notasjon: Vi skriver I_0 for treghetsmoment mhp akse gjennom CM.

Eks 1: Ring og hul sylinder

(27)

M  $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$

Eks 2: Kompakt skive og sylinder



Tynn ring med radius ρ og tykkelse $d\rho$ har areal $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ og dermed treghetsmoment

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 \frac{M}{A} dA$$
$$= \rho^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$

$$\Rightarrow \text{Hele skiva: } I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\frac{1}{2}MR^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tynt kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3}MR^2 \\ \text{Kule (kompakt): } I_0 = \frac{2}{5}MR^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Se øving og LF} \\ \text{for detaljer.} \end{array}$$

Oppsummert, for "rullende" legemer:

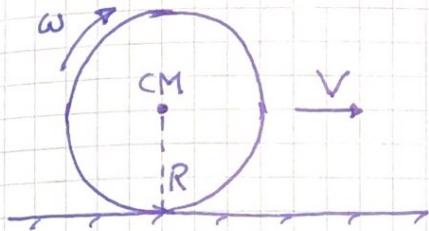
$$\underline{I_0 = c \cdot MR^2}$$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c-verdi	1	2/3	1/2	2/5

Ren rulling

[OS1 11.1; YF 10.3; LL 6.7, 6.8]

(28)



Vi ser på 1 hel omdreining om CM:

$$\omega = 2\pi/T \quad \text{og} \quad V = 2\pi R/T$$

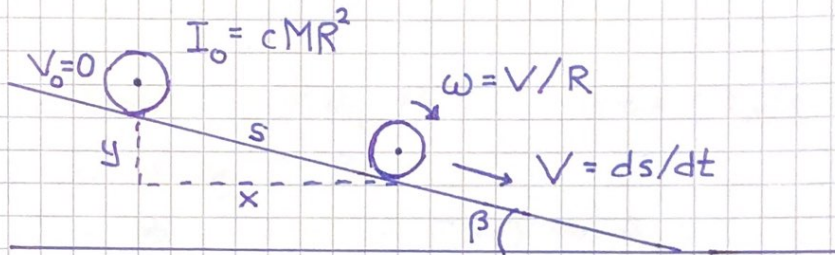
$$\Rightarrow \boxed{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2}MV^2}$$

Eks: Kompakt kule, $c = 2/5 \Rightarrow \underline{K = \frac{7}{10}MV^2}$

På skråplan:



$V = ? \quad A = ? \quad f = ? \quad \beta_{\max} = ?$ (dvs uten å gli)

Løsning: Mekanisk energi er bevart (statisk friksjon)

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2}MV^2 \Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{2gy/(1+c)}} \quad [\Rightarrow \text{Kula er raskest!}]$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=V_y} = \underbrace{\sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2Vy}}_{=dV/dy} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \cdot \sin\beta}_{=dy/dt} = \underline{\underline{\frac{g \sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon ($f=0$) er $A = g \sin\beta$ (se s. 15). Nå er A mindre, så \vec{f} må ha retning oppover skråplanet:

$$N_2 \Rightarrow Mg \sin\beta - f = MA = \frac{Mg \sin\beta}{1+c} \Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta}}$$

Ren rulling og statisk friksjon bare mulig hvis $f \leq \mu_s \cdot N$.

Dermed: $\frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s \cdot Mg \cos \beta$

(29)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}}}$$

Eks (lab): Kule, $c = 2/5$, og $\mu_s = 0.5$ gir

$$\beta_{\max} = \arctan \left\{ 0.5 \cdot \frac{7/5}{2/5} \right\} = \arctan \frac{7}{4} \approx \underline{60^\circ}$$

Ren rulling på krum bane: Velger $\beta > 0$ i motbakke.

V , A og f som på skråplan ($A = A_{||} =$ baneakselerasjon)

Baneform: $y(x)$ Helningsvinkel: $\beta(x) = \arctan(y'(x))$

Krumningsradius: $R = [1 + (y')^2]^{3/2} / y''$

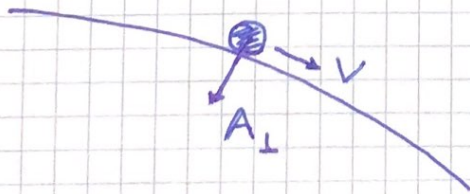
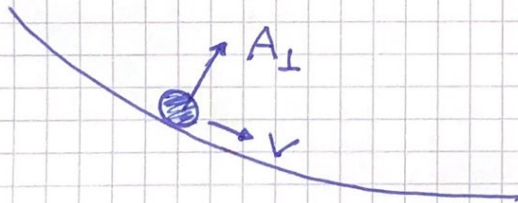
Sentripetalakselerasjon: $A_{\perp} = v^2 / R$

$N \perp$ banen: $N - Mg \cos \beta = MA_{\perp} \Rightarrow N = Mg \cos \beta + MA_{\perp}$

Stemmer fortegnet på R og A_{\perp} ?

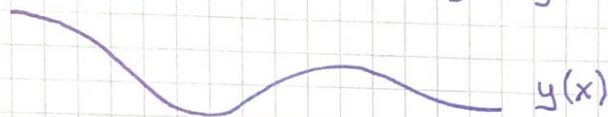
Ja: Krumning oppover $\Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow R > 0 \Rightarrow A_{\perp} > 0$

$\Rightarrow N > Mg \cos \beta$; OK!



Simulering av Labforsøket :

- Skrukehøydene $\{Y_0, \dots, Y_7\}$ beregnes med tilfeldige tall som gir bane med både "berg" og "dal":



Tilhørende $\{X_0, \dots, X_7\}$ er $0, 200, \dots, 1400$ mm.

- Funksjonen `scipy.interpolate.cubic spline` interpolerer med 3.gradsfunksjoner mellom skruene.
- Med gitt $y(x)$ kan alle aktuelle størrelser beregnes: $V, A_{\parallel}, A_{\perp}, f, N, K, V, E, \dots$
- Tidsbruk: Med fast $\Delta x = 1$ mm og $\Delta t = \Delta x / V_x$ blir $t = \sum \Delta t = \Delta x \sum V_x^{-1}$, med $V_x = V \cos \beta$

Eksperiment :

- Filme (månst) 10 rulleforsøk med mobilkamera.
- Måle $\{t, x, y\}$ med programmet `tracker`.

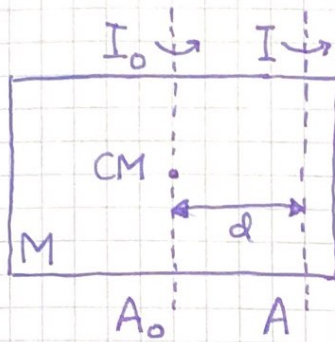
Dataanalyse :

- Beregne tap i mekanisk energi (middelverdi og standardfeil)
- Figurer: $y(x), f(x), N(x), |f/N|, V_{\text{num}}(x)$ vs $V_{\text{exp}}(x), \dots$
- Diskutere resultatene

Rapport :

- Jupyter notebook. Leveres pr epost som `.html` eller `.pdf`.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

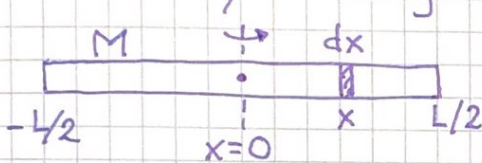


Aksen A_0 gjennom CM og $A \parallel A_0$:

$$I = I_0 + M \cdot d^2$$

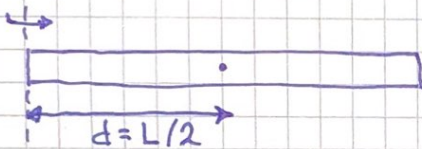
[Utleddning i notat]

Eks 1: Tynn stang eller plate



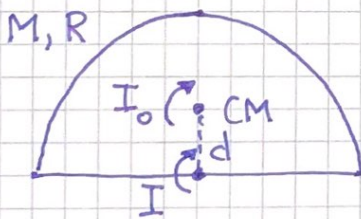
$$g = x, \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = I_0 + Md^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eks 2: I_0 for halv sirkulær plate



For hel plate med masse $2M$:

$$I_{20} = \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} I_{20} = \frac{1}{2} MR^2$$

Fra før (s. 24): $d = 4R/3\pi$

$$\Rightarrow I_0 = I - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) MR^2 \approx \underline{0.32 MR^2}$$

Impuls. Kollisjoner. Rakett

(32)

[OS1 9 ; YF8 ; LL5]

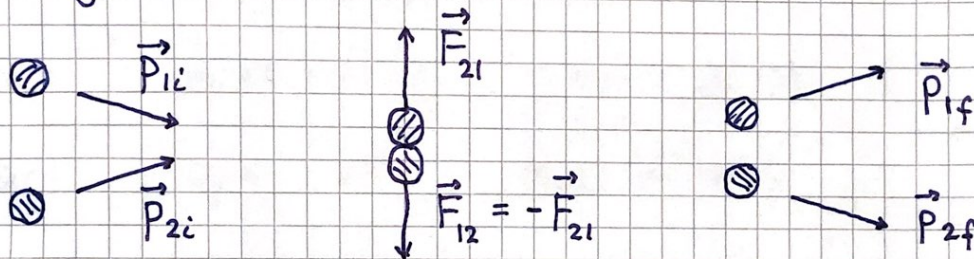
N2 for masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$\vec{p} = m\vec{v} =$ massens impuls (= beregelsesmengde)

N2: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ $[p] = \text{kg}\cdot\text{m/s}$

Impulsbevarelse: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ bevart

Kollisjon:



N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \xrightarrow{N2} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{TOT}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls.

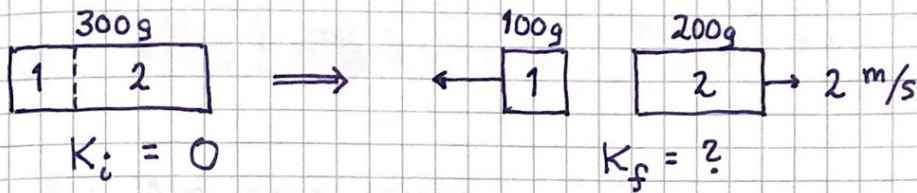
Kollisjoner (støt) er typisk kortvarige, slik at $\Delta U \approx 0$ og $\Delta E \approx \Delta K \leq 0$. Mek. energi E kan gå tapt pga deformasjon og friksjon.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

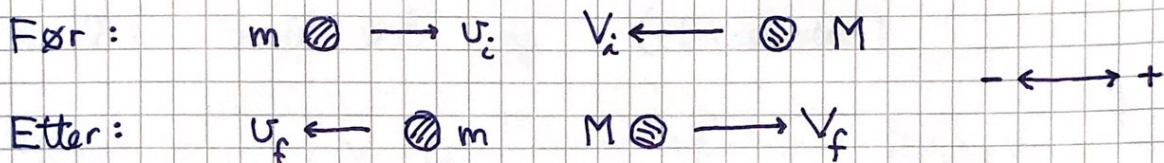
Fullstendig uelastisk støt når legemene henger sammen med felles slutfart. Da er $|\Delta E|$ maksimal.

Eks: "Eksplosjon"



Løsn: $p_1 = \leftarrow p_2 \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s} \Rightarrow K_f = K_1 + K_2$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 4^2 \text{ J} = 0.8 \text{ J} \\ K_2 &= \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot 2^2 \text{ J} = 0.4 \text{ J} \end{aligned} \right\} K_f = \underline{\underline{1.2 \text{ J}}}$$

Sentralt støt (1D)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m u_i + M V_i = m u_f + M V_f \quad (1)$$

Fullstendig uelastisk (delvis uelastisk ikke løsbart):

$$\otimes \otimes \rightarrow u_f = V_f = \frac{m u_i + M V_i}{m + M}$$

$$\text{Elastisk, } \Delta K = 0: \frac{1}{2} m u_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \quad (2)$$

Skriv om (1) og (2), og bruk 3. kvadratsetning:

$$m(u_i - u_f) = M(V_f - V_i) \quad (1)$$

$$m(u_i - u_f)(u_i + u_f) = M(V_f - V_i)(V_f + V_i) \quad (2)$$

$$(2) \text{ dividert med } (1) \text{ gcr } u_i + u_f = V_f + V_i \quad (3)$$

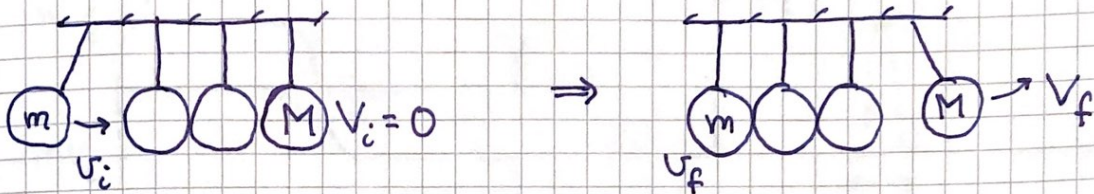
hvoretter $M \cdot (3) - (1)$ og $m \cdot (3) + (1)$ gcr hhv:

$$v_f = \frac{M}{m+M} \left\{ 2v_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V_f = \frac{m}{M+m} \left\{ \cancel{2v_i} + v_i \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

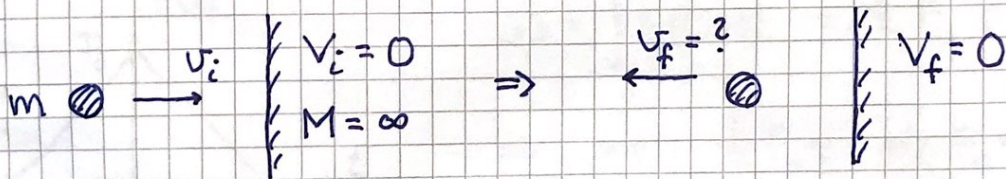
ombytte
 $m \leftrightarrow M$
 $v \leftrightarrow V$

Eks 1: Newtons rugge



$$m = M \Rightarrow v_f = v_i, \quad v_f = v_i = 0$$

Eks 2: Ball mot vegg (elastisk støt)



Finne v_f og undersøke impuls- og energibevarelse

$$\text{Løsn 2: } v_f = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} \underline{\underline{-v_i}}$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 = K_i \quad (\text{OK})$$

$$p_f = m v_f + M V_f = -m v_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2v_i$$

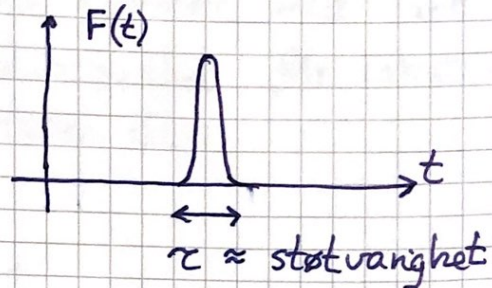
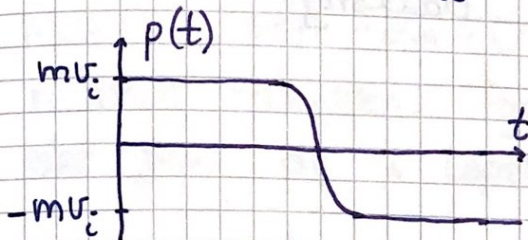
$$= -m v_i + 2m v_i = m v_i = p_i \quad (\text{OK})$$

Kraftstøt ("Impulse" (eng.))

(35)

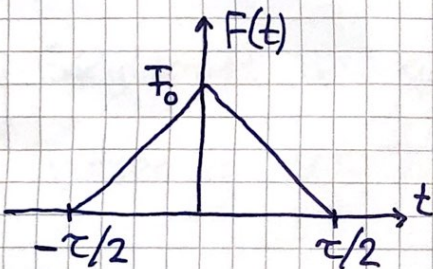
$$F = dp/dt \Rightarrow dp = F \cdot dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t) dt$$

Eks: Ball mot vegg



Bordtennisball, $m = 2.7g$, $v_i = 10 \text{ m/s}$.

Anta lineær $F(t)$ med $\tau = 2 \text{ ms}$:



$$\Delta p = \int F(t) dt = \frac{1}{2} F_0 \tau$$

$$\Rightarrow 2m v_i = \frac{1}{2} F_0 \tau \Rightarrow F_0 = \frac{4m v_i}{\tau}$$

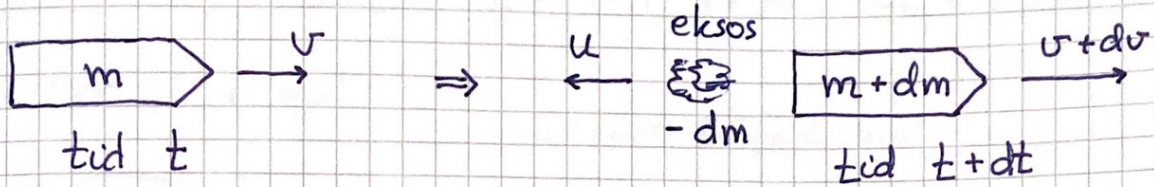
Midlere akselerasjon i støtet:

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v_i}{\tau} = \frac{20 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = \underline{10^4 \text{ m/s}^2}$$

Dvs: $\langle a \rangle \gg g$ slik at ytre kraft mg trygt kan neglisjeres underveis i støtet.

Rakettprinsippet

(36)



Masse (eksos) $-dm > 0$ sendes bakover med fart u relativt raketten. Pga impulsbevarelse får raketten økt fart dv i løpet av tiden dt :

$$\underbrace{m \cdot dv}_{\text{økning i raketten}} = \underbrace{u \cdot dm}_{\text{eksosens impuls}}$$

N2 for raketten: $m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt}$

Skjukraft (Rekyl): $F_{\text{skjur}} = u \cdot \frac{dm}{dt}$

(Her er $u < 0$ og $dm < 0$ slik at $F_{\text{skjur}} > 0$)

Oppskyting i tyngdefeltet: $F = u \cdot \dot{m} - mg$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$$

Mult. med dt/m , anta $v(0) = 0$ og konstante u, g , og integrer fra $t=0$ til t :

$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \cdot t$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln [m(t)/m(0)] - g \cdot t$$

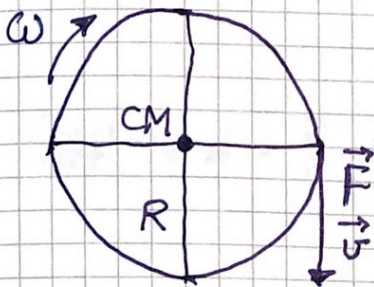
(Se øving)

Rotasjonsdynamikk

[OS110; YF10; LL6]

(37)

Se f.eks på et hjul:



Effekt tilført hjulet:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

Kraftens dreiemoment:

$$\tau = F \cdot R$$

$$\text{Dvs: } P = \tau \cdot \omega$$

Alternativt uttrykk for samme effekt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I_0 \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

De to uttrykkene for P må være lik hverandre

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I_0 \frac{d\omega}{dt}}$$

N2 for rotasjon om akse
med fast orientering

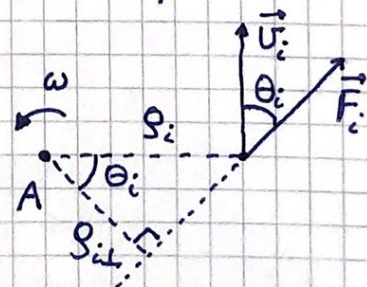
(Jf. N2 for translasjon: $F = m \frac{dv}{dt}$)

Netto dreiemoment når flere krefter gjør arbeid:

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i \cdot v_i \cdot \cos \theta_i \\ &= \sum_i F_i \rho_i \omega \cos \theta_i = \left\{ \sum_i F_i \rho_{i\perp} \right\} \cdot \omega = \tau \cdot \omega \end{aligned}$$

$$\tau = \sum_i F_i \rho_{i\perp} = \text{netto ytre dreiemoment mhp rot.aksen}$$

$\rho_{i\perp}$ = avstanden fra aksen til
kraftens forlengelseslinje
= kraftens arm



Arbeid utført av dreiemomentet:

(38)

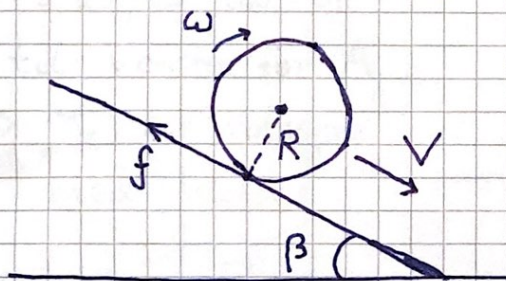
$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega = \frac{\tau \cdot d\varphi}{dt}$$

$\Rightarrow dW = \tau \cdot d\varphi =$ arbeid utført av τ ved omlept vinkel $d\varphi$

(Jf. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ arbeid utført av \vec{F} ved translasjon $d\vec{r}$)

Eksempler, rotasjonsakse med fast orientering.

Eks 1: Ren rulling på skråplan (s. 28)



- $I_o = cMR^2$, $\omega = \frac{v}{R}$, $\dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{R}$

- $F_{||} = Mg \sin\beta - f$

- $\tau = f \cdot R$

(N og Mg har null arm mhp rot.aksen gjennom CM)

$$N2, || = F_{||} = M\dot{v} \quad ; \quad N2, \text{rot. om CM} : \tau = I_o \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow Mg \sin\beta - f = M\dot{v} \quad ; \quad f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{v}/R \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

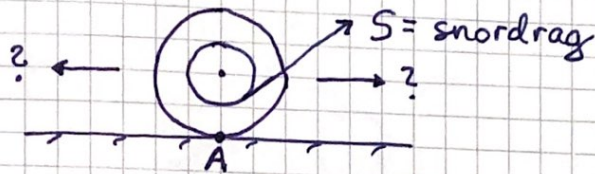
$$\Rightarrow Mg \sin\beta - cM\dot{v} = M\dot{v} \Rightarrow \dot{v} = g \sin\beta / (1+c)$$

$$\text{og } f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta$$

(som s. 28 med energi bevarelse)

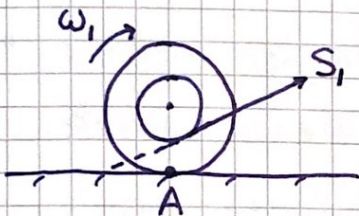
Eks 2: Snelle (kabeltrommel)

(39)

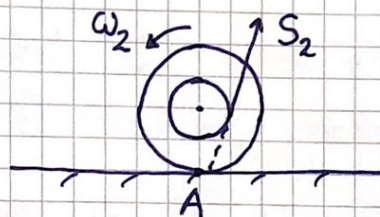


Ruller snelle mot høyre eller venstre?

Lurt å finne dreiemoment τ_A mhp aksen A , "kontaktlinjen", fordi Mg , N og f har null arm mhp A .

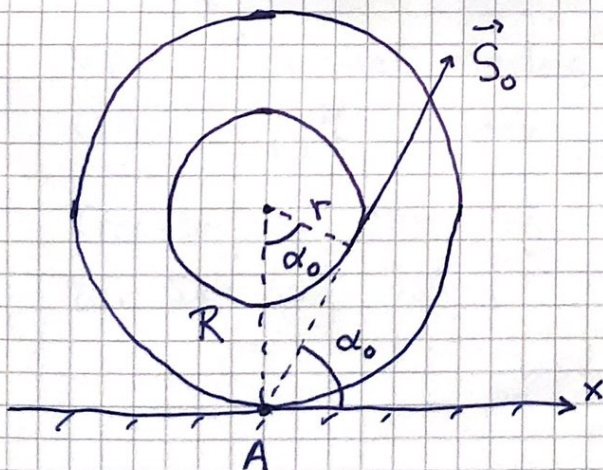


Forlengelse av \vec{S}_1 til venstre for A
 $\Rightarrow \tau_A$ gir rotasjon med klokka



Forlengelse av \vec{S}_2 til høyre for A
 $\Rightarrow \tau_A$ gir rotasjon mot klokka

Og hvis \vec{S}_0 har forlengelse gjennom A , blir $\tau_A = 0$ og snelle står i ro:



$$\tau_A = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

Fra figur:

$$\cos \alpha_0 = r/R$$

Tilleggsbetingelse:

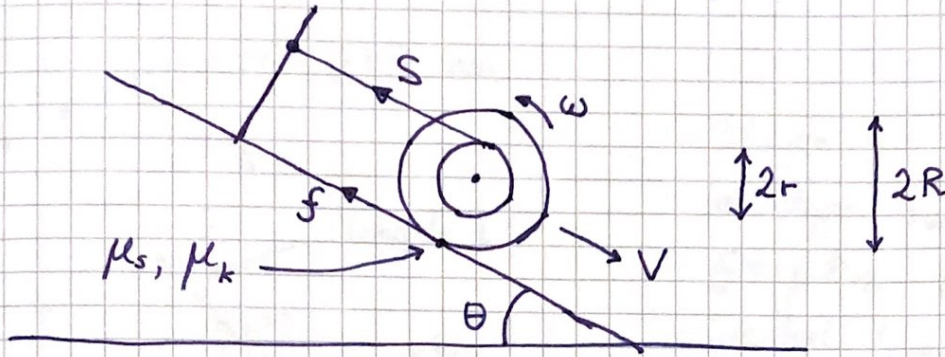
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow f = S_{0x} = S_0 \cos \alpha_0$$

$$\Rightarrow S_0 \cos \alpha_0 \leq \mu_s \cdot N$$

$$(N = Mg - S_0 \sin \alpha_0)$$

Eks 3: Snelle baklengs på skråplan (Øving)



- Bestem maksimal vinkel θ_0 uten at snella slurer (ruller og glir) baklengs nedover skråplanet.

(Tips: $N_1 \parallel$ skråplanet og N_1 for rot. om CM.
 $f = f_{\max} = \mu_s \cdot N$ når $\theta = \theta_0$.)

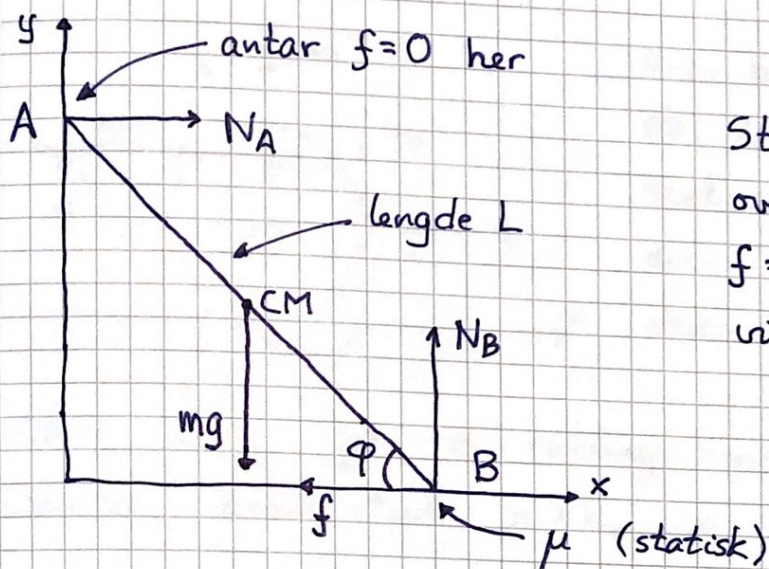
- Bestem S og \dot{V} når $\theta > \theta_0$.

(Tips: $N_2 \perp$ skråplanet og N_2 for rot. om CM.
 $f = \mu_k \cdot N$)

Ved "normal sluring" er ~~rulle~~ rullebetingelse ikke oppfylt, men her er $V = \omega \cdot r$:

Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π
 tar like lang tid!

Eks 4: Når står stigen tilstrekkelig bratt? (41)



Stigen glir hvis f overstiger $f_{\max} = \mu N_B$; $f = \mu N_B$ gir minste vinkel φ_{\min} .

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow f = N_A \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_B = mg \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow N_A = \mu \cdot mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi = N_A \cdot L \cdot \sin\varphi = \mu mg L \sin\varphi$$

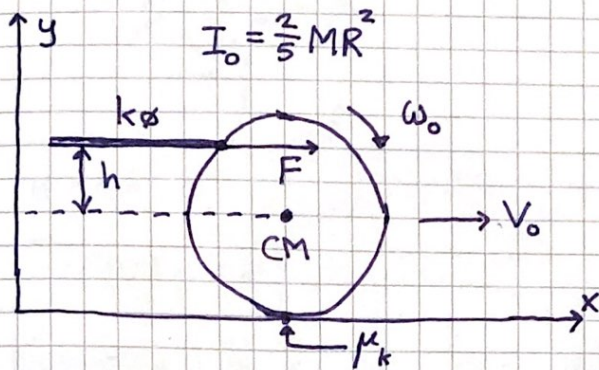
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos\varphi = \mu \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\tan \varphi_{\min} = \frac{1}{2\mu}}$$

Hvis f.eks. $\mu = 0.5$, er $\varphi_{\min} = \arctan 1 = 45^\circ$

[Spm: Hva blir φ_{\min} hvis maler med malingspenn har masse $M = 10m$ og står i avstand $3L/4$ fra bunnen av stigen?]

Eks 5: Elementær snooker [LL 6.7 og Øving]



Anta horisontalt kortvarig støt i kulas (vertikale) sentrale plan, i høyde h over (evt. under; $h < 0$) akse gjennom CM (stiplet).

- Hvilken $h = h_0$ gir ren rulling umiddelbart?
- Diskuter kvalitativt $h > h_0$ og $h < h_0$.

Løsning: F og $\tau = F \cdot h$ (om CM) virker med kort varighet Δt og skal med $h = h_0$ gi ren rulling, dvs $V_0 = \omega_0 R$. Antar $F \gg f$ og neglisjerer f i støtet.

$$N2, x: F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

$$N2, \text{rot. om CM: } F \cdot h_0 \cdot \Delta t = I_0 \Delta \omega = I_0 \omega_0 = \frac{2}{5} M R^2 \cdot \omega_0$$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{2}{5} R^2 \omega_0 / V_0 = \underline{\underline{\frac{2}{5} R}}$$

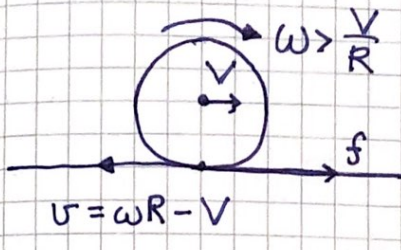
Hvis $h > h_0$: $\omega_0 > V_0 / R$, toppspinn

$h < h_0$: $\omega_0 < V_0 / R$, underskru

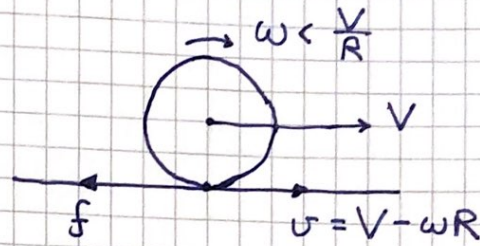
\Rightarrow Skring i begynnelsen i begge tilfeller.

Sluring [OS1 11.1 ; LL 6.7]

(43)



"Toppspinn"



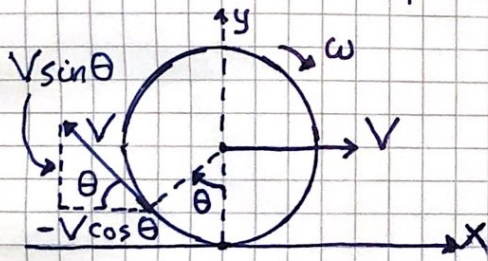
"Underskru"

Kinetisk friksjon gir effekttap:

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\mu_k \cdot N \cdot v < 0$$

ω nærmer seg $V/R \Rightarrow$ ren rulling etter hvert

Banen til punkt på periferien ved ren rulling:



$$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R\dot{\theta}$$

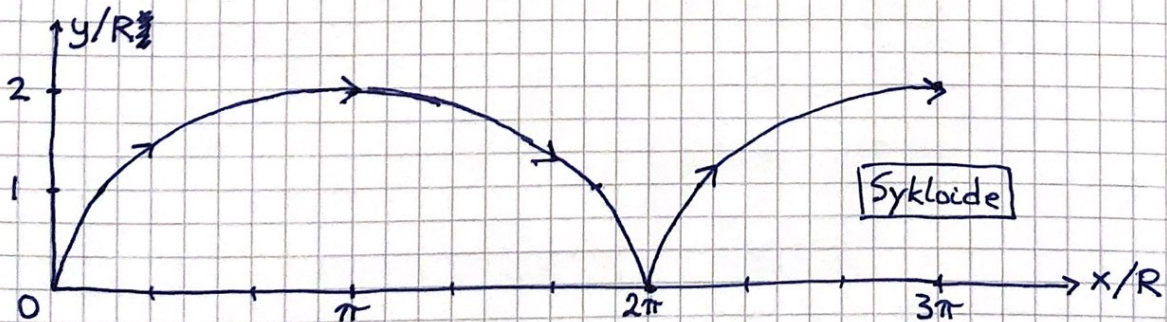
Ser fra figuren:

$$v_x = V - V \cos \theta$$

$$v_y = V \sin \theta$$

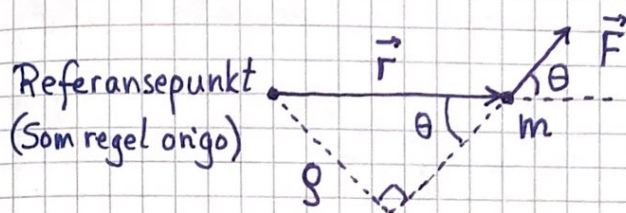


$$\Rightarrow x(\theta) = R(\theta - \sin \theta) ; y(\theta) = R(1 - \cos \theta)$$



Rotasjonsdynamikk med vektorer

Dreiemoment [OS1 10.6; YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$ = kraftens dreiemoment, relativt origo

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt

$\Rightarrow \vec{\tau}$ ut av planet her

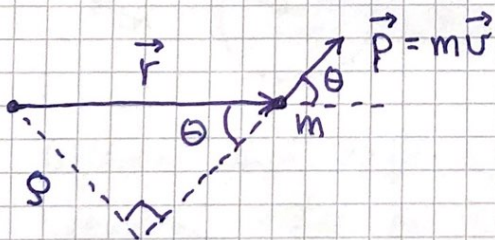
Absoluttverdi:

$$\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = g \cdot F$$

g = kraftens arm (som s. 37)

Hvis flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

= massens dreieimpuls

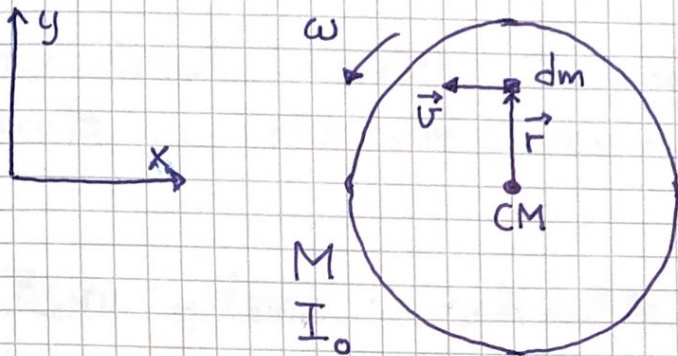
Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$

Abs. verdi: $L = r \cdot p \cdot \sin\theta = g \cdot p$

Partikkelsystem: $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm$

\vec{L} for stivt legeme [OS1 11.2; YF10.5; LL 6.6] (45)

Bidraget \vec{L}_s pga rotasjon om akse gjennom CM:
Anta rotasjon om z-aksen.



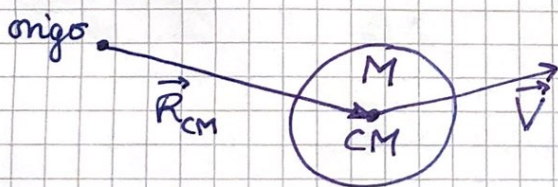
Bidraget fra dm :

$$\begin{aligned} d\vec{L}_s &= \vec{r} \times \vec{v} dm \\ &= r \cdot r \cdot \omega \cdot dm \cdot \hat{z} \\ &= r^2 dm \cdot \omega \hat{z} \\ &= dI_0 \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_s &= \int d\vec{L}_s = \left\{ \int dI_0 \right\} \cdot \vec{\omega} = I_0 \vec{\omega} \\ &= \text{"spinn"} \quad (\text{ert: indre dreieimpuls}) \end{aligned}$$

Retning p $\vec{\omega}$ med HHR (høyreh \hat{a} ndsregel):
4 fingre langs $\vec{v} \Rightarrow$ tommelen langs $\vec{\omega}$

Bidraget \vec{L}_b pga translasjon av CM:



$$\begin{aligned} \vec{L}_b &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} \\ &= \text{banedreieimpuls} \end{aligned}$$

For legemer med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen, dvs uendret etter en halv omdreining, er total dreieimpuls ganske enkelt

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b = I_0 \vec{\omega} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

[Se notat for bevis]

N2 for rotasjon [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]

(4b)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times \vec{p} \} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

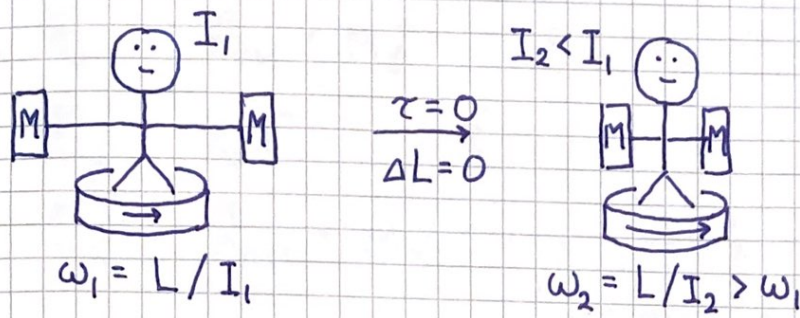
dvs: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ Jf $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ for translasjon

Har statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er null.

Bevaringslover i mekanikken

- For isolert system (ingen ytre krefter) er E , \vec{p} og \vec{L} bevart (hvr total energi, impuls og dreieimpuls)
 - For konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
 - Når netto ytre kraft $\vec{F} = 0$, er \vec{p} bevart
 - Når netto ytre dreiemoment $\vec{\tau} = 0$, er \vec{L} bevart
-

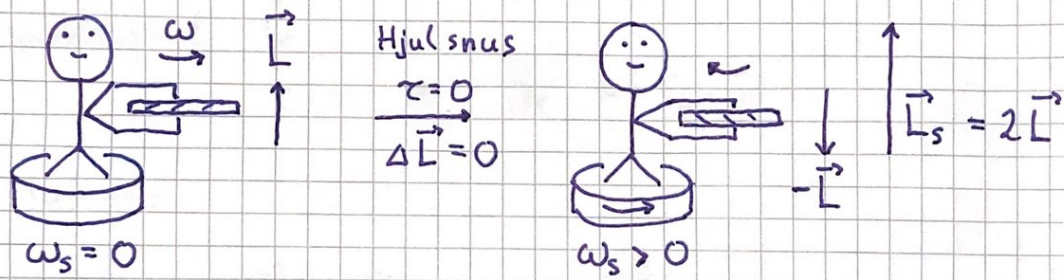
Eks 1: Piruett [OS1 11.3; YF 10.6; LL 6.5]



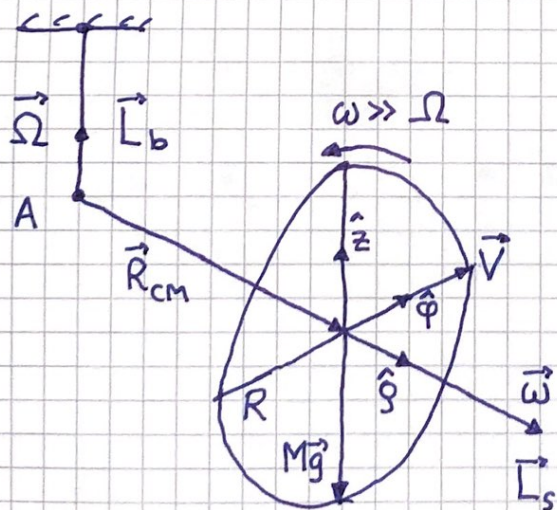
$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1 \quad K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$$

Arbeid utført på de to massene gir økt rotasjonsenergi.

Eks 2: Student med roterende sykkelhjul



Eks 3: Presesjon [OS1 11.4; YF 10.7; LL 6.10]



$$I_0 \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

Beregn $T_\omega = 2\pi/\omega$

N2 for rot. om A: $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} MV \hat{z} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{g}$$

Setter inn i N2:

$$R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega \frac{d\hat{g}}{dt}$$

Akshingen og dermed \hat{g} roterer om z-aksen med vinkelfart Ω

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \Omega \cdot \hat{\phi}$$

Dermed:

$$R_{cm} g = R^2 \omega \Omega = R^2 \frac{2\pi}{T_\omega} \frac{2\pi}{T_\Omega}$$

$$\Rightarrow T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s}$$

$$\approx \underline{\underline{\frac{4}{10} \text{ s}}}$$

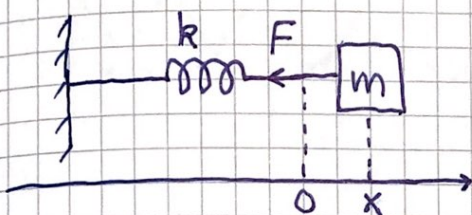
dvs $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omdr. pr. sek.

Swingninger [OS1 15; YF14; LL9]

(49)

- Periodisk oppførsel omkring en likevekt
- En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt
- F.eks: Masse / fjær. Pendler. Atomer i molekyler

Harmonisk oscillator [OS1 15.1; YF 14.2; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m

$x > 0$: ~~str~~ strukket fjær

$x < 0$: sammenpresset fjær

Hookes lov: $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

(eller på formen $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$)

Sentrale størrelser (jf sirkelbevegelse) :

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr (hel) svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

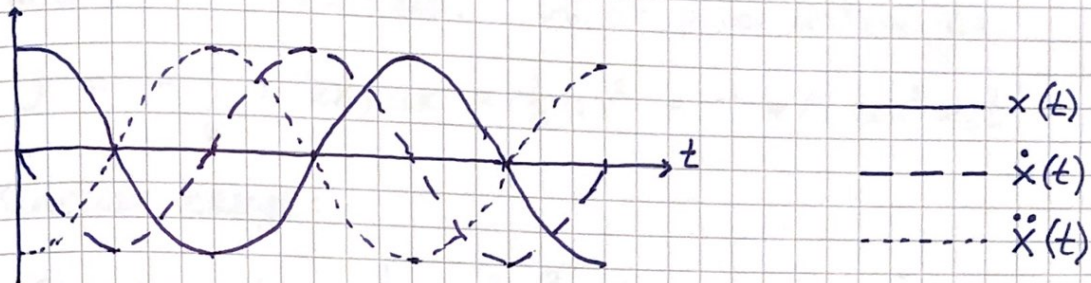
$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant

Startbetingelser (f.eks): $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$

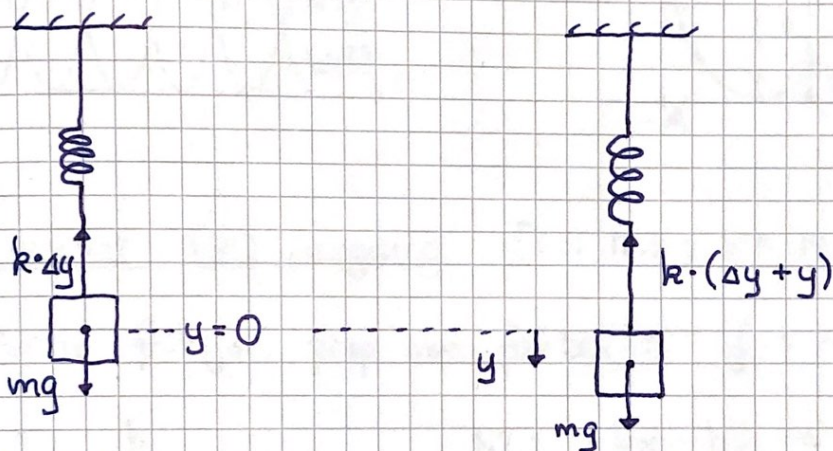
(50)

$$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t \Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t \text{ (fart)}$$
$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t \text{ (akseleksjon)}$$



Vertikal svingning i tyngdefeltet:

Strukket likevekt:



$$N1: k \cdot \Delta y = mg$$
$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y}$$
$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt, med uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Energi i harmonisk oscillator

[OSI 15.2 ; YF 14.3 ; LL 9.4]

Fjærkraft $F(x) = -kx$ er konservativ.

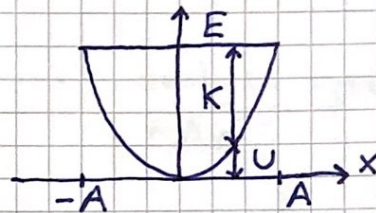
Anta $x(t) = A \cos \omega_0 t$. Da er potensiellenergi:

$$U = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

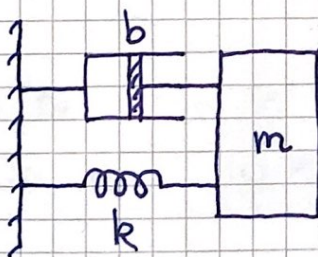
$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Mekanisk energi er bevart: $E = K + U = \frac{1}{2} kA^2$



Dempet (fri) svingning [OSI 15.5 ; YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar friksjon prop. med farten: $f = -b\dot{x}$



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m \text{ og } \omega_0^2 = k/m$$

$$\begin{aligned} \text{Prøveløsning: } e^{-\alpha t} &\Rightarrow [\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Kritisk damping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$

$x(t) = (A + B \cdot t) \exp(-\gamma t)$; svakeste damping som ikke gir svingninger; ønskelig i f. eks. støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0$

(52)

$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t) \quad ; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0$

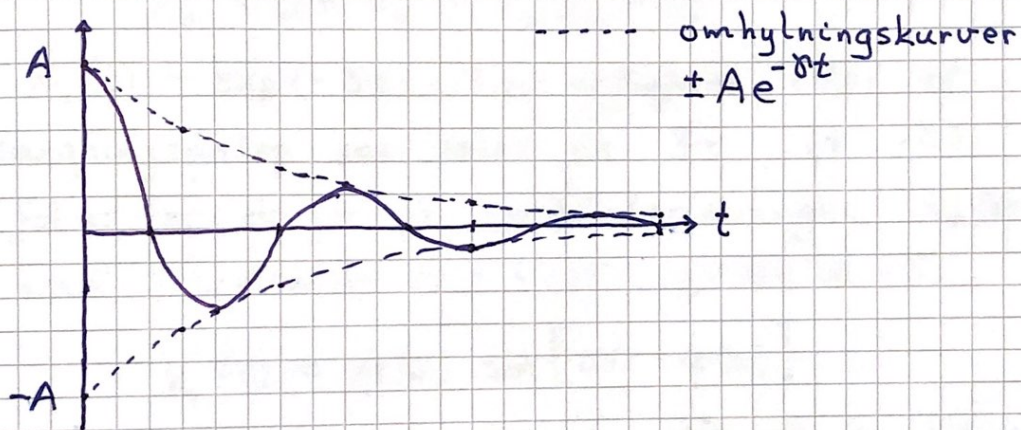
$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{(-1) \cdot (\omega_0^2 - \gamma^2)} = \gamma \pm i\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t} [\cos \omega t \pm i \sin \omega t]$$

Generell reell løsning: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$

dvs harmonisk svingning med aftagende amplitude $A e^{-\gamma t}$

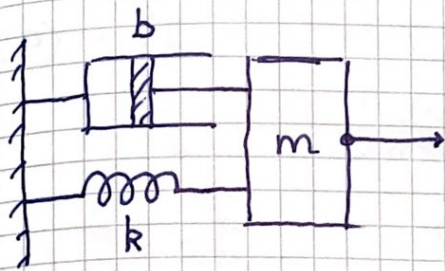
Tidskonstanten $\tau = 1/\gamma$ angir tidsskala for hvor lange svingeberegelsen varer.



Ofte har vi svak demping, $\gamma \ll \omega_0$.

Da er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Tvingen svingning og resonans [OS1 15.6; YF 14.8; LL 9.9] 53



Anta harmonisk ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning oppfyller homogen ligning

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0,$$

så $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ kan neglisjeres etter et innsvingningsforløp som varer ca 3τ ($\tau = 1/\gamma$).

Vi fokuserer derfor på partikulærløsningen $x_p(t)$, og med harmonisk ytre kraft gjetter vi på

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p gir nå to ligninger, som fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Stor amplitude A når $\gamma \ll \omega_0$
og $\omega \approx \omega_0$

Midlere tilført effekt når $\omega = \omega_0$: $[\varphi(\omega_0) = 0]$ (54)

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \langle F \cdot \dot{x} \rangle = \langle F_0 \cos \omega_0 t \cdot \omega_0 A(\omega_0) \cdot \cos \omega_0 t \rangle \\ &= F_0 \omega_0 \cdot \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \\ &= \frac{F_0^2}{2b} \quad \left[\text{da } 2\gamma = \frac{b}{m} \text{ og } \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

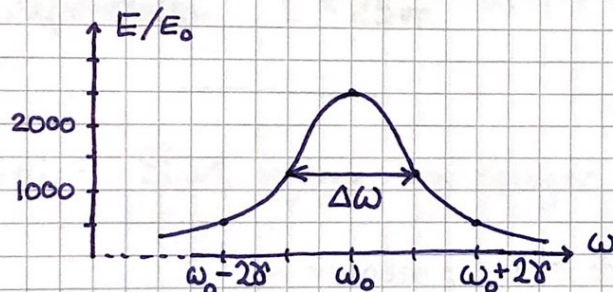
Som tilsvarende midlere effekttap, $\langle -b\dot{x} \cdot \dot{x} \rangle$ pga friksjon, ved stasjonære forhold.

Oscillatorens energi:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} ; E_0 = F_0^2/2k$$

Eks: $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ (svak demping)

$$\Rightarrow E(\omega_0) = 2500 E_0 ; E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0 ; E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$$



Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = b/m$

(FWHM: Full Width Half Maximum)

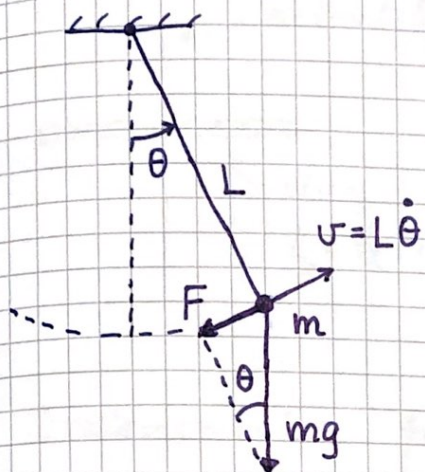
● Oscillatorens Q-faktor ("quality factor")

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega = \omega_0 / 2\gamma \gg 1$$

når dempingen er svak, $\gamma \ll \omega_0$.

(Her: $Q = 50$)

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs snor/stang.



N2 langs sirkelbanen:

$$F = ma$$

med $F = -mg \sin \theta$ og $a = L \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

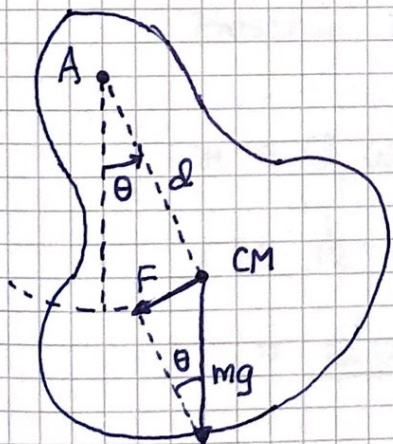
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$. Dermed:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

Eks: Foucaultpendelen, $L = 25\text{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 10\text{s}$

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A.



$m = \text{masse}$; $I = \text{treghetsmoment mhp A}$

N2, rotasjon om A: $\tau = I \ddot{\theta}$

med $\tau = -F \cdot d = -mgd \cdot \sin \theta$

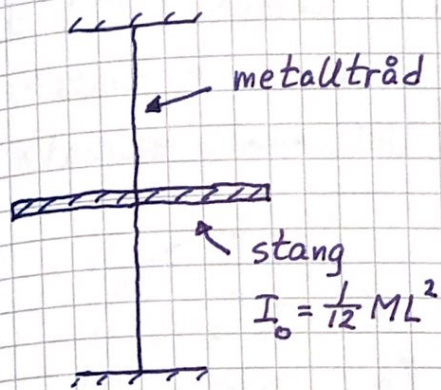
$$\Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

$$\omega_0^2 = mgd/I$$

Torsjonspendel:



Metalltråden vridd, ved
å svinge stanga en vinkel
 θ ut fra likevekt:



Dreiemomentet fra metalltråden på stanga er
prop. med vinkelen θ :

$$\tau = -\kappa \cdot \theta ; \quad \kappa = \text{trådens torsjonsstivhet}$$

Nå for rotasjon om trådens akse: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0}$$

Exp: $M = 50\text{g}$, $L = 11\text{cm}$, $T = 0.8\text{s}$
Bestem κ

$$\begin{aligned} \kappa &= I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot (2\pi/T)^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0.050\text{kg} \cdot (0.11\text{m})^2 \cdot 4\pi^2 / (0.8\text{s})^2 \\ &\approx \underline{\underline{0.003\text{ Nm}}} \end{aligned}$$

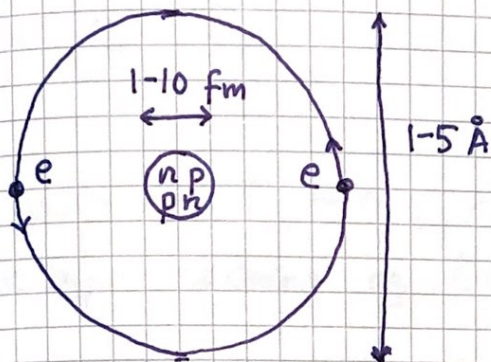
Elektrostatikk [OS2 5-8; YF 21-24; LHL 19-20]

(57)

Elektrisk ladning [OS2 5.1; YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = atomer = atomkjerne og elektroner

Klassisk atommodell (N. Bohr 1913, NP 1922):



$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

(ångström)

Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
Elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	-e
Proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	+e
Nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

Ladning er kvantisert i enheter av
 $e = \text{elementærladningen} \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Symbol for ladning: q, Q

Enhet: $[Q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom med atomnummer Z har Z protoner og
 Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$

Ioner er atomer og molekyler med $Q \neq 0$.

Eks: Cl^- , Li^+ , CO_3^{2-} , NH_4^+

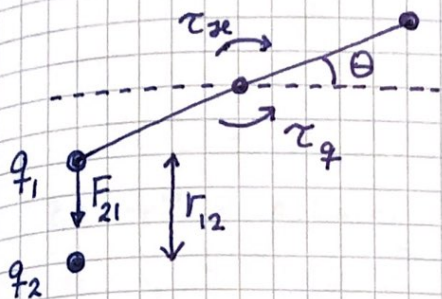
Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner.

Eks: ^{13}N , ^{14}N , ^{15}N har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z=7$)

Coulombs lov [OS2 5.3; YF 21.3; LHL 19.3]

(58)

Charles Augustin de Coulomb, 1785:

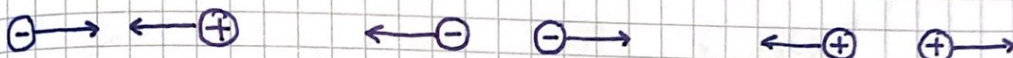


Torsjonstråd med stang sett ovenfra. Likevekt når

$$\tau_q + \tau_{xe} = 0$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta ; \quad \tau_{xe} = -\kappa \theta$$

Exp. viste at $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$ med tiltrekning mellom ulike typer ladning og frastøtning mellom like typer:



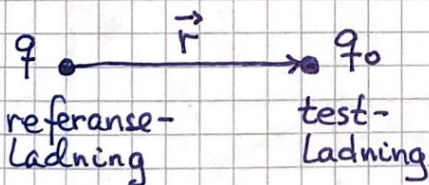
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Coulombs lov

$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ = vakuumpermittiviteten

$$1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5; YF 21.3-21.5; LHL 19.3-19.5]



Kraft fra q på q_0 :

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{El. kraft pr ladningsenhet}$

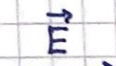
$$\vec{E} = \vec{F}/q_0$$

Enhet: $[E] = \text{N/C}$

Punktladning q omgir seg med et el. felt:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Bort fra $q > 0$: \oplus

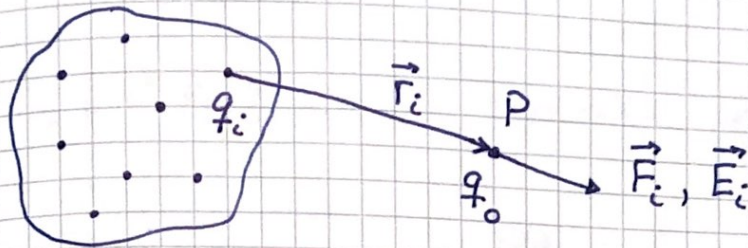


Inn mot $q < 0$: \ominus



Flere referanseladninger:

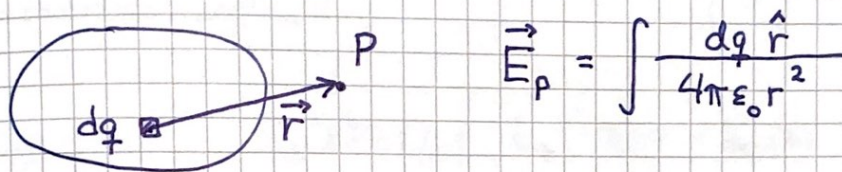
(59)



El. felt i posisjon P fra ladningene $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}$:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

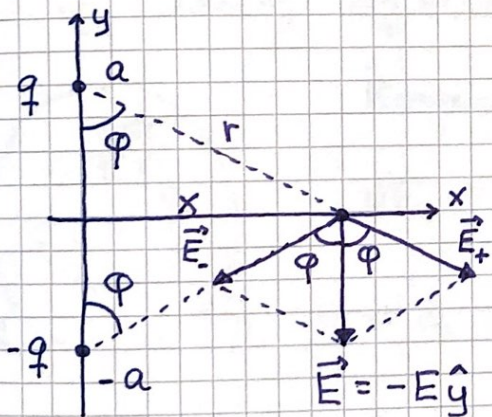
Kontinuerlig ladningsfordeling: $q_i \rightarrow dq$; $\sum_i \rightarrow \int$



$$\vec{E}_P = \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Enkel elektrisk dipol

Punktladn. $\pm q$ i $y = \pm a$. Finn \vec{E} på x-aksen.



$$E = 2E_+ \cos\varphi \quad (E_- = E_+)$$

$$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2+a^2}$$

$$E_+ = q/4\pi\epsilon_0 r^2$$

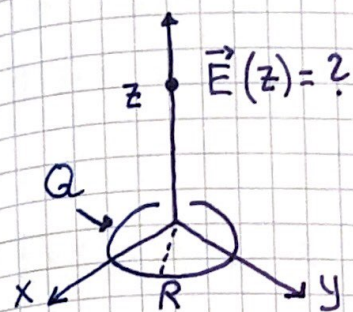
$$\vec{E} = -\hat{y} \cdot \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

Langt unna dipolen, $x \gg a$: $x \approx r$

$$E(r) \sim 1/r^3 \quad (\text{går raskere mot null enn } E(r) \sim 1/r^2 \text{ fra punktladning})$$

Eks 2: Jævnt ladet ring

60



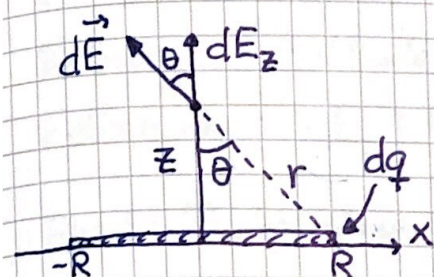
Symmetri $\Rightarrow \vec{E}$ langs z-aksen

Bidrag fra dq :

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2 ; \cos \theta = z/r$$

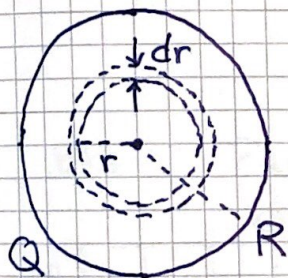
$$\begin{aligned} \Rightarrow E_z &= \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



Rimelig svar? $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$; $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$
når $z \gg R$

Eks 3: Jævnt ladet skive

= mange tynde ringer med radius r , bredde dr og ladning $dq = (Q/A) \cdot dA = (Q/\pi R^2) \cdot 2\pi r dr$



Ringens bidrag til feltet på z-aksen:

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \right]$$

$$z \gg R \Rightarrow \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow E_z \approx Q/4\pi\epsilon_0 z^2 \quad \text{OK!}$$

Stor skive, $R \gg z$: $E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (6)

$\sigma = Q/\pi R^2 =$ skivas ladning pr flateenhet

Dvs: Feltet er tilnærmet konstant nær ei jevnt ladd skive!

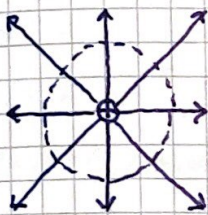
Feltlinjer for \vec{E} [OS2 5.6; YF 21.6; LHL 19.6]

Visuelt bilde av \vec{E} omkring ladningene.

Retning: Feltlinjer $\parallel \vec{E}$

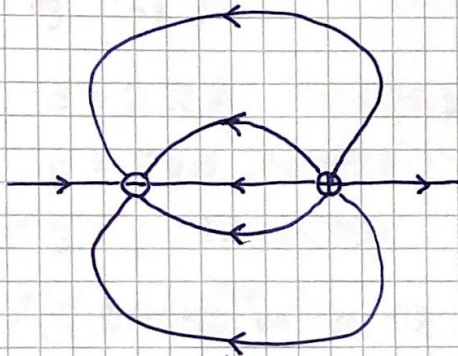
Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning

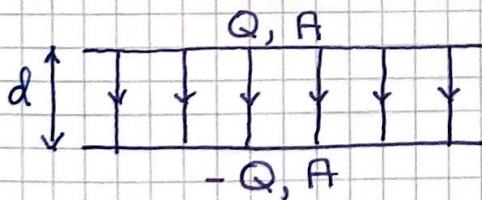


Feltlinjetetthet: $\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$
Feltstyrke: $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \sim \frac{1}{r^2}$ } OK

Eks 2: Dipol



Eks 3: Parallellplatekondensator (nyttig kretselement)



$\sigma = Q/A$

Med kort avstand d mellom de to platene ($d \ll \sqrt{A}$) er feltet tilnærmet konstant mellom platene,

$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, mens $E \approx 0$ utenfor.

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF 21.7; LHL 19.10] (62)

Enkel dipol: $-q \xrightarrow{d} q$ Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$; $[p] = \text{C}\cdot\text{m}$

Flere punktladn. q_i i pos. \vec{r}_i : $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Kontinuerlig ladningsfordeling: $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

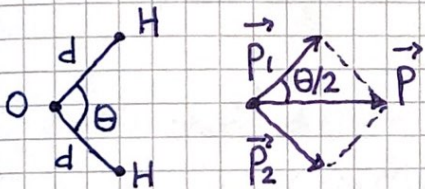
Dipol har altid null nettoladning: $\sum_i q_i = 0$; $\int dq = 0$

Eks 1: CO_2 $\vec{p}_1 \xrightarrow{\text{O}=\text{C}=\text{O}} \vec{p}_2$ $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \underline{\underline{0}}$

Eks 2: H_2O , p (exp) = 1.85 D (debye)

$1\text{D} = 10^{-21} \text{C}\cdot\text{m}^2/\text{s}/c \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{C}\cdot\text{m}$ (da $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$)

Med ladning q på H og $-2q$ på O, hvor stor er q ?



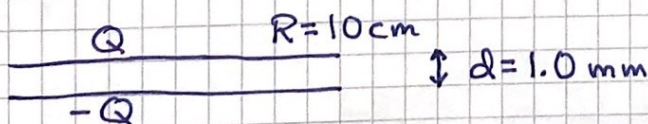
$d = 0.96 \text{\AA}$, $\theta = 104.5^\circ$

$$p = 2qd \cos(\theta/2)$$

$$\Rightarrow q = p / 2d \cos(\theta/2)$$

$$\Rightarrow q = (1.85 \cdot 10^{-29} / 3) \text{C}\cdot\text{m} / (2 \cdot 0.96 \cdot 10^{-10} \text{m} \cdot \cos 52.25^\circ) \approx 5.25 \cdot 10^{-20} \text{C} \\ \approx \underline{\underline{\frac{1}{3}e}}$$

Eks 3: Platekondensator



Med $Q = 8.3 \text{ nC}$, bestem σ og p .

Løsn: $\sigma = Q/A = Q/\pi R^2 = 2.6 \cdot 10^{-7} \text{C/m}^2$

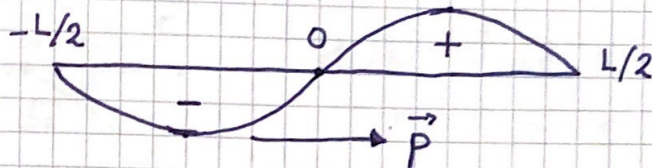
$$p = Q \cdot d = 8.3 \cdot 10^{-12} \text{C}\cdot\text{m}$$

Eks 4: Dipolantenne

Ladning pr lengdeenhet: $\lambda(x,t) = \lambda_0 \sin kx \cos \omega t$ Ved $t=0$: $\lambda(x,0) \rightarrow \lambda(x) = \lambda_0 \sin kx$

$$-L/2 \leq x \leq L/2; \quad k = 2\pi/L$$

$$L = 40 \text{ cm}; \quad \lambda_0 = 5.0 \text{ } \mu\text{C/m}$$



Ladning $dq = \lambda(x) \cdot dx$ på en liten bit mellom x og $x+dx$ bidrar med

$$dp = x \cdot dq = x \cdot \lambda_0 \sin(kx) dx$$

til dipolmomentet. Totalt dipolmoment blir dermed

$$p = \int dp = \lambda_0 \int_{-L/2}^{L/2} x \sin(kx) dx$$

Løses med delvis integrasjon:

$$u = x, \quad v' = \sin(kx) \Rightarrow u' = 1, \quad v = -\frac{1}{k} \cos(kx)$$

$$\Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} x \sin(kx) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \left(-\frac{x}{k} \cos kx \right) + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{k} \cos kx dx$$

$$= -\frac{L^2}{4\pi} \cos \pi - \frac{L^2}{4\pi} \cos(-\pi)$$

$$= L^2/2\pi$$

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda_0 L^2}{2\pi} = \frac{5.0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}} \cdot (0.40 \text{ m})^2}{2\pi} = 1.27 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}$$

$$\approx \underline{0.13 \text{ } \mu\text{C} \cdot \text{m}}$$

$$\xrightarrow{\vec{p}(0)} \quad \omega t = 0$$

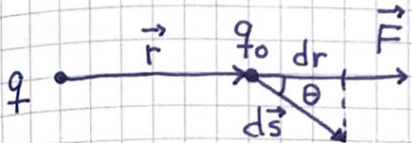
$$p=0 \quad \omega t = \pi/2$$

$$\xleftarrow{\vec{p}(\pi/\omega)} \quad \omega t = \pi$$

Potensiell energi og elektrisk potensial

[OS2 7.1-7.2 ; YF 23.1-23.2 ; LHL 19.9, 20.3]

Coulombkraften er konservativ, med tilhørende potensiell energi. For ladningspar q og q_0 :



$$\begin{aligned}
 dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\
 &= -F \cdot dr = -qq_0 dr / 4\pi\epsilon_0 r^2 \\
 &= \text{endring i pot. energi n\u00e5r} \\
 &\quad \text{avstanden mellom } q \text{ og } q_0 \text{ endres} \\
 &\quad \text{fra } r \text{ til } r + dr
 \end{aligned}$$

Naturlig valg : $U = 0$ n\u00e5r $r \rightarrow \infty$. Dermed:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \frac{qq_0 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{pot. energi for}$$

Ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Pot. energi pr ladningsenhet}$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} = \text{potensialet som } q \text{ omgir seg med}$$

Enhet: $[V] = \text{V (volt)} = \underline{\text{Coulombpotensialet}}$

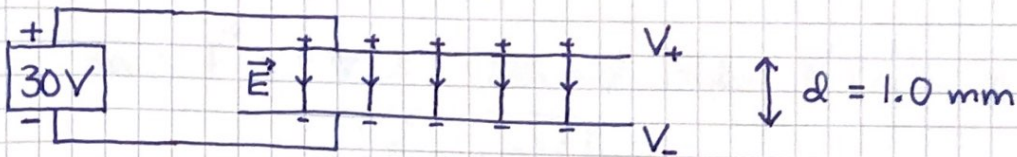
Potensialforskjell mellom posisjonene f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

• Ser n\u00e5 at $[E] = \frac{V}{m}$; dvs $1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$

• $1 \text{ eV} = 1 \text{ elektronvolt} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$,
en hensiktsmessig energienhet p\u00e5 atom\u00e5rt niv\u00e5

Eks 1: Platekondensator; radius $R=10\text{cm}$



Likespenningsskilde (DC)

Bestem E mellom og $\pm Q$ på platene.

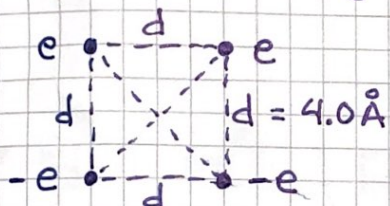
Løsning: $\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d$

$$\Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{30\text{V}}{1.0\text{mm}} = \underline{30\text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0 \Rightarrow Q = EA\epsilon_0 \approx \underline{8.3\text{ nC}}$$

Merk at \vec{E} har retning fra \oplus mot \ominus (ladning), og dessuten fra høyt mot lavt potensial.

Eks 2: Pot. energi for flere punktladninger



Bestem total pot. energi U , samt systemets dipolmoment p .

Løsn: Alle ladn. vekselvirker parvis og bidrar med

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

til pot. energi. Med N punktladninger er det

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2} \text{ distinkte ladningspar.}$$

Her: $N=4 \Rightarrow 6$ ladningspar. De 4 parene med $r_{ij}=d$ gir null nettobidrag til U

$$\Rightarrow U = -2e^2/4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{2}d = -8.15 \cdot 10^{-19}\text{J} = \underline{-5.1\text{ eV}}$$

Dipolmoment: $p = 2 \cdot e \cdot d = \underline{1.3 \cdot 10^{-28}\text{ Cm}}$ (retning oppover)

Beregning av \vec{E} fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9] (66)

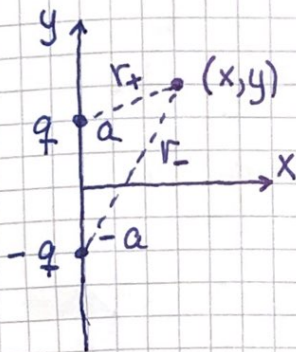
Fra før: $\vec{F} = -\nabla U$. Dermed, siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = \frac{U}{q_0}$:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks 1: Punktladning

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} \frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Eks 2: Dipol. Finn $V(x,y)$ og deretter $\vec{E}(x,y)$.



Løsning: $r_{\pm} = \sqrt{x^2 + (y \mp a)^2}$

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{\pm}} \right) = \pm \frac{y \mp a}{[x^2 + (y \mp a)^2]^{3/2}}$$

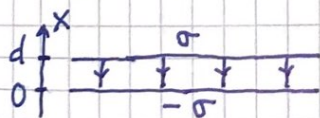
$$\Rightarrow E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

[Regn ut E_x selv]

På x-aksen er $y=0$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + a^2]^{3/2}}, \text{ som s. 59.}$$

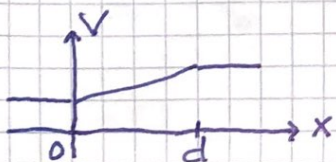
Eks 3: Platekondensator



Mellom platen er $\vec{E} = -\hat{x} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x}$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 + \sigma x / \epsilon_0$$

Utenfor platen er $E=0 \Rightarrow V = \text{konstant}$



Ekvipotensial [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

(67)

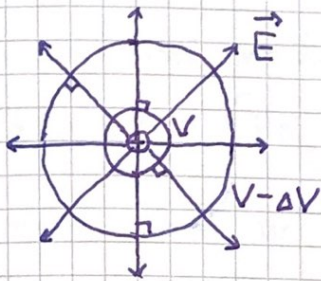
Område (linje, flate eller volum) med konstant potensial

En liten forflytning $d\vec{s}$ på en ekvipotensialflate

gir $dV = 0$, dvs $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Dermed:

$$\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}$$

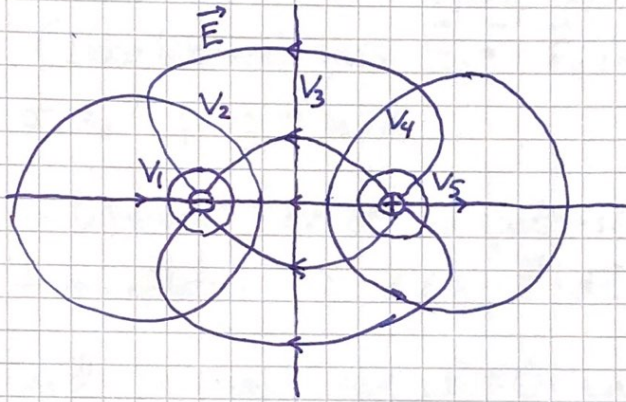
Eks 1: Punktladning



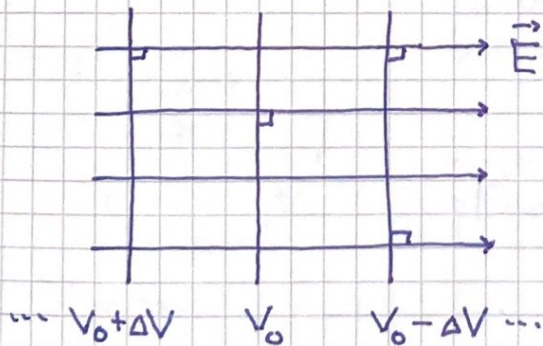
\vec{E} radielt

\Rightarrow konstant V på kuleskall med ladningen i sentrum

Eks 2: Dipol



Eks 3: Uniformt felt \vec{E} (f.eks mellom platene i en platekondensator)



$V = \text{konstant}$ på plan som står normalt på \vec{E}

Materialer og elektriske egenskaper

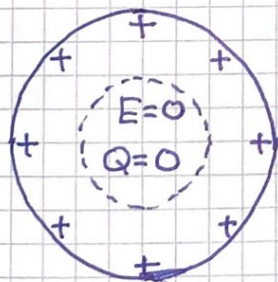
Ledere. Metaller [OS2 7.5; YF 22.5; LHL 19.8]

Frie elektroner (1-2 pr atom) som settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$ (N2: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$).

Dermed, i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inni et metall.
- En eventuell nettoladning ligger i sin helhet på overflaten. (Følger av Gauss' lov; ikke pensum)
- På overflaten av metall med nettoladning står $\vec{E} \perp$ overflaten. (Ikke likevekt hvis $\vec{E}_{\parallel} = -\vec{F}_{\parallel}/e \neq 0$)
Feltstyrke: $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$; $\sigma = Q/A$
- Et metallstykke i likevekt er et ekvipotensial. ($E=0$ inni og $\vec{E} \perp$ overflaten $\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$)
- Et metallstykke med hulrom har $E=0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

Beris:

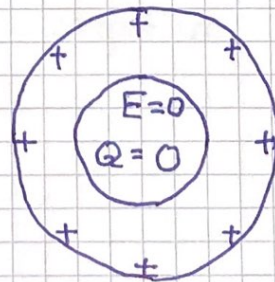


Kompakt
metallstykke

Ta bort nøytral
bit inni.

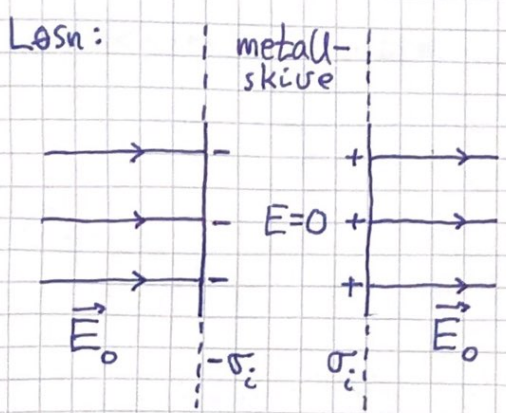
→

Ingen ladninger
påvirkes.



Med hulrom

Eks 1: Hva er industert overflateladning $\pm \sigma_i$ på metallskive i uniformt ytre felt $E_0 = 8.85 \text{ kV/m}$?



Totalt felt inni skiva:

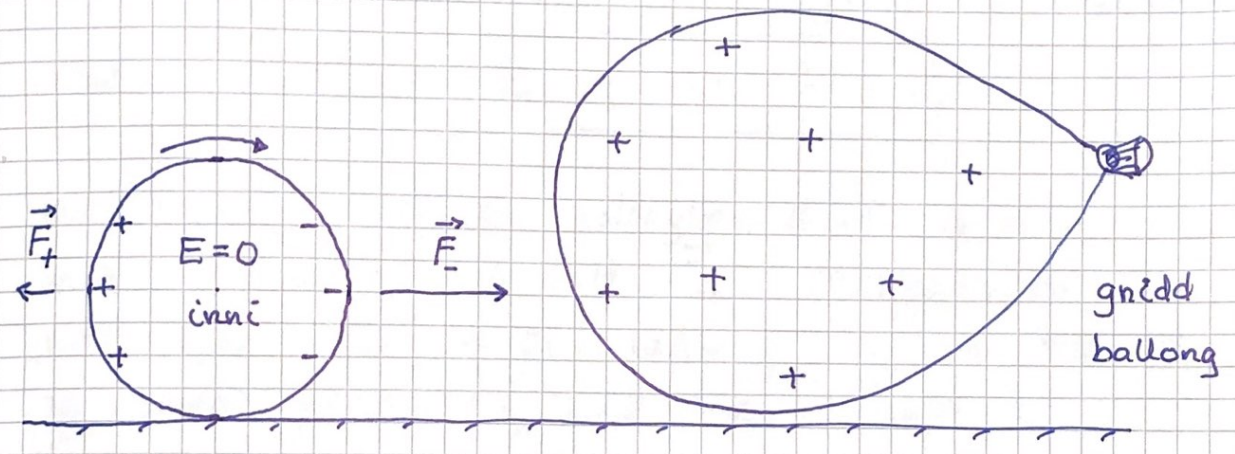
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$$

$$\Rightarrow E_i = E_0 ; E_i = \sigma_i / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \epsilon_0 E_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 8850 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$= \underline{78 \text{ nC/m}^2}$$

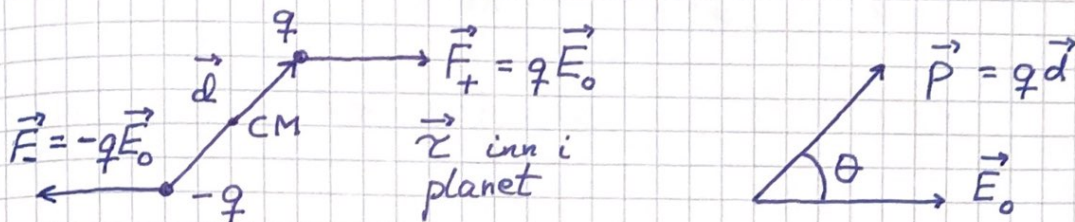
Eks 2: Ølboks og ballong



$F_- > F_+$ pga kortere avstand fra ballongens positive ladninger til ølboksens negative ladninger ; gir netto tiltrekning

Isolator. Dielektrikum [OS2 8.5; YF 24.4-24.5; LHL 20.5] (70)

Har ikke frie elektroner, men bundet ladning som polariseres i ytre felt \vec{E}_0 . Molekylær dipol:



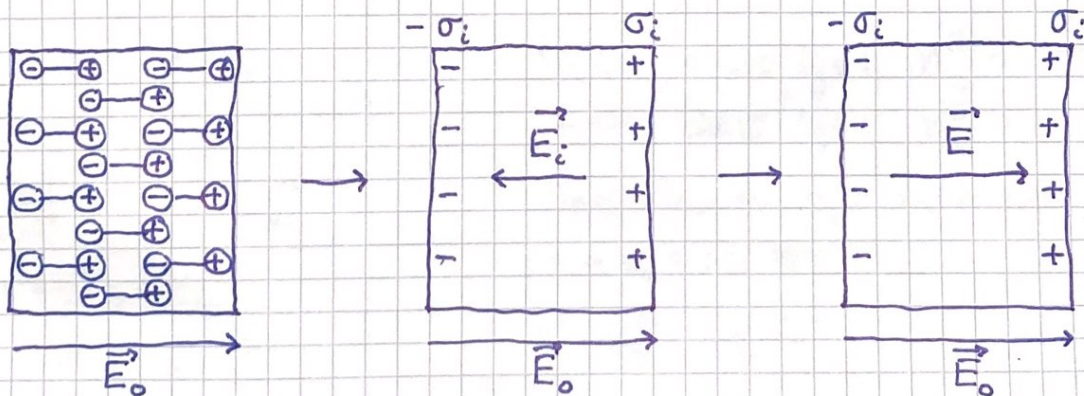
Dreiemoment på dipolen: $(\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

$$\tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

Dipolens potensielle energi: $U = -\int \tau d\theta = -p \cdot E_0 \cdot \cos\theta$

Altså: $\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 ; U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0}$

Gir tendens til at molekylære dipoler orienterer seg med \vec{p} langs ytre felt \vec{E}_0 . Makroskopisk nettoeffekt blir induisert ladning $\pm \sigma_i$ på overflaten, og dermed et svekket felt inni isolatoren:



Inni isolatoren: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i ; E = E_0 - E_i < E_0$

Lineær respons: E_i prop. med $E_0 \Rightarrow E$ prop. med E_0

Materialets relative permittivitet:

$$\epsilon_r = E_0 / E \Rightarrow E = E_0 / \epsilon_r$$

	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

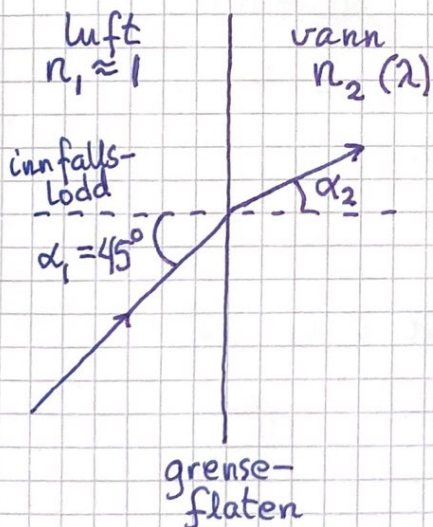
Materialets permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Eks 1: Hva er E i avstand 2.0 cm fra punktladning $+3e$ inni et dielektrikum med $\epsilon_r = 4.5$?

$$\begin{aligned} \text{Løsning: } E &= E_0 / \epsilon_r = q / 4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2 = q / 4\pi\epsilon r^2 \\ &= [9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / 4.5 \cdot 4.0 \cdot 10^{-4}] \text{ V/m} = \underline{\underline{2.4 \mu\text{V/m}}} \end{aligned}$$

Eks 2: Farten til elektromagnetiske bølger avhenger av brytningsindeksen $n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)}$: $v = c/n$
For synlig lys ($\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$) er $n \approx 1.3$ i vann, slik at lysfarten er ca $2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ i vann.

Eks 3: Snells lov. En lysstråle skifter retning ("brytes") når den passerer en grenseflate mellom to dielektrika med ulik brytningsindeks: $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$



$$\text{Vann, rødt lys: } n_2^R \approx 1.33$$

$$\text{---, blått lys: } n_2^B \approx 1.35$$

$$\text{Snells lov} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2}\right)$$

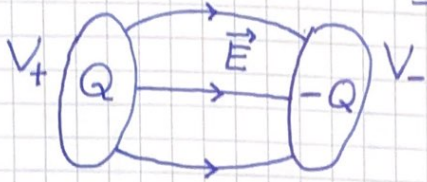
$$\sin \alpha_1 = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_2^R = 32.1^\circ ; \alpha_2^B = 31.6^\circ$$

Forklarer f.eks. regnbuen.

Kondensator. Kapasitans [OS2 8; YF 24; LHL 20]

En kondensator består generelt av to adskilte ledere.
Tilførsel av ladning $\pm Q$ gir felt \vec{E} :



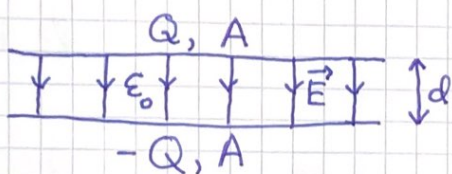
Pga Coulombs lov er E prop. med Q , og dermed blir også potensialforskjellen $V = V_+ - V_-$ prop. med Q .

Kondensatorens kapasitans: $C = Q/V$

Enhet: $[C] = Q/V = F$ (farad)

Kretssymbol:

Eks: Platekondensator



$$E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$$

$$V = E \cdot d = Qd / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 A / d$$

Med $d = 1.0 \text{ mm}$ og $A = \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2$: $C = 0.28 \text{ nF}$

Et dielektrikum mellom platene øker kapasitansen:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma / \epsilon = Q / A \epsilon_r \epsilon_0 ; V = E \cdot d$$

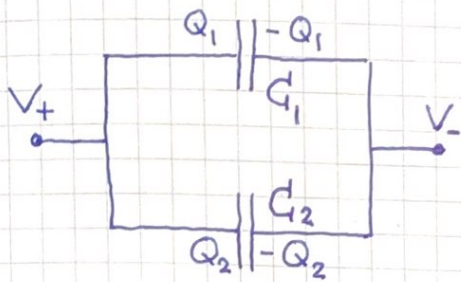
$$\Rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d, \text{ dvs økt med faktoren } \epsilon_r$$

Enhet for permittivitet:

$$[C] = F \text{ og } [A/d] = \text{m} \Rightarrow [\epsilon] = F/\text{m}$$

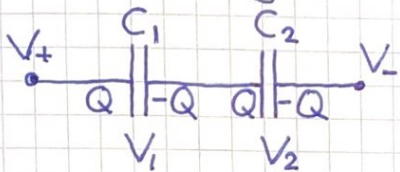
Kobling av kapasitanser [OS2 8.2; YF 24.2; LHL 20.2] (73)

Parallellkobling:



Lik spenning $V = V_+ - V_- =$
 $Q_1/C_1 = Q_2/C_2$ over C_1 og C_2 ,
 som lagrer total ladning
 $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$, slik at
 total kapasitans blir
 $C = Q/V = C_1 + C_2$

Seriekobling:



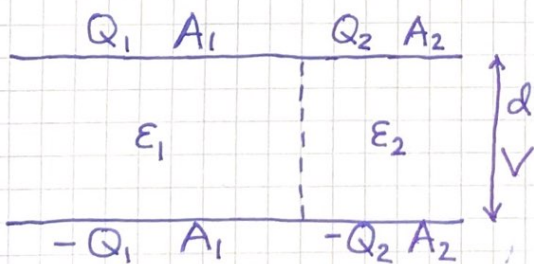
$$V = V_+ - V_-$$

Lik ladning $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$
 på C_1 og C_2 , og total spenning
 er $V = V_1 + V_2$, slik at total
 kapasitans blir gitt ved at

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

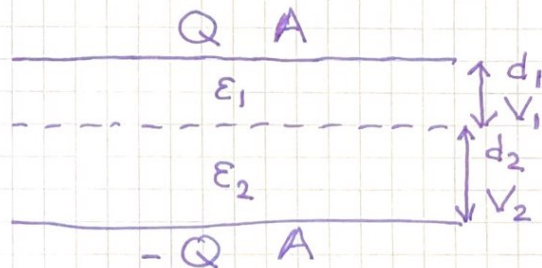
N stk. i parallell: $C = \sum_{j=1}^N C_j$ I serie: $C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}$

Kondensator fylt med ulike dielektrika får kapasitans
 som for hhv parallell- og seriekobling:



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$



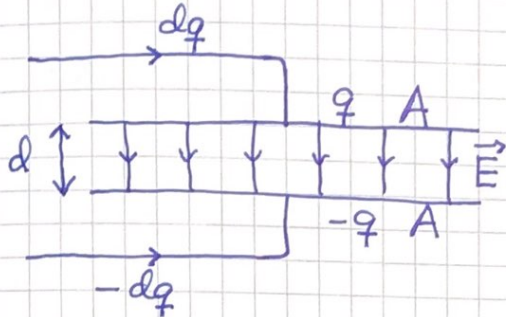
$$V = V_1 + V_2$$

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

Energi lagret i \vec{E} -felt [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

(74)

Opplading av en kondensator krever et arbeid, som resulterer i en potensiell energi lagret i \vec{E} -feltet.



Ladningsøkning fra $\pm q$ til $\pm (q + dq)$ øker den potensielle energien med

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi:

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Med $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = E \cdot d$ får vi:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

Her er $A \cdot d$ volumet mellom platene, der $E \neq 0$.

Dermed:

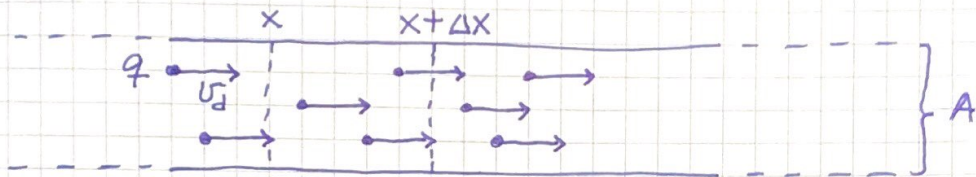
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

som gjelder generelt.

Elektrisk strøm [OS2 9,10 ; YF 25,26 ; LHL 21,22] (75)

Strøm. Strømtetthet [OS2 9.1,9.2 ; YF 25.1 ; LHL 21.1]

Leder med n frie ladninger q pr volumenhet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen:



strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet: $[I] = \frac{C}{s} = A$
(ampere)

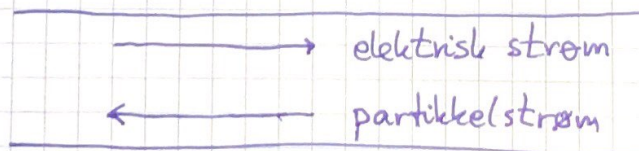
I løpet av $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer all fri ladning $q \cdot n \cdot A \cdot \Delta x$ i volumet $A \cdot \Delta x$ tverrsnittet ved $x + \Delta x$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$\Rightarrow j = I/A = n q v_d, \text{ dvs: } \boxed{\vec{j} = n q \vec{v}_d} \quad (A/m^2)$$

I metall: $q = -e \Rightarrow \vec{j} = -n e \vec{v}_d$

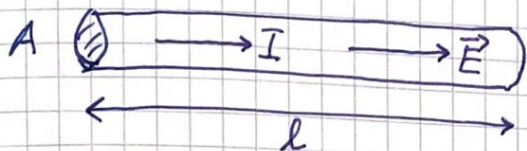


Ohms lov

[OS2 9.2-9.4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

(76)

Anta spenning V over leder med lengde l :



$$V = E \cdot l$$

$$j = I/A$$

N2: $\vec{F} = m_e \vec{a}$; kollisjoner $\Rightarrow \vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau$, der τ er midlere tid mellom kollisjoner. $\vec{F} = -e\vec{E}$ og $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$ gir nå Ohms lov, på mikroskopisk form:

$$\vec{j} = -ne\tau \vec{a} = -ne\tau \cdot \left(-\frac{e}{m_e} \vec{E}\right) = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$$

Dvs: $\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$ Materialets konduktivit \ddot{e} t: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$

("Drude-modellen"; P. Drude ca 1900)

$j = I/A$ og $E = V/l$ gir nå:

$$\boxed{V = R \cdot I \quad ; \quad R = \frac{l}{\sigma A}}$$

Ohms lov; $R = \text{lederens motstand}$

Materialets resistivit \ddot{e} t: $\rho = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}$

Lederens konduktans: $G = \frac{1}{R} \Rightarrow I = G \cdot V$; $G = \frac{\sigma \cdot A}{l}$

Enheter: $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$ (ohm); $[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

$$[\rho] = \Omega \cdot m \quad ; \quad [\sigma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = S/m$$

Kretssymbol:



(evt:)

Eks: Betraktninger om en strømførende kobber-
ledning med tverrsnitt $A = 2.5 \text{ mm}^2$ og strøm $I = 1 \text{ A}$.

(77)

- Elektronfart v_T : $K_e = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$ (følger av kinetisk gassteori og ideell gaslov $p \cdot V = N k_B T$)
 $\Rightarrow v_T = \sqrt{3 k_B T / m_e} \approx 10^5 \text{ m/s}$ ved romtemp. $T \approx 300 \text{ K}$;
 $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)
- Midlere fri veilengde ("mean free path"), dvs midlere lengde mellom påfølgende kollisjoner: $d \approx 1 \text{ nm}$
- Midlere tid mellom kollisjoner: $\tau = d / v_T \approx 10^{-14} \text{ s}$
- Tetthet av frie elektroner: Anta 1 pr Cu-atom, molar masse 63 g og massetetthet ca 9 g/cm^3
 $\Rightarrow n \approx \frac{9 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3}{63 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \approx 10^{29} \text{ pr m}^3$
- Konduktivitet (Drude): $\sigma = n e^2 \tau / m_e \approx 3 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
- Midlere driftshastighet: $v_d = j / n e = I / n e A \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$
 $\approx 9 \text{ cm/h}$

Resistivitet og temperatur [OS2 9.3; YF 25.2; LHL 21.2, 21.5] (78)

Druedmodellen : $\rho = m_e / n e^2 \tau \sim 1/n \cdot \tau$

Metaller : Stor n , som er lite avhengig av T . Kortere tid τ mellom kollisjoner når T øker. Dvs, ρ øker med økende T . Exp. gir linear oppførsel,

$$\rho(T) = \rho_0 \{1 + \alpha \cdot (T - T_0)\} ; \alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$$

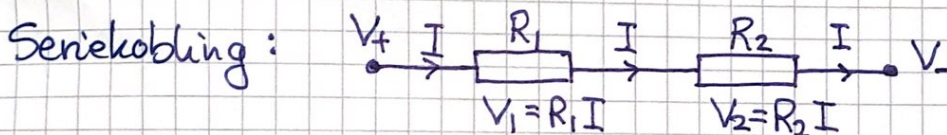
$\rho_0 = \rho(T_0)$ ved referansetemp. f.eks. 20°C ($\approx 293 \text{ K}$)

Halledere (Si, Ge, GaAs, GaN,):

Isolator med $n \approx 0$ ved $T = 0$. Økt $T \Rightarrow$ elektroner frigjøres $\Rightarrow n$ øker $\Rightarrow \rho$ avtar når T øker

Anvendelser : Dioder, transistorer, solceller, lysdioder osv.

Kobling av motstander [OS2 10.2; YF 26.1; LHL 21.3]

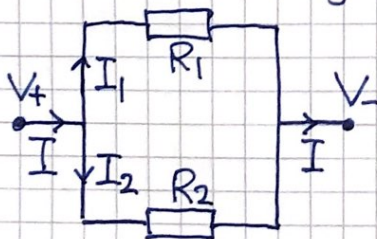


Lik strøm gjennom R_1 og R_2 .

Total spenning : $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)I$

$$\Rightarrow R = V/I = R_1 + R_2$$

Parallellkobling :



Lik spenning over R_1 og R_2 :

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Total strøm : $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow I = V/R_1 + V/R_2 = V/R$$

$$\Rightarrow 1/R = 1/R_1 + 1/R_2$$

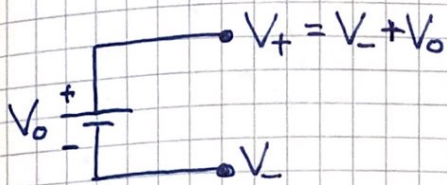
N i serie : $R = \sum_{j=1}^N R_j$; N i parallell : $R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}$

DC-kretser [OS2 10 (9); YF 26 (25); LHL 22]

79

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning

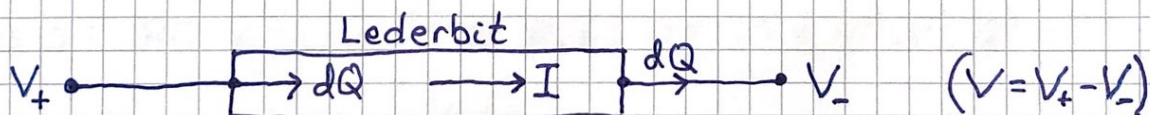
$V_0 = V_+ - V_-$ mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri. Solcelle.

Kirchhoffs regler [OS2 10.3; YF 26.2; LHL 22.3]

- K1: Ladningsbevarelse \Rightarrow netto strøm inn mot og ut av et knutepunkt like store; $\sum_j I_j = 0$ (med f.eks. $I_j > 0$ inn og $I_j < 0$ ut)
- K2: Energibevarelse \Rightarrow potensialendringer summerer seg til null rundt alle lukkede sløyfer; $\sum_j V_j = 0$ (med f.eks. $V_j < 0$ for spenningsfall)

Elektrisk effekt [OS2 9.5; YF 25.5; LHL 22.2]



$$\text{Effekt inn: } P_{\text{inn}} = \frac{dU_{\text{inn}}}{dt} = \frac{V_+ \cdot dQ}{dt} = V_+ \cdot I$$

$$\text{Effekt ut: } P_{\text{ut}} = \frac{dU_{\text{ut}}}{dt} = \frac{V_- \cdot dQ}{dt} = V_- \cdot I$$

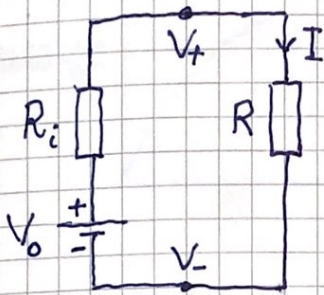
$$\text{Effekttap i lederbiten: } P = P_{\text{inn}} - P_{\text{ut}} = (V_+ - V_-) \cdot I = V \cdot I$$

Dersom ohmsk motstand: $V = R \cdot I$

$$\Rightarrow P = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$

Eksempler

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde



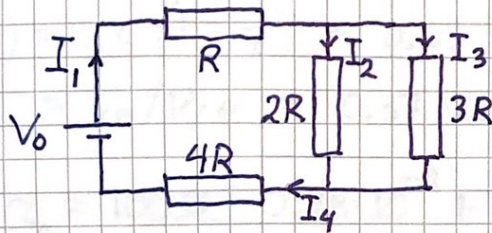
$$K2: V_0 - R_i I - R I = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

Polspenning:

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0 \text{ n\u00e5r } R_i > 0$$

Eks 2:



$$V_0 = 30 \text{ V}, R = 10 \Omega$$

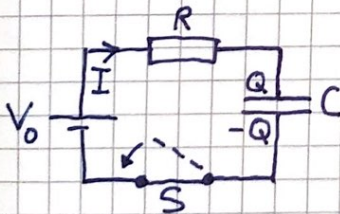
Bestem I_1, I_2, I_3 og I_4

L\u00f8sn: $R_{\text{TOT}} = R + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}\right)^{-1} + 4R = 6.2 R = 62 \Omega$

$$\Rightarrow I_1 = I_4 = \frac{30}{62} \text{ A} = \underline{0.48 \text{ A}}$$

$$I_2 / I_3 = 3/2 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{5} I_1 = \underline{0.29 \text{ A}}; I_3 = \frac{2}{5} I_1 = \underline{0.19 \text{ A}}$$

Eks 3: RC-krets [OS2 10.5; YF 26.4; LHL 22.4]



$Q(t=0) = 0$; bryter S lukkes ved $t=0$

Bestem $Q(t)$ og $I(t)$.

Sammenlign (a) $R=100 \Omega, C=0.28 \text{ nF}$

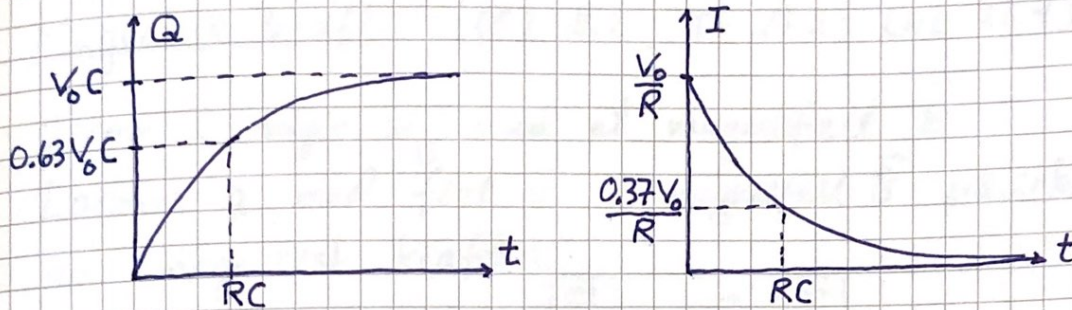
og (b) $R=100 \text{ M}\Omega, C=0.25 \mu\text{F}$

L\u00f8sn: $K2 \Rightarrow V_0 - R I - Q/C = 0$; $I = dQ/dt$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \{1 - e^{-t/RC}\} ; I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (81)$$



$\tau = R \cdot C =$ kretsens tidskonstant = tidsskala for oplading (og udlading) av kondensatoren

$$Q(\tau) = V_0 C \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63 V_0 C ; Q(3\tau) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = V_0/R \cdot e^{-1} \approx 0.37 V_0/R ; I(3\tau) \approx 0.05 V_0/R$$

$$(a) \tau_a = 100 \Omega \cdot 0.28 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 28 \text{ ns}$$

$$(b) \tau_b = 10^8 \Omega \cdot 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 25 \text{ s}$$

Anvendelser : Blinklys, kupélys

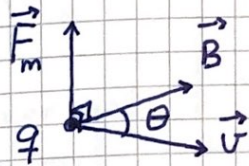
Magnetostatikk [OS2 11,12; YF 27,28; LHL 23]

Magnetisk kraft [OS2 11.2; YF 27.2; LHL 23.4]

Strøm I omgir seg med et magnetfelt \vec{B} .

Ladning q med fart \vec{v} i magnetfelt \vec{B} påvirkes av magnetisk kraft:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

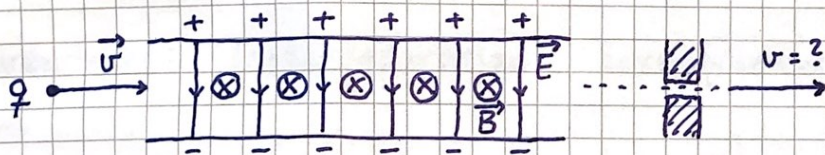


$$F_m = q v B \sin \theta$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

Enhet: $[B] = \text{N/C} \cdot \text{m/s} = \text{N/Am} = \text{T}$ (tesla)

Eks: Krysset \vec{E} - og \vec{B} -felt



Notasjon:

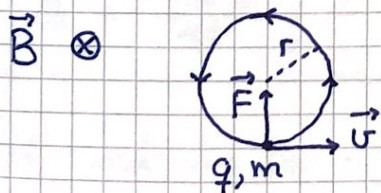
\otimes inn i planet
 \odot ut av -"-

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

Hvis (f.eks.) $q > 0$: \vec{F}_e ned, \vec{F}_m opp

\Rightarrow Ingen avbøyning når $v = E/B$

Ladning i uniformt \vec{B} -felt [OS2 11.3; YF 27.4; LHL 23.1, 23.4]



Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$ (bare v_{\perp} påvirkes av \vec{B})
 $\Rightarrow F = qvB$

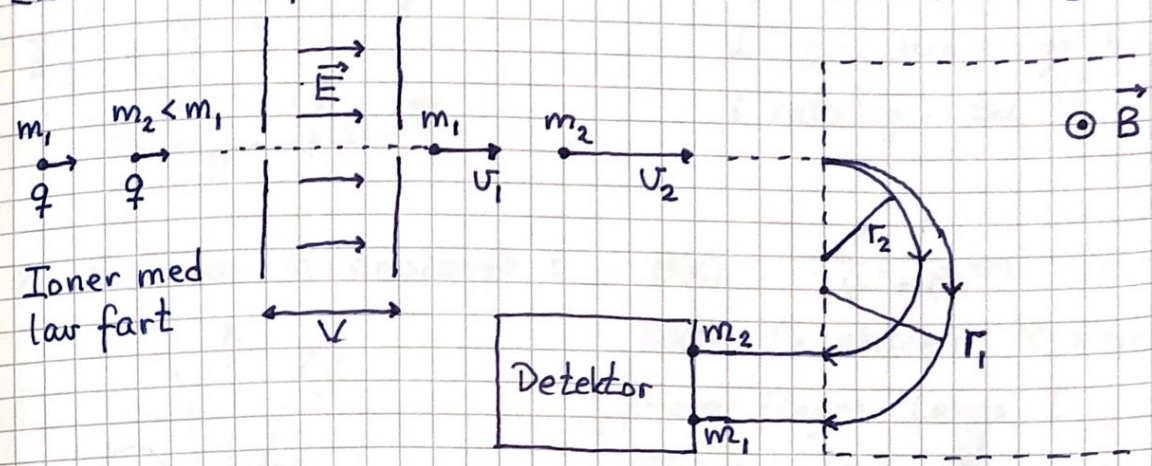
Tilført effekt: $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$; magn.kraft gjør aldri arbeid!

\Rightarrow Uniform sirkelbevegelse med konstant $K = \frac{1}{2}mv^2$

$N2 \Rightarrow qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB$

Syklotronfrekvensen : $\omega_c = v/r = qB/m$

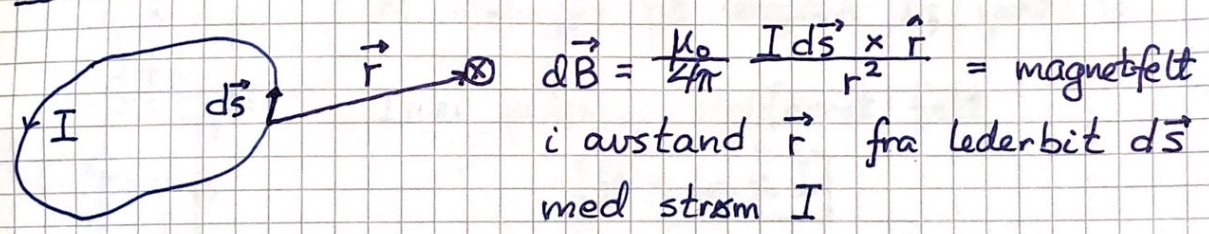
Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; YF 27.5; Øring 12]



$\frac{1}{2}mv^2 = qV$ og $r = mv/qB \Rightarrow r \sim \sqrt{m}$

Anvendelser: Isotopseparasjon. Identifisering av ioner.

Biot-Savarts lov [OS2 12.1; YF 28.2; LHL 23.5]



Totalt \vec{B} -felt fra strømsløyfe :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot-Savarts lov (1820)}$$

Jf. Coulombs lov : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$

Vakuump permeabiliteten : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$

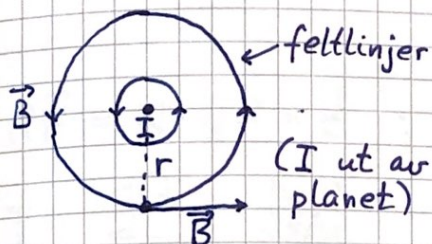
— " — permittiviteten : $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Farten til E.M. bølger i vakuum : $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Tre sentrale eksempler (se notat for utledninger)
 [OS2 12.2+4+6; YF 28.3+5+7; LHL 23.5+6]

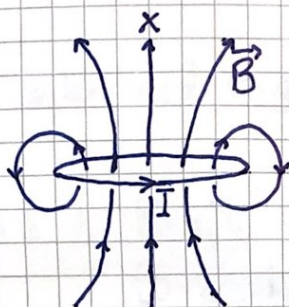
(84)

1. Lang rett strømførende leder: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$; dvs tangent



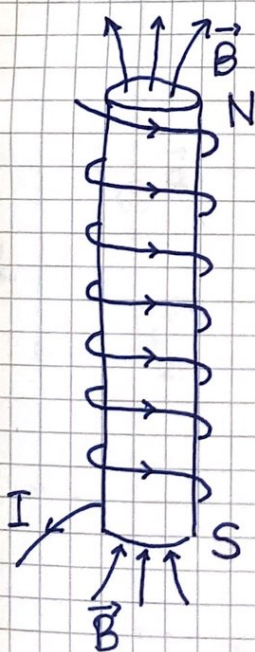
til sirkel; tommel langs I gir fire øvrige fingre i retningen til \vec{B} ("HHR")

2. Sirkular strømsløyfe:



$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$ på sløyfas akse (x-aksen); $R =$ sløyfas radius
 Fire fingre langs I gir tommel langs \vec{B} på sløyfas akse

3. Spole:



Anta lang og tettviklet spole med N viklinger på lengden l ; spolestrøm I.

Inni spolen: Uniformt felt

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

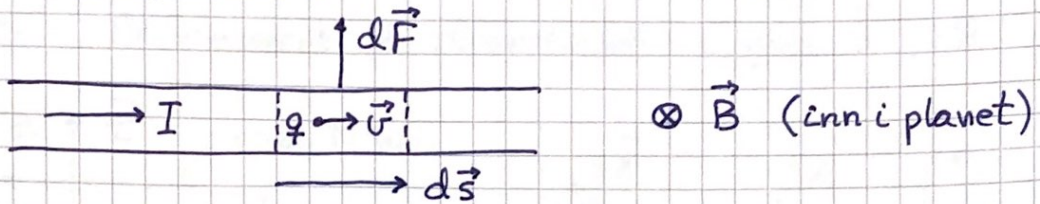
$n = N/l =$ antall viklinger pr lengdeenhet

Utenfor spolen: $B \approx 0$

(unntatt ved endene, dvs de to polene N (nord) og S (sør).)

Vi har en elektromagnet.

Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4; YF 27.6; LHL 23.2] (85)



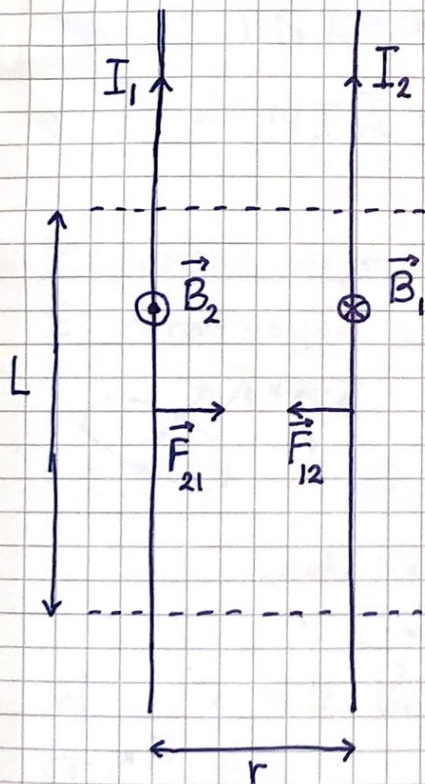
$$d\vec{F} = N \cdot q \vec{v} \times \vec{B} ; N = \# \text{ frie ldn. } q \text{ p\aa lengden } ds$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N \cdot q}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft p\aa hele lederen:
$$\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$$

Ret leder med lengde L i uniformt \vec{B} -felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom parallelle str\ommener
[OS2 11.4; YF 28.4; LHL 23.5]



$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi r} = \text{feltstyrke i avstand } r \text{ fra leder 1, 2}$$

Innbyrdes kraft p\aa lengde L:

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

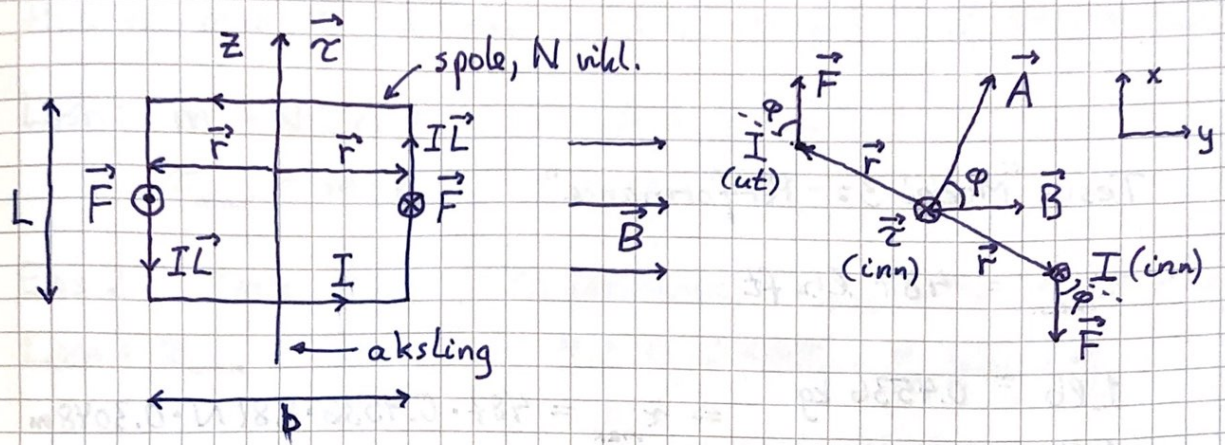
Pr lengdeenhet:

$$f = F/L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

I_1 og I_2 motsatt vei gir frast\otstning.

Eks 2: Likestrømsmotor [OS2 11.5; YF 27.8; LHL 26.3]

Virkemåte: Dreiemoment på strømsløyfe(r) i ytre \vec{B} -felt



$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} ; \quad \vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$F = ILB ; \quad r = b/2 ; \quad A = b \cdot L$$

$$\Rightarrow \tau = N \cdot 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB \cdot \sin\phi$$

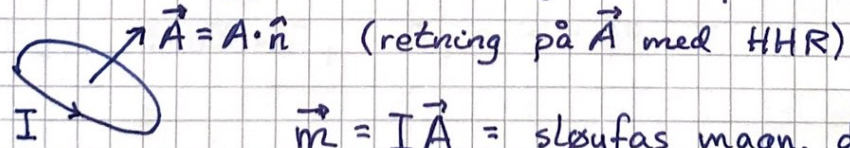
$$= N \cdot IA \cdot B \cdot \sin\phi$$

$$= |NIA\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = NIA\vec{A} \times \vec{B} = \text{dreiemoment på spole, N vikl.}$$

Magnetisk dipolmoment [OS2 11.5; YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

Ei strømsløyfe er en magnetisk dipol.

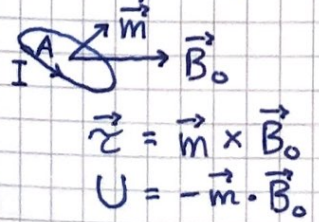


$$\vec{m} = I\vec{A} = \text{sløyfas magn. dipolmoment}$$

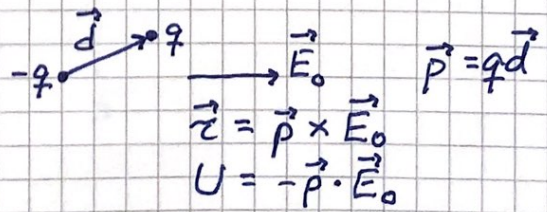
(evt. $NIA\vec{A}$ for spole med N viklinger)

$$[m] = A \cdot m^2$$

\vec{m} i ytre felt \vec{B}_0 :



jf. \vec{p} i ytre felt \vec{E}_0 :



Eks 1: Hva er m for spole med 800 vikl. rundt tverrsnitt 4.0 cm^2 når spolestrømmen er 3.2 A ?

Hva er max τ på denne spolen i ytre felt med feltstyrke 6.0 T ?

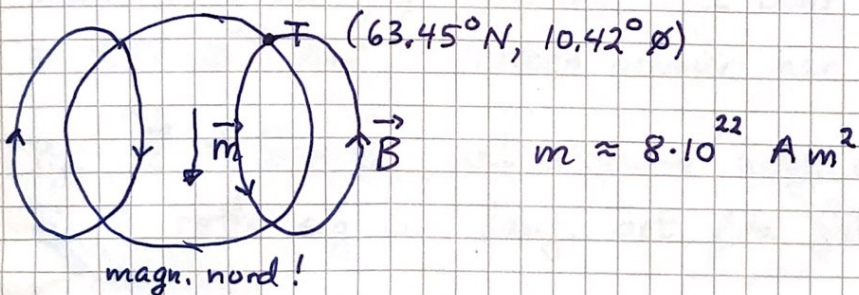
Løsn: $m = NIA = 800 \cdot 3.2 \text{ A} \cdot 4.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{1.0 \text{ Am}^2}$

$\tau_{\text{max}} = m \cdot B_0 = \underline{6.1 \text{ Nm}}$

Eks 2: Tesla Model 3 Performance, $\tau_{\text{max}} = 487 \text{ lb ft} = ??$

Løsn: $\tau_{\text{max}} = 487 \cdot 0.4536 \cdot 9.81 \text{ N} \cdot 0.3048 \text{ m} = \underline{661 \text{ Nm}}$

Eks 3: \vec{B} i Trondheim

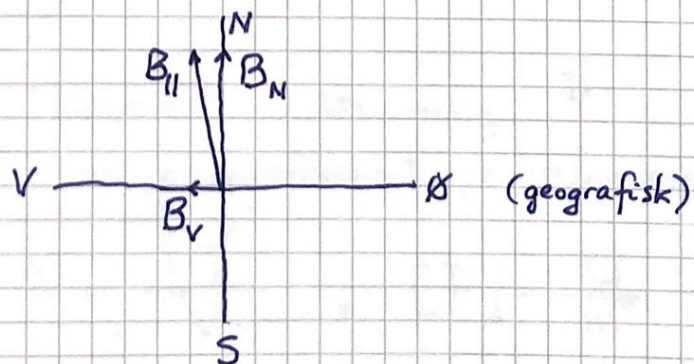
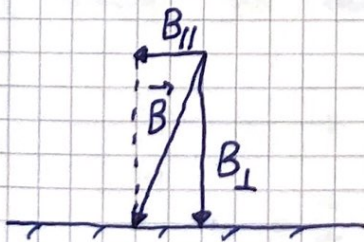


Trondheim mars 2023 (World Magnetic Model)

$B = |\vec{B}| = 51.97 \mu\text{T}$; $dB/dt = 33.5 \text{ nT/år}$

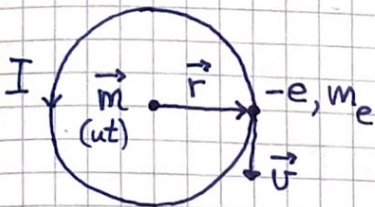
$B_{\perp} = 50.13 \mu\text{T}$, $B_{\parallel} = 13.70 \mu\text{T}$,

$B_N = 13.63 \mu\text{T}$, $B_{\text{Ø}} = (-) 1.39 \mu\text{T}$



Magnetisme [OS2 12.7; YF 28.8; LHL 26.1-26.6] (88)

Atomære magnetiske dipoler:

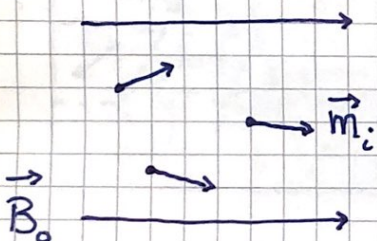


$$I = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}; \quad A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r \quad \left. \begin{array}{l} \\ L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{e \cdot L}{2m_e}$$

Kvantemekanikk gir dreieimpuls L og spinn S for elektroner (og andre elementærpartikler) av størrelsesorden $\hbar = h/2\pi$ (med $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant), slik at atomer er magn. dipoler med dipolmoment av størrelsesorden $\mu_B = e\hbar/2m_e = 1$ Bohr magneton $\approx 9.27 \cdot 10^{-24}$ Am². (Noen atomer har $\vec{m} = 0$.)

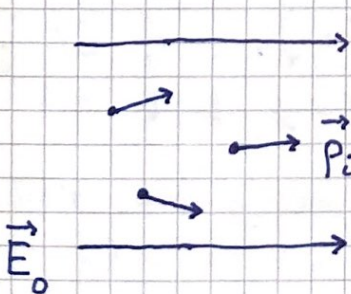
Pga $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ vil atomære magn. dipoler få en tendens til å rette seg inn langs det ytre feltet \vec{B}_0 :



Materialets magnetisering \vec{M}
 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment pr volumenhet:}$

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V}; \quad [M] = \frac{A}{m}$$

(Analogi for dielektrikum i ytre felt \vec{E}_0 :



Materialets polarisering \vec{P} er
 elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

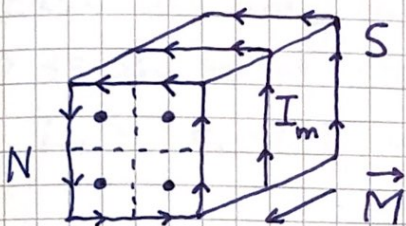
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{V}; \quad [P] = \frac{C}{m^2})$$

Ferromagnetisme: Fe, Ni, Co, $Nd_2Fe_{14}B$, ...

(89)

Naboatomer vekselvirker \Rightarrow Parallele \vec{m} gir lavest energi

Permanentmagnet: Parallele \vec{m} i hele magneten. Resulterer i makroskopisk magnetiseringsstrøm i overflaten.

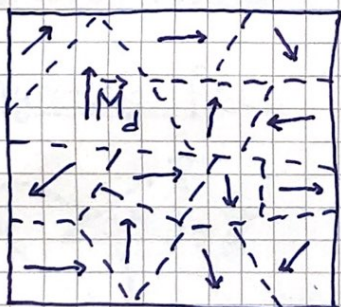


Indre strømmer kansellerer.

Magneten blir som en spole!

(Jf. overflateladning på dielektrikum i ytre \vec{E} -felt; evt. ferroelektrikum med spontan polarisering \vec{P} , f.eks. $BaTiO_3$)

Umagnetisk ferromagnet (f.eks. stål): Små domener ($1 - 10^6 \mu m^3$) med \vec{M}_d i alle mulige retninger.

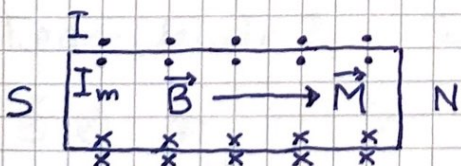


Hvert domene er en magnet, men total magnetisering er

$$\vec{M} = \sum_d \vec{M}_d = 0$$

slik at materialet er umagnetisk.

Men blir magnetisk i ytre felt \vec{B}_0 pga innretting av \vec{M}_d langs \vec{B}_0 . F.eks. spole med jernkjerne:



I = spolestrøm pr vikling

I_m = magn.strøm pr vikling

Felt inni spolen pga I : $B_0 = \mu_0 n I$ ("ytre" felt)

———— " ————— I_m : $B_m = \mu_0 n I_m$

\Rightarrow Totalt felt inni spolen: $B = \mu_0 n (I + I_m) > B_0$

Lineær respons: $B = \mu_r B_0$; $\mu_r =$ relativ permeabilitet (90)

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 n I = \mu n I; \mu = \mu_r \mu_0 = \text{materialets permeabilitet}$$

Vakuüm: $\mu_r = 1$. Ferromagnet: μ_r opp mot mange tusen

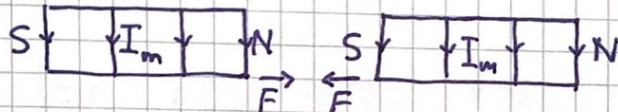
Eks: Spole med jernkjerne, $N=1600$, $\mu_r = 500$, $l = 10\text{cm}$, $I = 0.2\text{A}$

$$\Rightarrow B = 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1600/0.10) \cdot 0.2\text{ T} \approx \underline{2.0\text{ T}}$$

$$I_m = (\mu_r - 1)I \approx \mu_r \cdot I = \underline{100\text{ A}} \quad (\text{pr vikling})$$

Eks: Hvorfor tiltrekning / frastøtning mellom to magneter

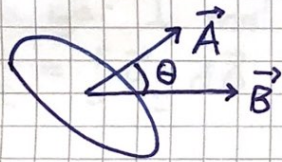
Løsn:



Parallele strømmer
 \Rightarrow Tiltrekning

Elektrodynamikk [OS2 13-15; YF 29-31; LHL 24, 25, 27]

Magnetisk fluks [OS2 13.1; YF 27.3; LHL 23.7]

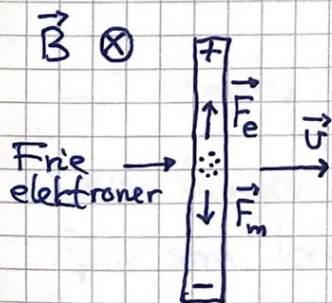


$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta = \text{magn. fluks gjennom flaten med areal } A$$

Generelt: $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ Enhet: $[\Phi] = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}$ (weber)

Faradays induksjonslov [OS2 13.1; YF 29.1-4; LHL 24.1]

Leder, lengde l , trekkes med fart \vec{v} gjennom uniformt felt \vec{B} :



\vec{F}_m induserer overskudd av elektroner nederst

\Rightarrow el. felt \vec{E} rettet nedover (fra + mot -)

\Rightarrow spenning $\Delta V = E \cdot l$ i lederen

Likerekt når $F_e = F_m \Rightarrow e \cdot E = evB \Rightarrow E = vB$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V = vBl}$$

L for ideell spole : $\Phi = NBA = N\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right) IA$

$\Rightarrow L = \Phi/I = N^2 \mu_0 A/l$ (l = lengde; A = tverrsnitt)

Energi lagret i B-felt [OS2 14.3; YF 30.3; LHL 25.3]

= arbeidet som må gjøres mot induisert motspenning når strømmen økes fra $i=0$ til $i=I$ (f.eks. i spole)

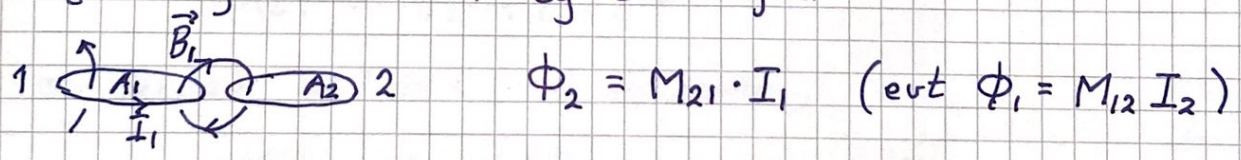
$\Rightarrow dU = P dt = v \cdot i \cdot dt = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$
= tilført energi når strømmen økes fra i til $i + di$

$\Rightarrow U = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \mu_0 A}{l} \cdot \left(\frac{B}{\mu_0 N/l}\right)^2$
 $= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot (A \cdot l)$; $A \cdot l =$ volum inni spolen, der $B \neq 0$

$\Rightarrow u_B = B^2/2\mu_0 =$ energi pr volumenhett i B-felt

$\Rightarrow u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 =$ energi pr volumenhett i elektromagnetisk felt

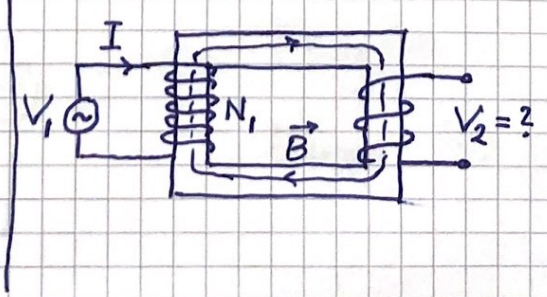
Gjensidig induktans og induksjon:



$M_{12} = M_{21} = M =$ sloyfenes gjensidige induktans ; $[M] = H$

$V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M \dot{I}_1$
 $V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M \dot{I}_2$

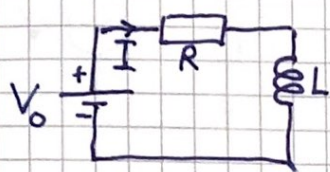
Eks: Transformator



$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{N_1}{N_2}$

Avsluttende eksempler [OS2 14,15; YF 30,31; LHL 25,27] (93)

Eks 1: RL-krets

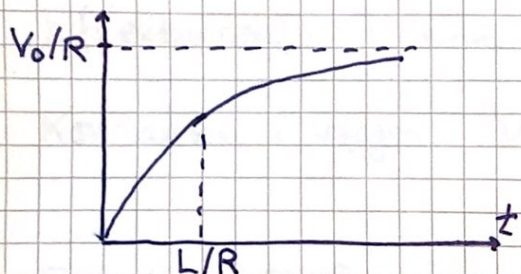


V_0 kobles til ved $t = 0$

$$K1: V_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Samme lign. for I som for Q i RC-krets

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga industert motspenning i spolen tar det en tid av størrelsesorden τ (evt. 3τ) før strømmen blir V_0/R .

Eks 2: Vekselspenning

Med f.eks. vannkraft: Vann med stor fart driver turbin, som sørger for å rotere spole med N vinkl. omkling areal A i magnetfelt \vec{B} med vinkelfart ω . Gir tidsavhengig omsluttet fluks

$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

og dermed industert vekselspenning

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad ; \quad V_0 = NBA\omega$$

Kretssymbol:



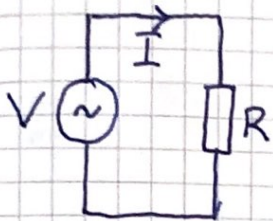
Frekvens:

$$f = \omega/2\pi$$

Europa: 50 Hz

Eks 3: Effektivverdier

(94)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0/R$$

Effekttap:

$$P(t) = V(t) \cdot I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}}$$

$$\text{Effektivverdier: } V_{\text{rms}} = V_0/\sqrt{2} ; I_{\text{rms}} = I_0/\sqrt{2}$$

$$\text{Kontakten i veggen: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: Énfase, trefase og 400 V

$$\text{Énfase: } \begin{array}{ccc} 1 \bullet & & \bullet 2 \end{array} \quad V(t) = V_2 - V_1 = V_0 \sin \omega t$$

$$\text{Trefase: } \begin{array}{ccc} & 3 \bullet & \\ 1 \bullet & & \bullet 2 \end{array} \quad \begin{aligned} V_1 &= V_0 \sin \omega t \\ V_2 &= V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3) \\ V_3 &= V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3) \end{aligned}$$

$$V_{21} = V_2 - V_1 = V_0 \left\{ \sin(\omega t + 2\pi/3) - \sin \omega t \right\}$$

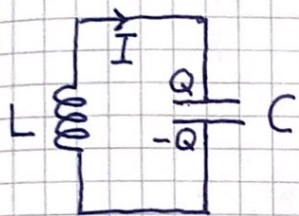
$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow V_{21} = 2 V_0 \cos(\omega t + \pi/3) \cdot \sin(\pi/3) = \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \pi/3)$$

$$\Rightarrow (V_{21})_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3} V_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{1.5} \cdot 325 \text{ V} = 398 \text{ V} \approx \underline{400 \text{ V}}$$

Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

(95)



Startverdier (f.eks): $Q(0) = Q_0$; $I(0) = 0$

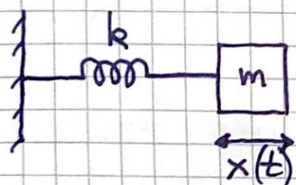
$$K2: -L\dot{I} - Q/C = 0 \quad ; \quad I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$I(t) = -I_0 \sin \omega_0 t \quad ; \quad I_0 = Q_0 \omega_0$$

Mekanisk analogi:



$$N2: -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Analoge størrelser: $Q \leftrightarrow x$; $I \leftrightarrow \dot{x}$; $L \leftrightarrow m$; $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 =$ energi i \vec{B} -feltet i spolen

$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} Q^2/C =$ —" — \vec{E} -feltet i kondensatoren

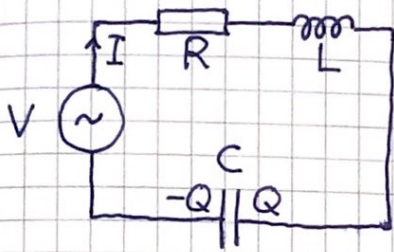
Konservative system uten dissipasjon av energi:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$= Q_0^2 / 2C = \text{konstant}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

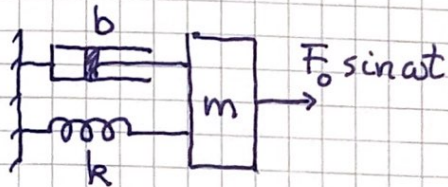
(96)



$$K2: V_0 \sin \omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

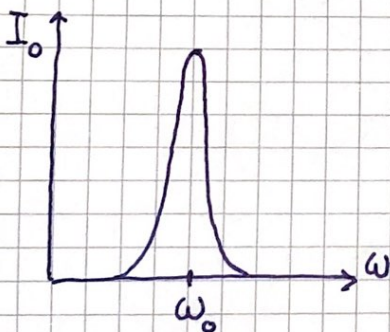
$$\Rightarrow b \leftrightarrow R; \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

Resonans når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}; \quad 2\delta = R/L$$

$$I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



Halvverdibredde: $\Delta\omega = 2\delta = R/L$

Kvalitetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Ekspimentelt:

Med voltmeter måles $V_R = R \cdot I$ og $V_C = \frac{Q}{C}$, og dermed $I_0(\omega)$ og $Q_0(\omega)$.