

Arbeid og energi [OS1 7,8; YF 6,7; LL 4]

(18)

Arbeid [OS1 7.1; YF 6.1-6.3; LL 4.1]

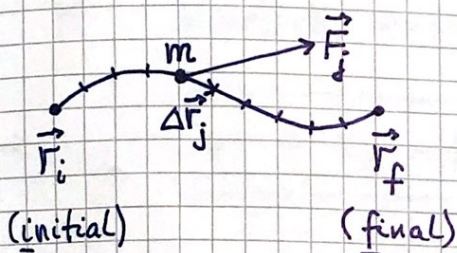
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \cdot \text{forflytning}$



$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$\text{Enhet: } [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \cdot \Delta r_j \cdot \cos \theta_j$$



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av \vec{F} på massen m

Effekt [OS1 7.4; YF 6.4; LL 4.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{arbeid (evt. energi) per tidsenhet}$

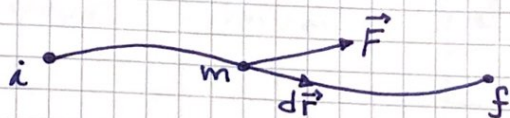
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2; YF6.2; LL4.2]

(19)

Vi bruker def. av arbeid, og N2:



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

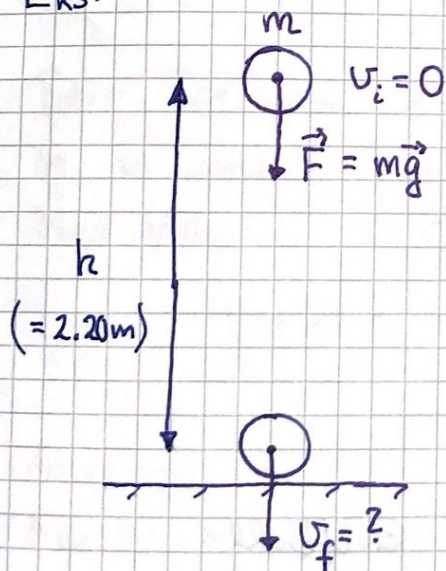
$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_i^f d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Eks:



$$K_i = 0, \quad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$W = F \cdot h = mgh$$

$$W = \Delta K$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

$$(\approx 6.57 \text{ m/s})$$

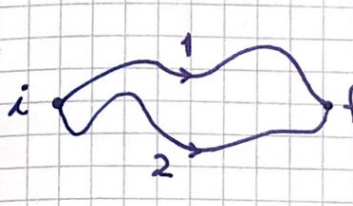
Konservative krefter og potensiell energi

[OS1 8.1-8.4 ; YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

\vec{F} er konservativ dersom $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

↑ integral rundt lukket bane

Da er arbeidet uavhengig av veien fra i til f :



$$W_1 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1$$

$$W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$\Rightarrow W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\Rightarrow W_1 = W_2$, dvs uavh. av veien

Forskjellen i potensiell energi, $\Delta U = U_f - U_i$, er nå definert som

$$\Delta U = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning, og vi velger hvor vi vil sette $U=0$.

Med valget $U(\vec{r}_0) = 0$ er

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Anvendt på kjent (?) eksempel:

Masse m i tyngdefeltet med $y=0$ og $U=0$ på bakken.

Da er $\vec{F} = -mg\hat{y}$ og

$$U(h) = - \int_0^h (-mg) dy = \underline{mgh}$$

Kjent $U(\vec{r})$ gir \vec{F} ved derivasjon:

(21)

$$1D: dU = -F(x) dx \Rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til U :

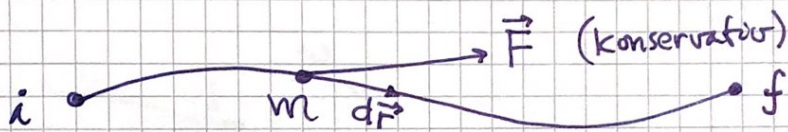
$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z}$$

= en vektor i den retning som U øker raskest
 $\Rightarrow \vec{F}$ peker i den retning U avtar raskest

Eks: Masse m i tyngdefeltet

$$U = U(y) = mgy \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \frac{\partial U}{\partial y} = mg$$
$$\Rightarrow \vec{F} = -mg \hat{y}; \text{ OK!}$$

Bevaring av mekanisk energi [OST 8.3; YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\Delta K = K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

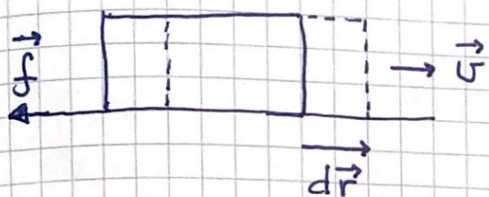
$$\Rightarrow K_f - K_i = U_i - U_f \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$$

Dvs: Total mekanisk energi, $E = K + U$, er bevart i et konservativt system.

Eks: Masse m som slippes i tyngdefeltet.

$$y_i = h, v_i = 0, y_f = 0, v_f = ? \quad K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1; YF 7.3; LL 4.5] (22)



$dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ med kinetisk friksjon da \vec{f} er motsatt rettet $d\vec{r}$

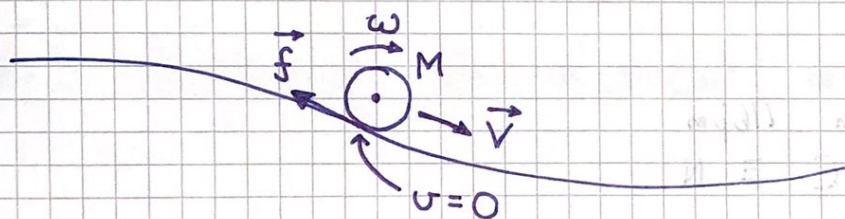
Mekanisk energi omdannes til varme, lyd etc.

Siden $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ er kinetisk \vec{f} ikke konservativ.

Men statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi, ettersom relativ forflytning $d\vec{r} = 0$.

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

Lab: Ren rulling (dvs uten å gli) av kule.



Kulas kontaktpunkt med banen er i ro!

Dermed statisk friksjon \vec{f} og mekanisk energibevarelse.

“Komplikasjon”: Kinetisk rotasjonsenergi pga kulas rotasjon om en akse gjennom massesenteret (CM), i tillegg til translasjonsenergi ($\frac{1}{2}MV^2$) knyttet til at CM beveger seg med hastighet \vec{V} .

Massecenter [OS1 9.6; YF 8.5; LL 5.6, 5.8, 6.1] (23)

eller tyngdepunkt.

$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad \text{er massecenteret (CM) for } N \text{ punktmasser } m_1, m_2, \dots, m_N \text{ i posisjoner } \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse.}$$

For kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r} dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

$$dm = \begin{cases} \lambda dl & \lambda, \sigma, \rho = \text{masse pr lengde-, flate-,} \\ \sigma dA & \text{volumenhet} \\ \rho dV & dl, dA, dV = \text{lengde-, flate-, volumelement} \end{cases}$$

Med uniform massefordeling (konstant massetetthet):

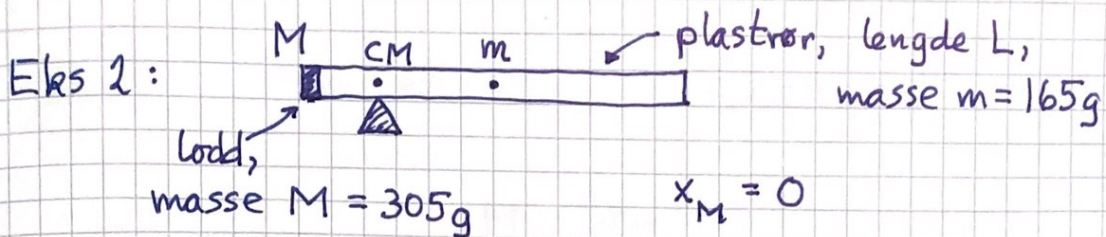
$$dm = \frac{M}{L} dl \text{ (1D)}; \quad dm = \frac{M}{A} dA \text{ (2D)}; \quad dm = \frac{M}{V} dV \text{ (3D)}$$

Eks 1: HCN, blåsyre, lineært, H-C \approx 109 pm, C \equiv N \approx 116 pm

| | | | |
|--------|-----|--------|-----------------------------------|
| H | C | N | |
| • | • | • | |
| x = 0 | 109 | 225 pm | |
| m = 1u | 12u | 14u | (u = 1.66 · 10 ⁻²⁷ kg) |

$$\Rightarrow \bar{x}_{CM} = \frac{1}{27u} \{ 0 \cdot 1u + 109 \text{ pm} \cdot 12u + 225 \text{ pm} \cdot 14u \} \approx 165 \text{ pm}$$

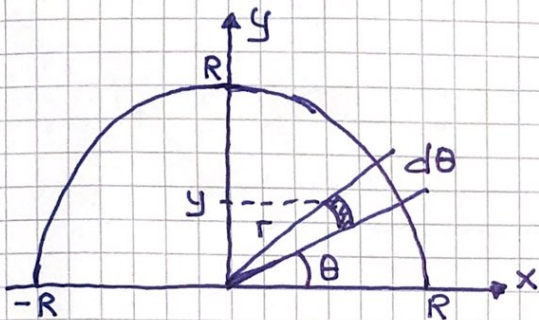
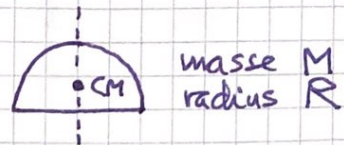
dvs 56 pm fra C og 60 pm fra N



(24)

$$\Rightarrow \bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{m \cdot L}{2(m+M)} \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 3: Halv sirkulær plate



$$dA = r d\theta \cdot dr ; A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$\vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y} \quad (\bar{x}_{CM} = 0)$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \cdot dr$$

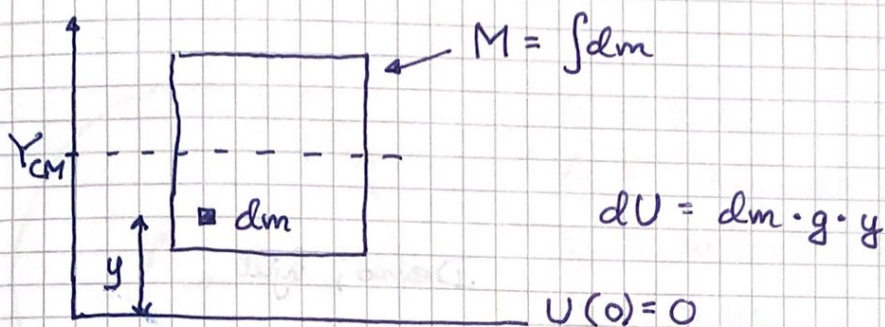
$$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3 ; \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{\underline{0.42R}}$$

Halvsirkelformet bølge: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$

Halvdel av kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$

Eks 4: Potensiell energi i tyngdefeltet

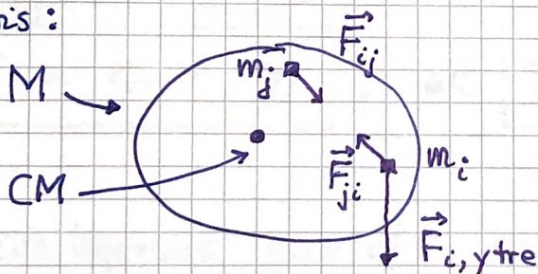


$$U = \int dU = \int g y dm = \underline{\underline{g \cdot M \cdot Y_{CM}}}$$

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6; YF 8.5; LL 5.8]

Kast som gir både translasjon og rotasjon antyder at CM beveger seg som om hele massen var samlet i CM.

Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Legger sammen N2 for alle m_i i legemet/systemet:

Venstre side: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{CM} \} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$

Høyre side: $\sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ytre}$

= netto ytre kraft på legemet, \vec{F}_{ytre}
 = 0 pga N3

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

N2 for CM