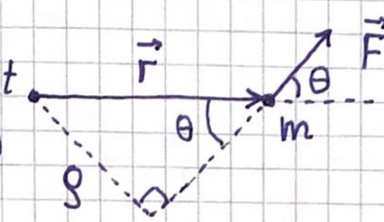
Rotasjonsdynamikk med vektorer

Dreiemoment [OS1 10.6 ; YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]

Referansepunkt
(Som regel origo)



$$\vec{\tau} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{F} \quad = \text{kraftens dreiemoment, relativt origo}$$

Retning : $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt

$\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ ut av planet her

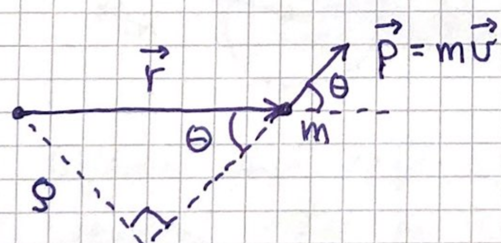
Absoluttverdi :

$$\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$$

ρ = kraftens arm (som s. 37)

Hvis flere ytre krefter : $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

= massens dreieimpuls

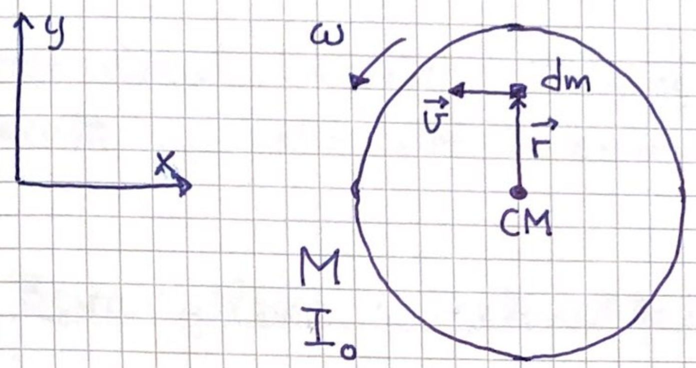
Retning : $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$

Abs. verdi : $L = r \cdot p \cdot \sin\theta = \rho \cdot p$

Partikkelsystem : $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm$

$\vec{L}$ for stivt legeme [OST 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]

Bidraget $\vec{L}_s$ pga rotasjon om akse gjennom CM:
Anta rotasjon om z-aksen.



Bidraget fra dm:

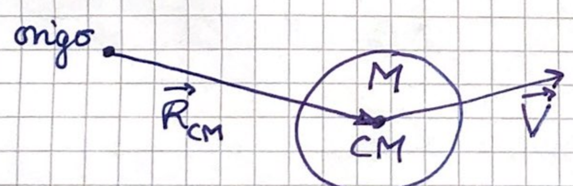
$$d\vec{L}_s = \vec{r} \times \vec{v}\, dm = r \cdot r \cdot \omega \cdot dm \cdot \hat{z} = r^2 dm \cdot \omega \hat{z} = dI_0 \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \int d\vec{L}_s = \left\{ \int dI_0 \right\} \cdot \vec{\omega} = I_0 \vec{\omega}$$

= "spinn" (evt: indre dreieimpuls)

Retning på $\vec{\omega}$ med HHR (høyrehåndsregel):
4 fingre langs $\vec{v}$ $\Rightarrow$ tommelen langs $\vec{\omega}$

Bidraget $\vec{L}_b$ pga translasjon av CM:



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

= banedreieimpuls

For legemer med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen, dvs uendret etter en halv omdreining, er total dreieimpuls ganske enkelt

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b = I_0 \vec{\omega} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

[Se notat for bevis]

N2 for rotasjon [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} = \frac{d}{dt}\{\vec{r} \times \vec{p}\} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

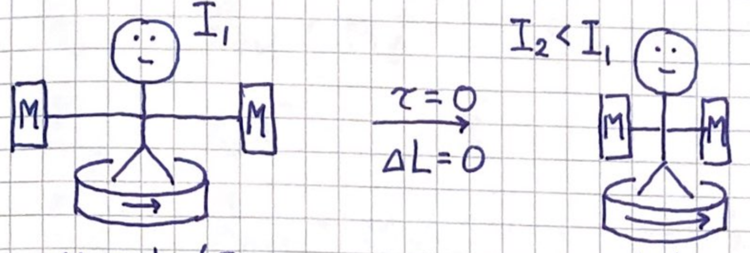
dvs: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ Jf $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ for translasjon

Har statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er null.

Bevaringslover i mekanikken

- For isolert system (ingen ytre krefter) er E, $\vec{p}$ og $\vec{L}$ bevart (hhv total energi, impuls og dreieimpuls)
- For konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Når netto ytre kraft $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart
- Når netto ytre dreiemoment $\vec{\tau} = 0$, er $\vec{L}$ bevart

Eks 1: Piruett [OS1 11.3; YF 10.6; LL 6.5]

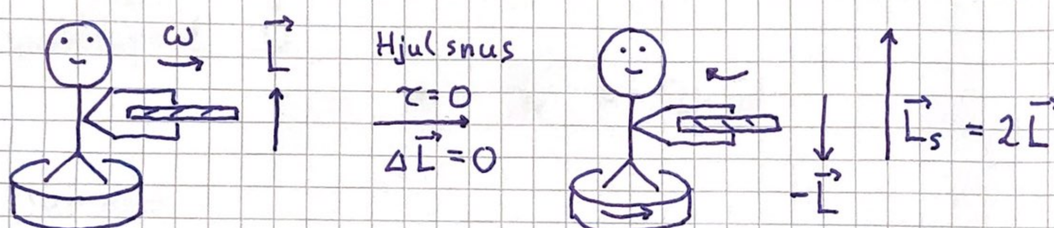


$\omega_1 = L / I_1$ $\qquad$ $\omega_2 = L / I_2 > \omega_1$

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1$ $\qquad$ $K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$

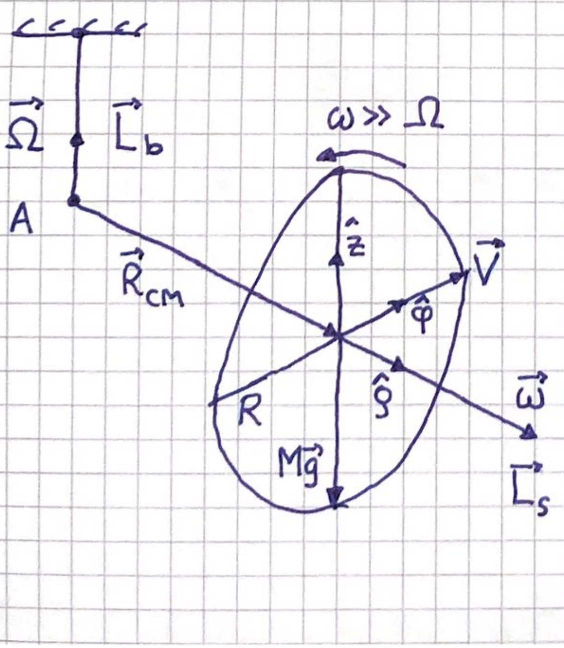
Arbeid utført på de to massene gir økt rotasjonsenergi.

Eks 2: Student med roterende sykkelhjul



$\omega_s = 0$ $\qquad$ $\omega_s > 0$

Eks 3: Presesjon [OS1 11.4; YF 10.7; LL 6.10]



$I_0 \approx MR^2$

$R \approx 0.3$ m

$R_{CM} \approx 0.2$ m

$T_\Omega = 2\pi / \Omega \approx 5$ s

Beregn $T_\omega = 2\pi/\omega$

N2 for rot. om A: $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g \, \hat{\varphi}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \, \hat{\rho}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} M V \hat{z} = R_{CM}^2 M \Omega \, \hat{z}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \, \hat{\rho}$$

Setter inn i N2:

$$R_{CM} M g \, \hat{\varphi} = MR^2 \omega \frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

Akslingen og dermed $\hat{\rho}$ roterer om z-aksen med vinkelfart Ω

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \Omega \cdot \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM}\, g = R^2 \omega \Omega = R^2 \frac{2\pi}{T_\omega} \frac{2\pi}{T_\Omega}$$

$$\Rightarrow T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g\, T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s}$$

$$\approx \underline{\underline{\frac{4}{10} \text{ s}}}$$

dvs $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omdr. pr. sek.