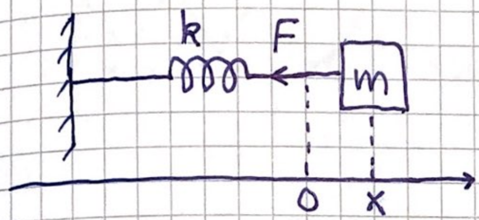
Svingninger [OS1 15; YF14; LL9]

- Periodisk oppførsel omkring en likevekt
- En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt
- F.eks: Masse / fjær. Pendler. Atomer i molekyler

Harmonisk oscillator [OS1 15.1; YF 14.2; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m
$x > 0$: strukket fjær
$x < 0$: sammenpresset fjær

Hookes lov: $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m
k = fjærkonstanten, $[k] = N/m$

$$N2: \quad -kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Løsning: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

(eller på formen $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$)

Sentrale størrelser (jf sirkelbevegelse) :

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr (hel) svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

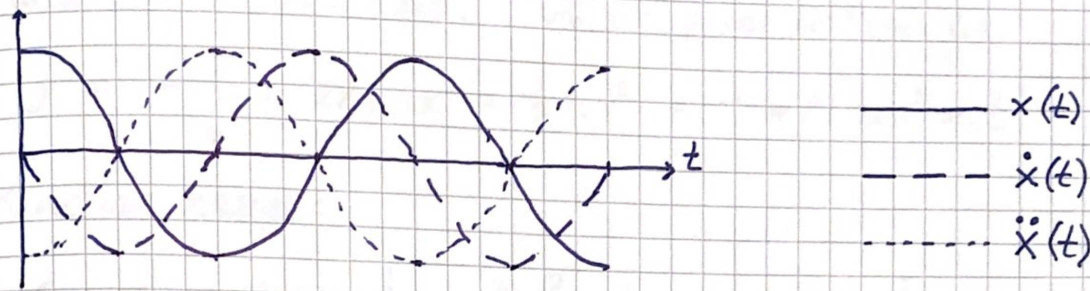
$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant

Startbetingelser (f.eks): $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$

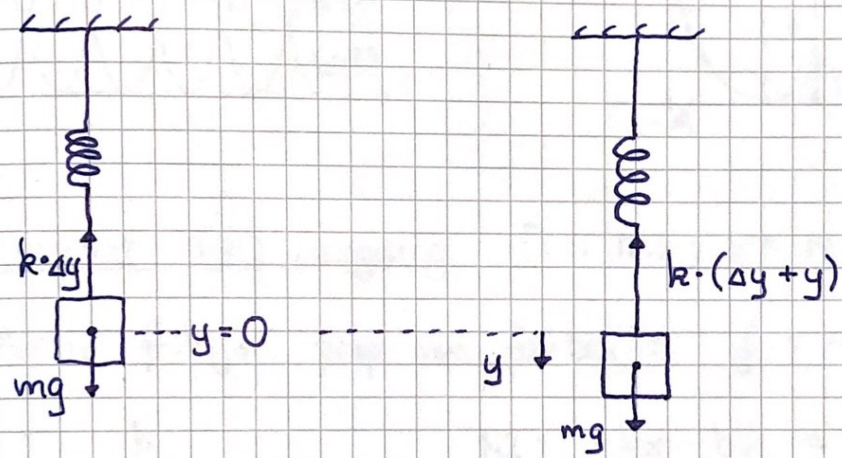
$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t \Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$ (fart)

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t$ (akselerasjon)



Vertikal svingning i tyngdefeltet:

Strukket likevekt:



N1: $k \cdot \Delta y = mg$

$\Rightarrow \Delta y = mg/k$

N2: $mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y}$

$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt, med uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Energi i harmonisk oscillator
[OSI 15.2 ; YF 14.3 ; LL 9.4]

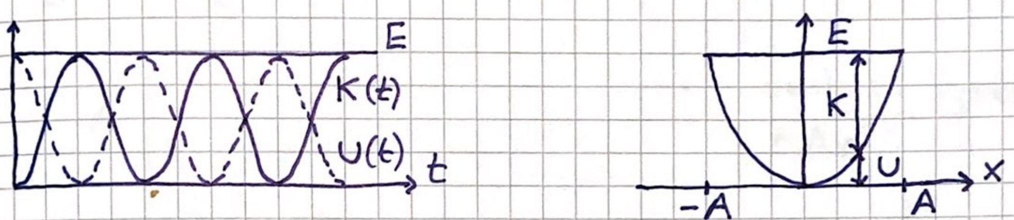
Fjærkraft $F(x) = -kx$ er konservativ.
Anta $x(t) = A\cos\omega_0 t$. Da er potensiell energi:

$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$$

Kinetisk energi:

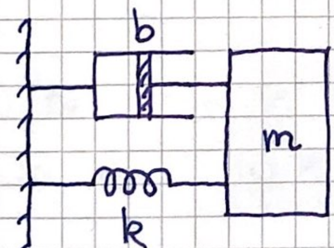
$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega_0 t$$

Mekanisk energi er bevart: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$



Dempet (fri) svingning
[OSI 15.5 ; YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar friksjon prop. med farten : $f = -b\dot{x}$



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\gamma = b/2m$ og $\omega_0^2 = k/m$

Prøveløsning: $e^{-\alpha t}$
$$\Rightarrow [\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2]e^{-\alpha t} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$
$x(t) = (A + B\cdot t)\exp(-\gamma t)$; svakeste demping som ikke gir svingninger ; ønskelig i f.eks. støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0$

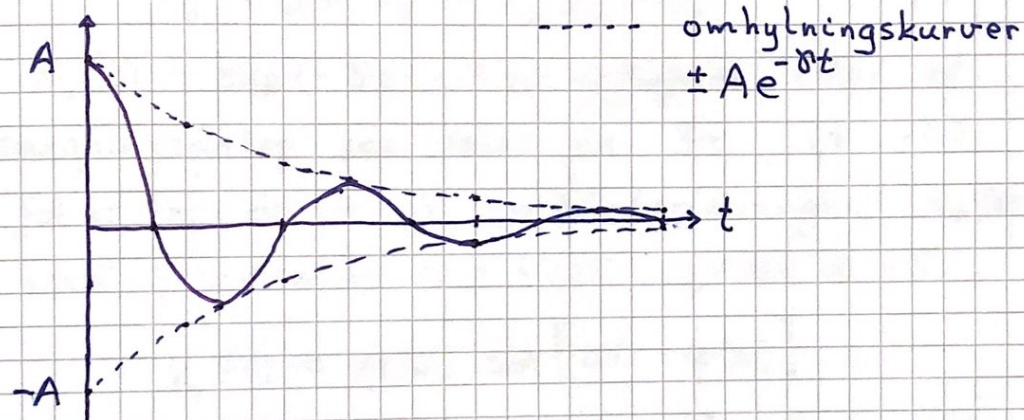
$$x(t) = A\exp(-\alpha_1 t) + B\exp(-\alpha_2 t) \quad ; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{(-1)\cdot(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \gamma \pm i\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

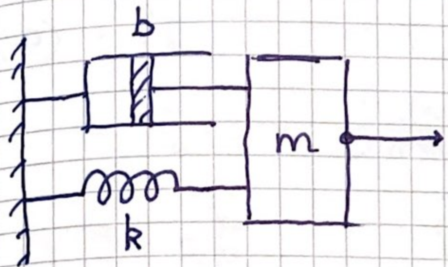
$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t}\left[\cos\omega t \pm i \sin\omega t\right]$$

Generell <u>reell</u> løsning: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$
dvs harmonisk svingning med avtagende amplitude $Ae^{-\gamma t}$
Tidskonstanten $\tau = 1/\gamma$ angir tidsskala for hvor lenge svingebevegelsen varer.



Ofte har vi <u>svak</u> demping, $\gamma \ll \omega_0$.
Da er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Tvungen svingning og resonans [OSI 15.6; YF 14.8; LL 9.9]



Anta harmonisk ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning oppfyller homogen ligning

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0,$$

så $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ kan neglisjeres etter et innsvingningsforløp som varer ca 3τ $(\tau = 1/\gamma)$.

Vi fokuserer derfor på partikulærløsningen $x_p(t)$, og med harmonisk ytre kraft gjetter vi på

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir nå to ligninger, som fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Stor amplitude A når $\gamma \ll \omega_0$ og $\omega \approx \omega_0$

Midlere tilført effekt når $\omega = \omega_0$: $[\varphi(\omega_0) = 0]$

$$\langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle = \langle F_0 \cos \omega_0 t \cdot \omega_0 A(\omega_0) \cdot \cos \omega_0 t \rangle$$

$$= F_0 \omega_0 \cdot \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

$$= \frac{F_0^2}{2b} \qquad \left[\text{da } 2\gamma = \frac{b}{m} \text{ og } \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2} \right]$$

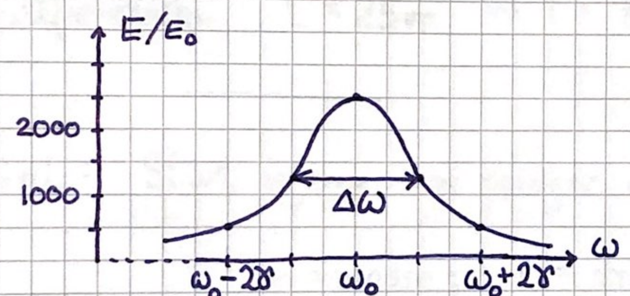
Som tilsvarer midlere effekttap, $\langle -b\dot{x} \cdot \dot{x} \rangle$ pga friksjon, ved stasjonære forhold.

Oscillatorens energi :

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = F_0^2/2k$$

Eks: $\omega_0 = 100\,\gamma$ (svak demping)

$\Rightarrow E(\omega_0) = 2500\, E_0$; $E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250\, E_0$; $E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500\, E_0$



Resonanskurvens halvverdibredde : $\Delta\omega = 2\gamma = b/m$

(FWHM : Full Width Half Maximum)

- Oscillatorens Q-faktor ("quality factor")

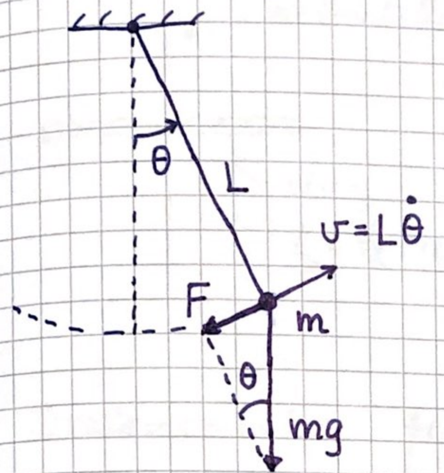
$$Q = \omega_0 / \Delta\omega = \omega_0 / 2\gamma \gg 1$$

når dempingen er svak, $\gamma \ll \omega_0$.

(Her : $Q = 50$)

Pendler [OSI 15.4; YF 14.4-14.6; LL 9.6]

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs snor/stang.



N2 langs sirkelbanen:

$$F = ma$$

med $F = -mg\sin\theta$ og $a = L\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

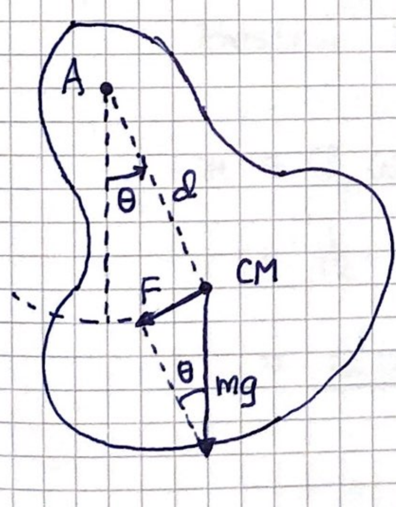
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$. Dermed:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

Eks: Foucaultpendelen, $L = 25\,m \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 10\,s$

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A.



m = masse ; I = treghetsmoment mhp A

N2, rotasjon om A: $\tau = I\ddot{\theta}$

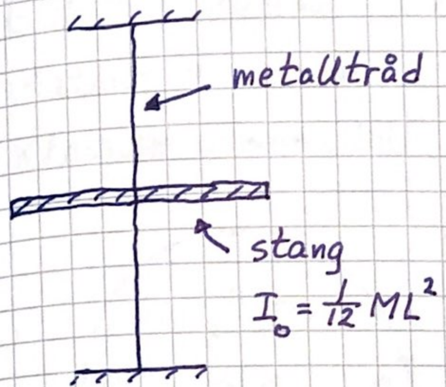
med $\tau = -F\cdot d = -mgd\cdot\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad -mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \\ \omega_0^2 = mgd/I\end{array}}$

Torsjonspendel:



Metalltråden vridd, ved å svinge stanga en vinkel θ ut fra likevekt:

Dreiemomentet fra metalltråden på stanga er prop. med vinkelen θ:

$\tau = -\varkappa \cdot \theta$; $\varkappa$ = trådens torsjonsstivhet

N2 for rotasjon om trådens akse: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \varkappa / I_0}$$

Exp: $M = 50\,g$, $L = 11\,cm$, $T = 0.8\,s$

Bestem $\varkappa$

$$\varkappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot (2\pi/T)^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 0.050\,kg \cdot (0.11\,m)^2 \cdot 4\pi^2/(0.8\,s)^2$$

$$\approx \underline{0.003\ Nm}$$