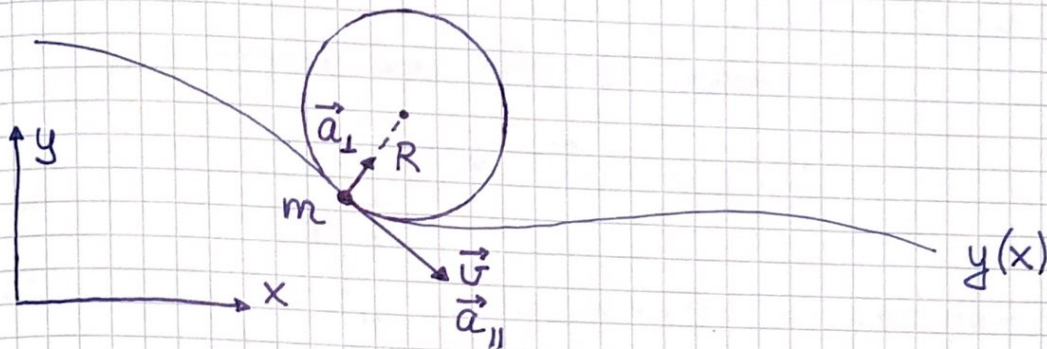


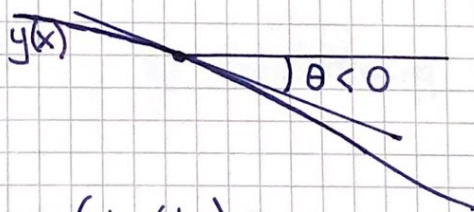
Bewegelse langs krum bane

(LAB!)

9



- R = krumningsradius = radius i sirkel som best tangerer banen $y(x)$
- $\frac{1}{R} =$ banens krumning = $|y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$
(se TFY4104 H2019 s.10-11 for utledning)
- $a_{\perp} = v^2/R$, retning inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow \frac{1}{R} = |y''|$
- $y'' = 0$ i vendepunkter og for rett bane $\Rightarrow \frac{1}{R} = 0; R \rightarrow \infty$
- banens helningsvinkel θ :



$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$$

Eks: Hva er $R(x)$ når $y(x) = x^2/2a$? ($a > 0$)

Løs: $y'(x) = x/a$; $y''(x) = 1/a \Rightarrow R(x) = a \cdot (1 + x^2/a^2)^{3/2}$

Dvs minst $R = a$ i $x = 0$.

Newtons Lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3]

10

m, \vec{v}, \vec{a} = hhv legemets masse, hastighet, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}$

N2: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

N3: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$; dvs krefter er vekselvirkninger mellom legemer : Hvis legeme 1 virker på legeme 2 med kraft \vec{F}_{12} , virker 2 på 1 med kraft $-\vec{F}_{12}$

Enhet: $[F] = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$ (newton)

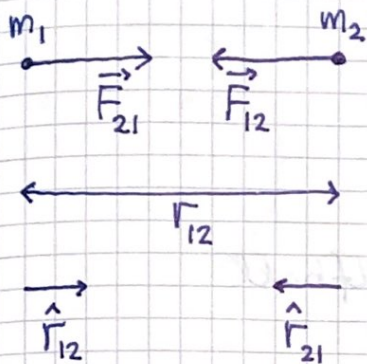
Legemets impuls (= bevegelsesmengde): $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Fundamentale krefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3 ; YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser
- Coulombkrefter: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger
- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerener.

Gravitasjon:



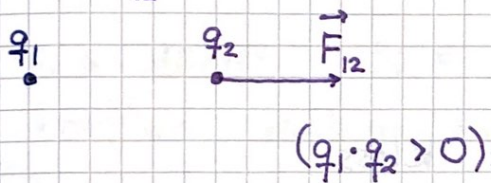
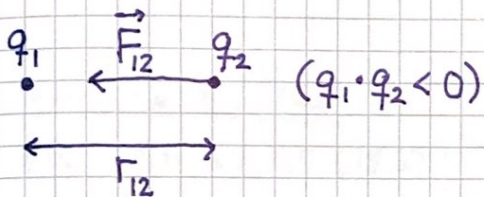
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombkrefter:



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Enhet for ladning:

$$[q] = C \text{ (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

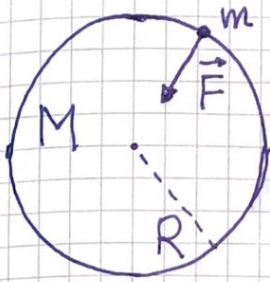
(vakuumpemittiviteten)

Krefter i mekanikken:

- tyngdekraften fra jorda
- kontaktkrefter mellom legemer i kontakt;
i bunn og grunn coulombkrefter

Tyngde [OS1 13.2, 5.4; YF 4.4; LL 2.5]

(12)



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; R \approx 6370 \text{ km}$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \text{ med } g = \frac{G \cdot M}{R^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

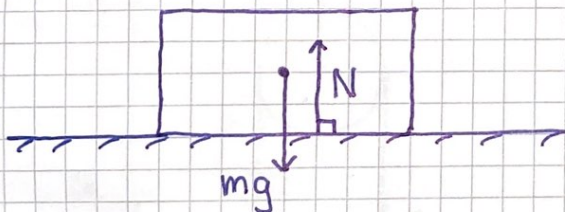
tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten

Fritt fall: Når $F = mg$ er eneste kraft på m , gir N2
 $mg = ma$, dvs $a = g$.

Kontaktkrefter

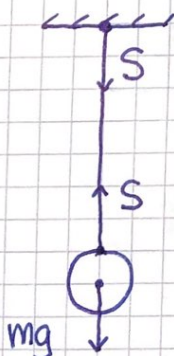
[OS1 5.6, 6.2, 6.4 (14.3); YF 4.1, 5.3; LL 3, 8]

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer



$N = mg$ hvis kloss
i ro (pga N1)

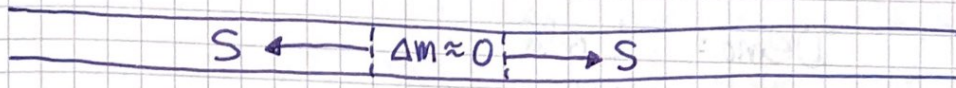
Snorkraft: S = kraft fra snora på legemet
festet til snora



$S = mg$ hvis kule i ro (pga N1)

Spm: Hva er "N3-motkreftene"
til N , S og mg ?

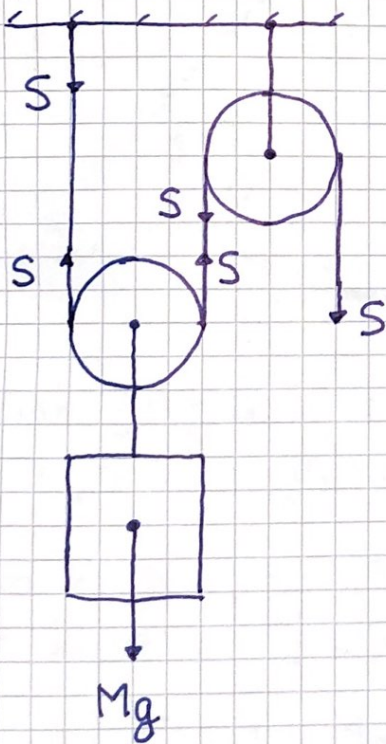
Snorer er som regel lette (tilnærmet masseløse), (13)
rette, og med konstant snordrag S :



Trinser endrer retningen på \vec{S} :



Talje:



N1 for kassa:

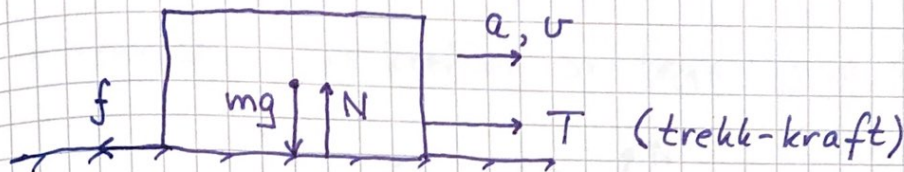
$$2S - Mg = 0$$

$$S = \frac{1}{2} Mg$$

Kraft på taket: $\frac{3}{2} Mg$

Friksjonskrefter: [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1]

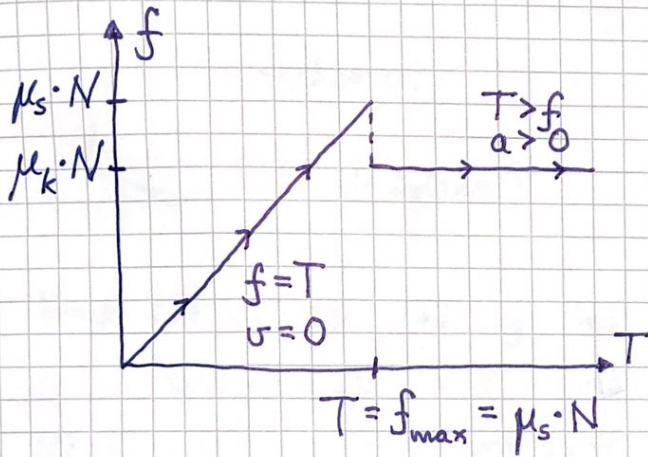
f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; \vec{f} rettet mot legemenes relative bevegelse



$N \perp$ bordet $\Rightarrow N = mg$

$N \parallel$ " " $\Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$

Exp. gir:



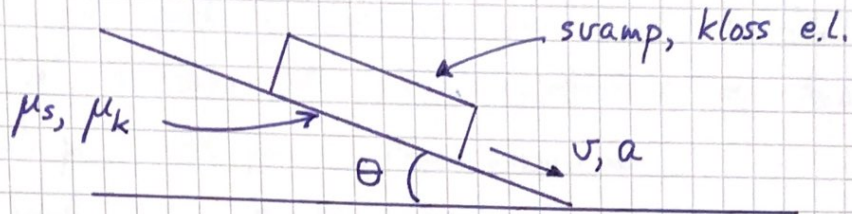
Statisk friksjon: Kloss i ro ($v = 0, a = 0$), $f = T$, $f_{max} = \mu_s \cdot N$, μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Kinetisk friksjon: Klossen glir, $f = \mu_k \cdot N$, μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

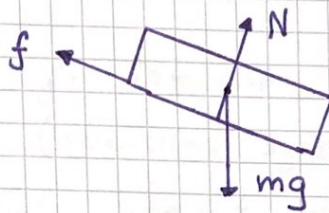
Enhet: $[\mu] = 1$. Som regel er $\mu_s > \mu_k$ fordi ujevnheter gir best grep når $v = 0$.

På løb: Gummi mot plast, $\mu_s \approx 0.6 - 1.0$

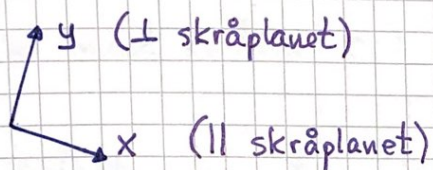
Løsningsstrategi via standard eksempel:



- Finn alle ytre krefter og tegn fritt-legeme-diagram



- Velg passende koordinatsystem. Dekomponér.



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene.

$$N1 \perp \text{skråplanet}: \quad N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{skråplanet}: \quad mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Statisk (a=0): } f = mg \sin \theta \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \text{bare mulig så lenge } \tan \theta \leq \mu_s$$

$$\text{Kinetisk: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

- Måling av μ_s : Øker θ inntil legemet begynner å gli ved vinkel θ_{\max} ; da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$

Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7; YF 5.3; LL8]

(16)

Legeme med fart \vec{v} bremses av omgivende fluid (gass eller væske), karakterisert ved massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ . Et par viktige eksempler:

Fluid	ρ (kg/m^3)	μ ($\text{kg/m}\cdot\text{s}$)
Luft	1.2 - 1.3	$2 \cdot 10^{-5}$
Vann	1000	10^{-3}

Liten fart v gir laminær (pen, lagdelt) strømming av fluidet rundt (noenlunde symmetriske) legemer, og friksjonen f øker lineært med farten,

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' Lov)

Stor fart gir turbulent (uordnet) strømming av fluidet, og f øker kvadratisk med farten,

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}$$

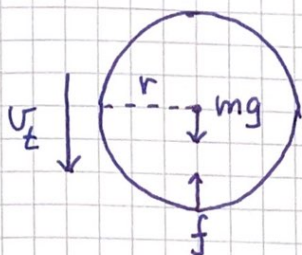
C_d = drag-koeffisienten

A = legemets areal målt $\perp \vec{v}$

Eks: Kule med radius r

$$C_d = 0.5, \quad A = \pi r^2$$

Eks: Terminalfart, dvs maks. fart v_t for kuler/baller som faller. Anta turbulens.



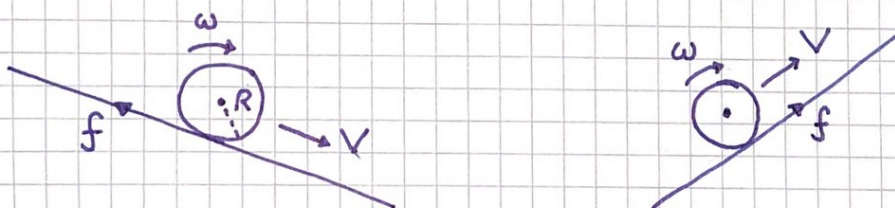
$$N1 \Rightarrow f = mg \Rightarrow \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2 = mg$$

$$\Rightarrow v_t = \left\{ \frac{2mg}{\rho A C_d} \right\}^{1/2}$$

med $A = \pi r^2$, $C_d = 0.5$, $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$

- Bordtennis ($r = 20 \text{ mm}$, $m = 2.7 \text{ g}$) : 8.4 m/s
- Golf ($r = 22 \text{ mm}$, $m = 46 \text{ g}$) : 31 m/s
- Regndråpe ($r \approx 1 \text{ mm}$, $m = 0.0042 \text{ g}$) : 6.6 m/s

Friksjon i labprosjektet:



Kula ruller uten å gli $\Rightarrow \omega = v/R$.

Friksjonskraften f sørger for at $\dot{\omega} > 0$ nedover og $\dot{\omega} < 0$ oppover.

Friksjonen er statisk, og mekanisk energi er bevart.