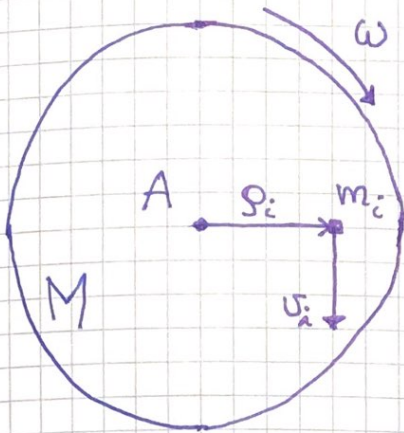


## Rotasjonsenergi og treghetsmoment

(26)

[OS1 10.4, 10.5 ; YF 9.4-9.6 ; LL 6.2-6.4]



$$M = \sum_i m_i = \text{legemets masse}$$

A = rotasjonsaksen

$g_i$  = avstand fra  $m_i$  til A

( $r_i$  = avstand fra  $m_i$  til origo)

$v_i = g_i \omega$  = farten til  $m_i$

$\omega$  = legemets vinkelhastighet

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i g_i^2 \omega^2$$

= kinetisk energi for  $m_i$

⇒ Legemets totale rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i g_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Legemets treghetsmoment, mhp aksen A:

$$I = \sum_i m_i g_i^2 ; \text{ evt } I = \int g^2 dm \text{ for kontinuerlig massefordeling}$$

Stive legemers generelle bevegelse: Translasjon av CM (fart  $\vec{V}$ ) kombinert med rotasjon om akse gjennom CM (vinkelfart  $\omega$ ; evt  $\vec{\omega}$  med retning langs rotasjonsaksen).


Total kin. energi: (se utlagt notat for utledning)

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

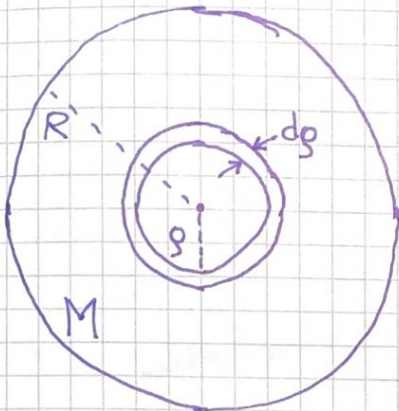
Notasjon: Vi skriver  $I_0$  for treghetsmoment mhp akse gjennom CM.

Eks 1: Ring og hul sylinder

(27)

$M$    $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$

Eks 2: Kompakt skive og sylinder



Tynn ring med radius  $\rho$  og tykkelse  $d\rho$  har areal  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$  og dermed treghetsmoment

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 \frac{M}{A} dA$$
$$= \rho^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$

$$\Rightarrow \text{Hele skiva: } I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\frac{1}{2}MR^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tynt kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3}MR^2 \\ \text{Kule (kompakt): } I_0 = \frac{2}{5}MR^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Se øving og LF} \\ \text{for detaljer.} \end{array}$$

Oppsummert, for "rullende" legemer:

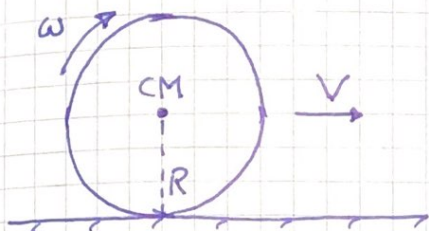
$$\underline{I_0 = c \cdot MR^2}$$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c-verdi	1	2/3	1/2	2/5

## Ren rulling

[OS1 11.1; YF 10.3; LL 6.7, 6.8]

(28)



Vi ser på 1 hel omdreining om CM:

$$\omega = 2\pi/T \quad \text{og} \quad V = 2\pi R/T$$

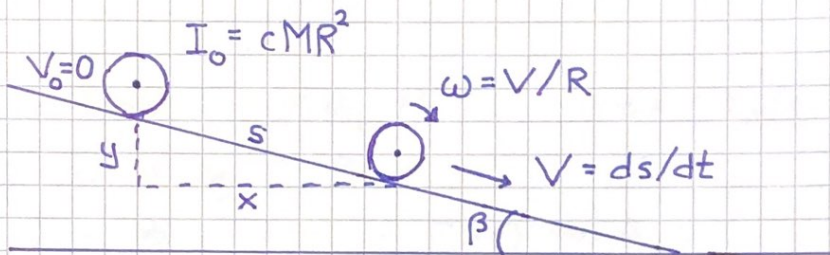
$$\Rightarrow \boxed{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{(1+c)}{2}MV^2$$

Eks: Kompakt kule,  $c = 2/5 \Rightarrow K = \frac{7}{10}MV^2$

På skråplan:



$$V = ? \quad A = ? \quad f = ? \quad \beta_{\max} = ? \quad (\text{dvs uten å gli})$$

Løsning: Mekanisk energi er bevart (statisk friksjon)

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2}MV^2 \Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{2gy/(1+c)}} \quad [\Rightarrow \text{Kula er raskest!}]$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=V_y} = \underbrace{\sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2Vy}}_{=dV/dy} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \cdot \sin\beta}_{=dy/dt} = \underline{\underline{\frac{g \sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon ( $f=0$ ) er  $A = g \sin\beta$  (se s. 15). Nå er  $A$  mindre, så  $\vec{f}$  må ha retning oppover skråplanet:

$$N_2 \Rightarrow Mg \sin\beta - f = MA = \frac{Mg \sin\beta}{1+c} \Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta}}$$

Ren rulling og statisk friksjon bare mulig hvis  $f \leq \mu_s \cdot N$ .

$$\text{Dermed: } \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s \cdot Mg \cos \beta$$

(29)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}}}$$

Eks (lab): Kule,  $c = 2/5$ , og  $\mu_s = 0.5$  gir

$$\beta_{\max} = \arctan \left\{ 0.5 \cdot \frac{7/5}{2/5} \right\} = \arctan \frac{7}{4} \approx \underline{60^\circ}$$

Ren rulling på krum bane: Velger  $\beta > 0$  i motbakke.

$V$ ,  $A$  og  $f$  som på skråplan ( $A = A_{||} = \text{baneakselerasjon}$ )

Baneform:  $y(x)$  Helningsvinkel:  $\beta(x) = \arctan(y'(x))$

Krumningsradius:  $R = [1 + (y')^2]^{3/2} / y''$

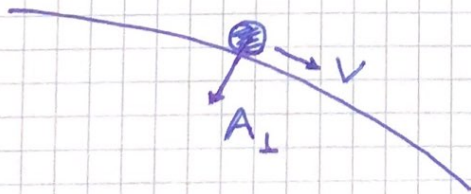
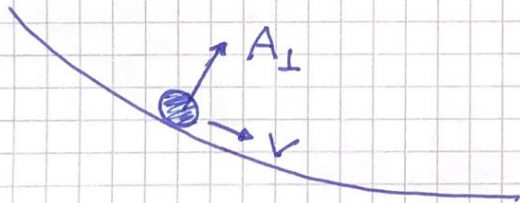
Sentripetalakselerasjon:  $A_{\perp} = v^2 / R$

$N \perp$  banen:  $N - Mg \cos \beta = MA_{\perp} \Rightarrow N = Mg \cos \beta + MA_{\perp}$

Stemmer fortegnet på  $R$  og  $A_{\perp}$ ?

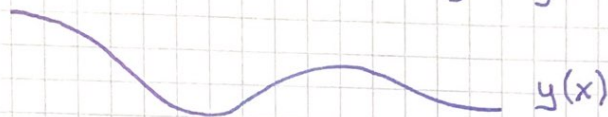
Ja: Krumning oppover  $\Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow R > 0 \Rightarrow A_{\perp} > 0$

$\Rightarrow N > Mg \cos \beta$ ; OK!



## Simulering av Labforsøket:

- Skrukehøydene  $\{Y_0, \dots, Y_7\}$  beregnes med tilfeldige tall som gir bane med både "berg" og "dal":



Tilhørende  $\{X_0, \dots, X_7\}$  er  $0, 200, \dots, 1400$  mm.

- Funksjonen `scipy.interpolate.cubic spline` interpolerer med 3.gradsfunksjoner mellom skruene.
- Med gitt  $y(x)$  kan alle aktuelle størrelser beregnes:  $V, A_{\parallel}, A_{\perp}, f, N, K, V, E, \dots$
- Tidsbruk: Med fast  $\Delta x = 1$  mm og  $\Delta t = \Delta x / V_x$  blir  $t = \sum \Delta t = \Delta x \sum V_x^{-1}$ , med  $V_x = V \cos \beta$

## Eksperiment:

- Filme (månst) 10 rulleforsøk med mobilkamera.
- Måle  $\{t, x, y\}$  med programmet `tracker`.

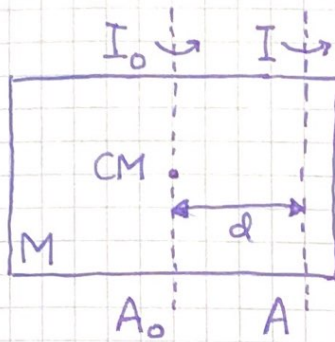
## Dataanalyse:

- Beregne tap i mekanisk energi (middelverdi og standardfeil)
- Figurer:  $y(x), f(x), N(x), |f/N|, V_{\text{num}}(x)$  vs  $V_{\text{exp}}(x), \dots$
- Diskutere resultatene

## Rapport:

- Jupyter notebook. Leveres pr epost som .html eller .pdf.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

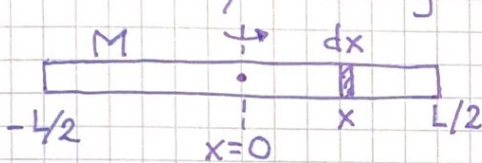


Aksen  $A_0$  gjennom CM og  $A \parallel A_0$ :

$$I = I_0 + M \cdot d^2$$

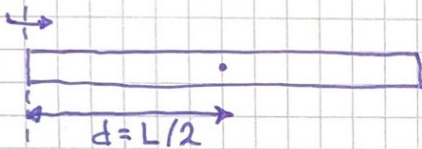
[Utleiding i notat]

Eks 1: Tynn stang eller plate



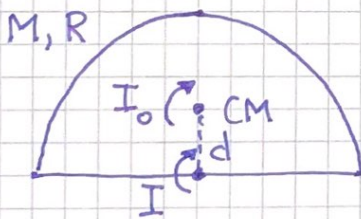
$$g=x, \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = I_0 + Md^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eks 2:  $I_0$  for halv sirkulær plate



For hel plate med masse  $2M$ :

$$I_{20} = \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} I_{20} = \frac{1}{2} MR^2$$

Fra før (s. 24):  $d = 4R/3\pi$

$$\Rightarrow I_0 = I - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) MR^2 \approx \underline{0.32 MR^2}$$