Impuls. Kollisjoner. Rakett

[OS1 9 ; YF 8 ; LL 5]

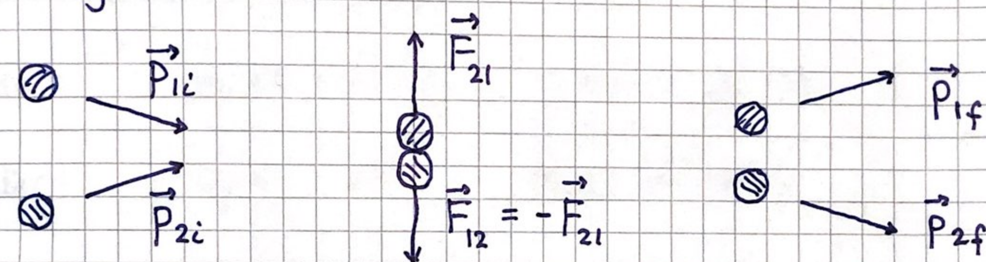
N2 for masse m: $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$\vec{p} = m\vec{v}$ = massens impuls (= bevegelsesmengde)

N2: $\boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt}$ $[p] = \text{kg}\cdot\text{m/s}$

$\boxed{\text{Impulsbevarelse: } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} \text{ bevart}}$

Kollisjon:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \underset{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls.

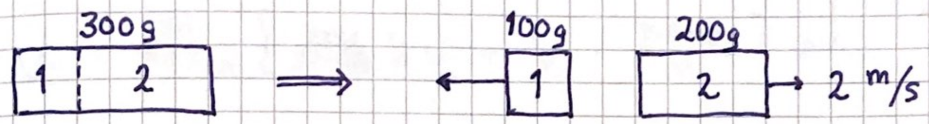
Kollisjoner (støt) er typisk kortvarige, slik at $\Delta U \approx 0$ og $\Delta E \approx \Delta K \leq 0$. Mek. energi E kan gå tapt pga deformasjon og friksjon.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt når legemene henger sammen med felles sluttfart. Da er $|\Delta E|$ maksimal.

Eks: "Eksplosjon"



$K_i = 0$ $\qquad\qquad$ $K_f = ?$

Løsn: $p_1 = (-) p_2 \Rightarrow v_1 = 4\ \text{m/s} \Rightarrow K_f = K_1 + K_2$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 0.1\cdot 4^2\ \text{J} = 0.8\ \text{J} \\ K_2 &= \tfrac{1}{2}\cdot 0.2\cdot 2^2\ \text{J} = 0.4\ \text{J} \end{aligned}\right\} K_f = \underline{\underline{1.2\ \text{J}}}$$

Sentralt støt (1D)

Før: $\quad m \longrightarrow v_i \qquad V_i \longleftarrow M$ $\qquad - \longleftrightarrow +$

Etter: $\quad v_f \longleftarrow m \qquad M \longrightarrow V_f$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m v_i + M V_i = m v_f + M V_f \qquad (1)$$

Fullstendig uelastisk (delvis uelastisk ikke løsbart):

$$\overset{m+M}{\bullet\bullet} \longrightarrow \quad v_f = V_f = \frac{m v_i + M V_i}{m+M}$$

Elastisk, $\Delta K = 0$: $\quad \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \quad (2)$

Skriv om (1) og (2), og bruk 3. kvadratsetning:

$$m(v_i - v_f) = M(V_f - V_i) \qquad (1)$$
$$m(v_i - v_f)(v_i + v_f) = M(V_f - V_i)(V_f + V_i) \qquad (2)$$

(2) dividert med (1) gir $\quad v_i + v_f = V_f + V_i \qquad (3)$

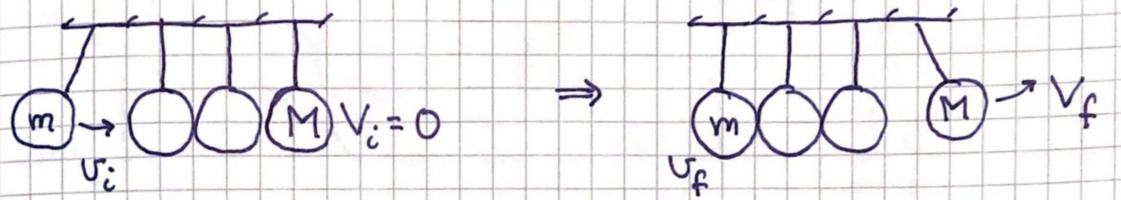
hvoretter $M\cdot(3) - (1)$ og $m\cdot(3) + (1)$ gir hhv:

$$v_f = \frac{M}{m+M}\left\{ 2V_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V_f = \frac{m}{M+m}\left\{ 2v_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

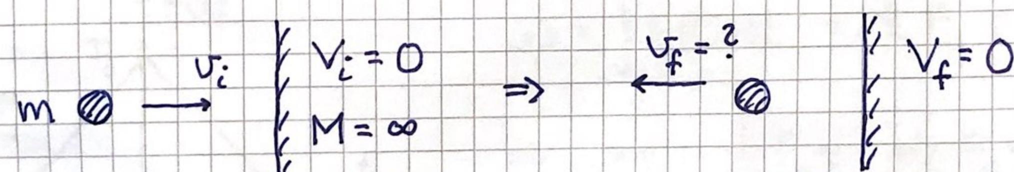
ombytte
$m \leftrightarrow M$
$v \leftrightarrow V$

Eks 1 : Newtons vugge



$m = M \quad \Rightarrow \quad V_f = v_i \quad , \quad v_f = V_i = 0$

Eks 2 : Ball mot vegg (elastisk støt)



Finn v_f og undersøk impuls- og energibevarelse

Løsn 2: $v_f = \frac{M}{m+M}\left\{ 0 + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \overset{m \ll M}{=} \underline{\underline{-v_i}}$

$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 = K_i$ (OK)

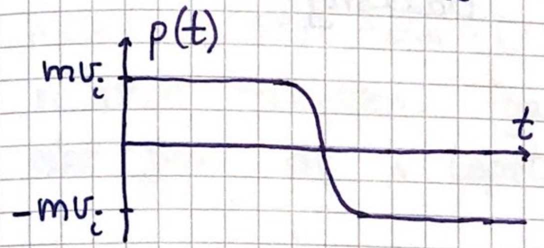
$p_f = m v_f + M V_f = -m v_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2 v_i$

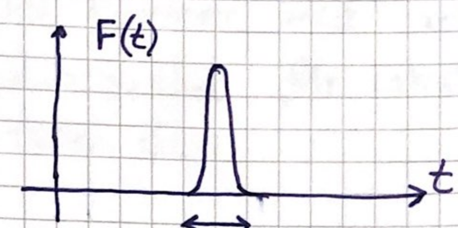
$= -m v_i + 2 m v_i = m v_i = p_i$ (OK)

Kraftstøt ("Impulse" (eng.))

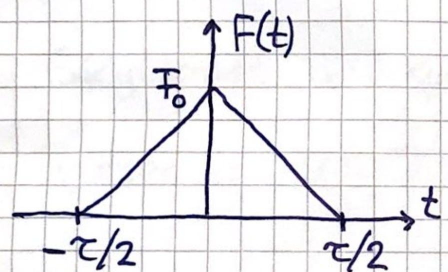
$$F = dp/dt \Rightarrow dp = F \cdot dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t)\, dt$$

Eks: Ball mot vegg





Bordtennisball, $m = 2.7 g$, $v_i = 10\ m/s$.
Anta lineær $F(t)$ med $\tau = 2\ ms$:



$$\Delta p = \int F(t)\, dt = \frac{1}{2} F_0 \tau$$

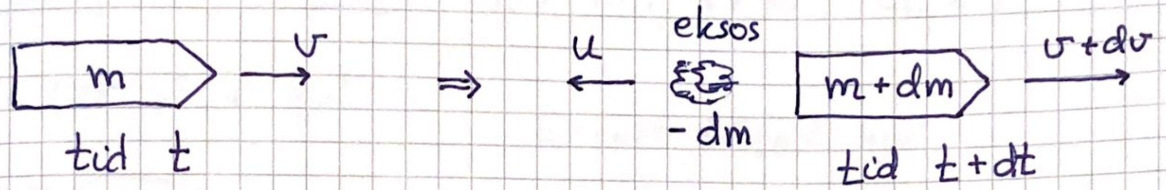
$$\Rightarrow 2mv_i = \frac{1}{2} F_0 \tau \Rightarrow F_0 = \frac{4mv_i}{\tau}$$

Midlere akselerasjon i støtet:

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v_i}{\tau} = \frac{20\ m/s}{2 \cdot 10^{-3}\ s} = \underline{10^4\ m/s}$$

Dvs: $\langle a \rangle \gg g$ slik at ytre kraft mg trygt kan neglisjeres underveis i støtet.

Rakettprinsippet



Masse (eksos) $-dm > 0$ sendes bakover med fart u relativt raketten. Pga impulsbevarelse får raketten økt fart dv i løpet av tiden dt:

$$\underbrace{m \cdot dv}_{\text{økning i rakettens impuls}} = \underbrace{u \cdot dm}_{\text{eksosens impuls}}$$

N2 for raketten: $m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt}$

Skyvkraft (Rekyl): $F_{skyv} = u \cdot \frac{dm}{dt}$

(Her er $u < 0$ og $dm < 0$ slik at $F_{skyv} > 0$)

Oppskyting i tyngdefeltet: $F = u \cdot \dot{m} - mg$

$$\Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$$

Mult. med dt/m, anta $v(0) = 0$ og konstante u, g, og integrer fra $t=0$ til t:

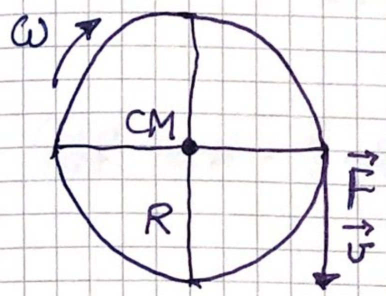
$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \cdot t$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = u \ln\left[m(t)/m(0)\right] - g \cdot t$$

(Se sving)

Rotasjonsdynamikk [OS1 10 ; YF10 ; LL 6]

Se f.eks på et hjul:



Effekt tilført hjulet:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

Kraftens dreiemoment:

$$\tau = F \cdot R$$

Dvs: $P = \tau \cdot \omega$

Alternativt uttrykk for samme effekt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right\} = \frac{1}{2} I_0 \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

De to uttrykkene for P må være lik hverandre

$\Rightarrow \boxed{\tau = I_0 \frac{d\omega}{dt}}$ N2 for rotasjon om akse med fast orientering

(Jf. N2 for translasjon : $F = m \frac{dv}{dt}$)

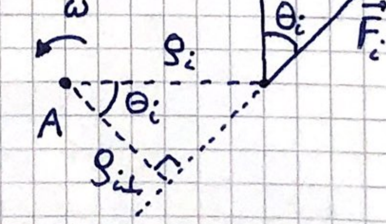
Netto dreiemoment når flere krefter gjør arbeid:

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i \cdot v_i \cdot \cos\theta_i$$

$$= \sum_i F_i \, \rho_i \, \omega \, \cos\theta_i = \left\{\sum_i F_i \, \rho_{i\perp}\right\} \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

$\tau = \sum_i F_i \, \rho_{i\perp}$ = netto ytre dreiemoment mhp rot.aksen

$\rho_{i\perp}$ = avstanden fra aksen til kraftens forlengelseslinje
= kraftens arm



Arbeid utført av dreiemomentet:

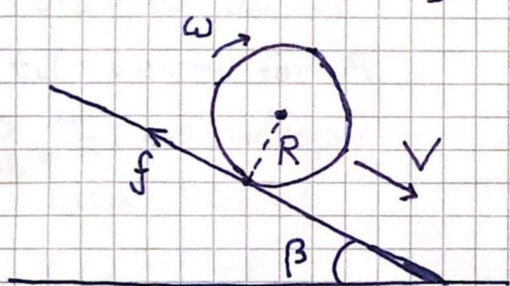
$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega = \frac{\tau \cdot d\varphi}{dt}$$

$\Rightarrow \quad dW = \tau \cdot d\varphi$ = arbeid utført av τ ved omløpt vinkel $d\varphi$

(Jf. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = arbeid utført av $\vec{F}$ ved translasjon $d\vec{r}$)

Eksempler, rotasjonsakse med fast orientering.

Eks 1: Ren rulling på skråplan (s. 28)



- $I_0 = cMR^2$, $\omega = \frac{V}{R}$, $\dot{\omega} = \frac{\dot{V}}{R}$
- $F_{\parallel} = Mg \sin\beta - f$
- $\tau = f \cdot R$

(N og Mg har <u>null arm</u> mhp rot.aksen gjennom CM)

N2, $\parallel$: $F_{\parallel} = M\dot{V}$; N2, rot. om CM : $\tau = I_0 \dot{\omega}$

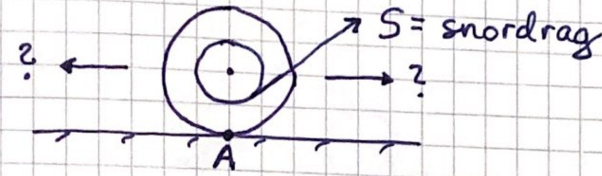
$\Rightarrow Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$; $f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{V}/R \Rightarrow f = cM\dot{V}$

$\Rightarrow Mg \sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \dot{V} = g \sin\beta / (1+c)$

og $f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta$

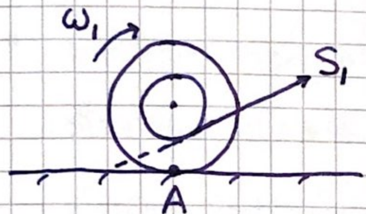
(som s. 28 med energibevarelse)

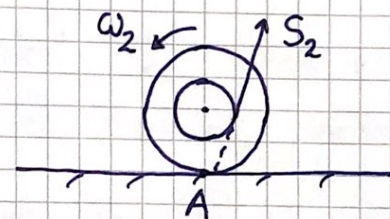
Eks 2: Snelle (kabeltrommel)



Ruller snella mot høyre eller venstre?

Lurt å finne dreiemoment τ_A mhp aksen A, "kontaktlinjen", fordi Mg, N og f har null arm mhp A.

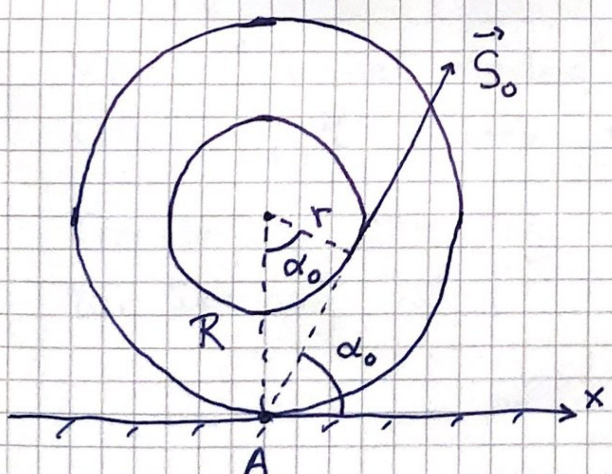




Forlengelse av $\vec{S}_1$ til venstre for A
$\Rightarrow$ τ_A gir rotasjon med klokka

Forlengelse av $\vec{S}_2$ til høyre for A
$\Rightarrow$ τ_A gir rotasjon mot klokka

Og hvis $\vec{S}_0$ har forlengelse gjennom A, blir $\tau_A = 0$ og snella står i ro:



$\tau_A = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$

Fra figur:

$\cos \alpha_0 = r/R$

Tilleggsbetingelse:

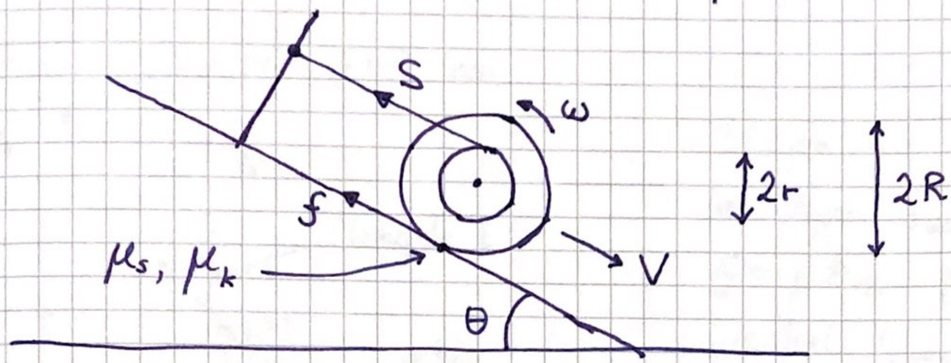
$\sum F_x = 0$

$\Rightarrow f = S_{0x} = S_0 \cos \alpha_0$

$\Rightarrow S_0 \cos \alpha_0 \leq \mu_s \cdot N$

$(N = Mg - S_0 \sin \alpha_0)$

Eks 3: Snelle baklengs på skråplan (Øving)



- Bestem maksimal vinkel θ_0 uten at snella slurer (ruller og glir) baklengs nedover skråplanet.

  (Tips: N1 ∥ skråplanet og N1 for rot. om CM.
  $f = f_{max} = \mu_s \cdot N$ når $\theta = \theta_0$)

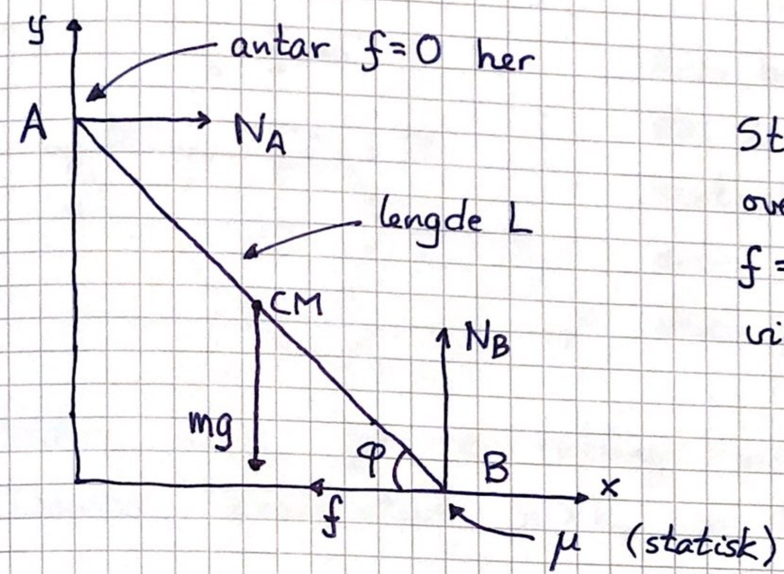
- Bestem S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$.

  (Tips: N2 ∥ skråplanet og N2 for rot. om CM.
  $f = \mu_k \cdot N$)

Ved "normal slurring" er rullebetingelse ikke oppfylt, men her er $V = \omega \cdot r$:

Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π
tar like lang tid !

Eks 4: Når står stigen tilstrekkelig bratt?



Stigen glir hvis f overstiger $f_{max} = \mu N_B$; $f = \mu N_B$ gir minste vinkel φ_{min}.

$$\left.\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & \Rightarrow & f = N_A \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow & N_B = mg \end{array}\right\} \Rightarrow N_A = \mu \cdot mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \quad \Rightarrow \quad mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi = N_A \cdot L \cdot \sin\varphi$$

$$= \mu mgL \sin\varphi$$

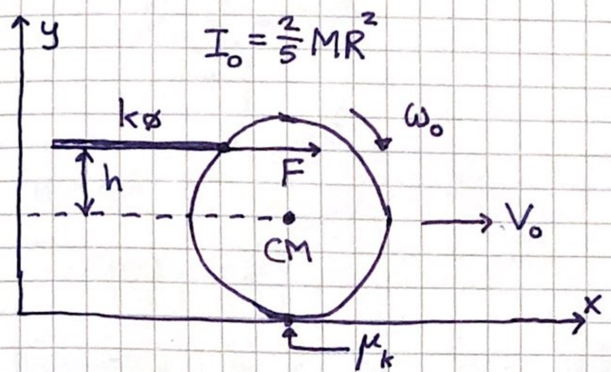
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cos\varphi = \mu \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tan \varphi_{min} = \frac{1}{2\mu}}$$

Hvis f.eks. $\mu = 0.5$, er $\varphi_{min} = \arctan 1 = 45°$

[Spm: Hva blir φ_{min} hvis maler med malingsspann har masse $M = 10m$ og står i avstand $3L/4$ fra bunnen av stigen?]

Eks 5 : Elementær snooker [LL 6.7 og Øving]



Anta horisontalt kortvarig støt i kulas (vertikale) sentrale plan, i høyde h over (evt. under; $h < 0$) aksen gjennom CM (stiplet).

- Hvilken $h = h_0$ gir ren rulling umiddelbart?
- Diskuter kvalitativt $h > h_0$ og $h < h_0$.

Løsning: F og $\tau = F \cdot h$ (om CM) virker med kort varighet Δt og skal med $h = h_0$ gi ren rulling, dvs $V_0 = \omega_0 R$. Antar $F \gg f$ og neglisjerer f i støtet.

N2, x : $F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0$

N2, rot. om CM: $F \cdot h_0 \cdot \Delta t = I_0 \Delta\omega = I_0 \omega_0 = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \omega_0$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{2}{5}R^2\omega_0 / V_0 = \underline{\underline{\frac{2}{5}R}}$$

Hvis $h > h_0$: $\omega_0 > V_0/R$, toppspinn

$h < h_0$: $\omega_0 < V_0/R$, underskru

$\Rightarrow$ Sluring i begynnelsen i begge tilfeller.

Sluring [OS1 11.1 ; LL 6.7]

$v = \omega R - V$

"Toppspinn"

$v = V - \omega R$

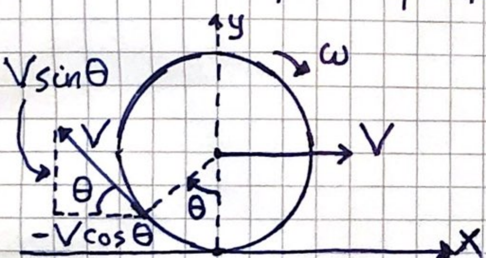
"Underskru"

Kinetisk friksjon gir effekttap:

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\mu_k \cdot N \cdot v < 0$$

ω nærmer seg V/R $\Rightarrow$ ren rulling etter hvert

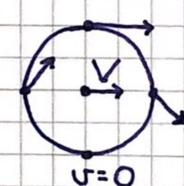
Banen til punkt på periferien ved ren rulling:



$$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R\dot{\theta}$$

Ser fra figuren:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= V - V\cos\theta \\ v_y &= V\sin\theta \end{aligned}\right\}$$



$$\Rightarrow x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \; ; \quad y(\theta) = R(1 - \cos\theta)$$