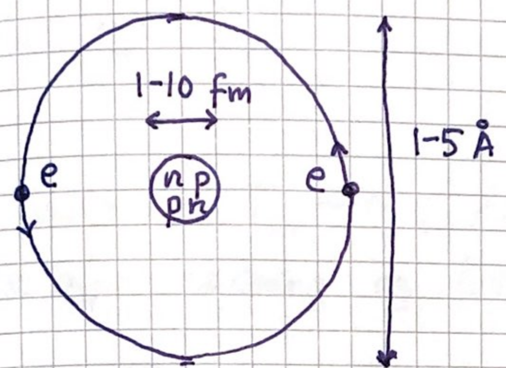
Elektrostatikk [OS2 5-8; YF 21-24; LHL 19-20]

Elektrisk ladning [OS2 5.1; YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = atomer = atomkjerne og elektroner

Klassisk atommodell (N. Bohr 1913, NP 1922):



$1\ \text{fm} = 10^{-15}\ \text{m}$

$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \text{m}$

(ångstrøm)

Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
Elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
Proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
Nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

Ladning er kvantisert i enheter av

e = elementærladningen $\equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19}$ C

Symbol for ladning: q, Q

Enhet: $[Q] = C$ (coulomb)

Nøytralt atom med <u>atomnummer</u> Z har Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$

<u>Ioner</u> er atomer og molekyler med $Q \neq 0$.

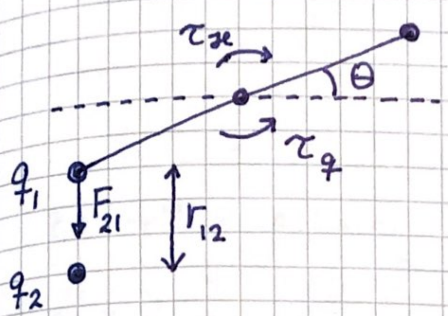
Eks: Cl^-, Li^+, CO_3^{2-}, NH_4^+

<u>Isotoper</u> av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner.

Eks: ^{13}N, ^{14}N, ^{15}N har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z = 7$)

Coulombs lov [OS2 5.3; YF 21.3; LHL 19.3]

Charles Augustin de Coulomb, 1785:



Torsjonstråd med stang sett ovenfra. Likevekt når

$$\tau_q + \tau_\kappa = 0$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \tfrac{1}{2} L \cdot \cos\theta \; ; \quad \tau_\kappa = -\kappa\theta$$

Exp. viste at $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$ med tiltrekning mellom ulike typer ladning og frastøtning mellom like typer:

$\ominus\!\rightarrow \quad \leftarrow\!\oplus \qquad \leftarrow\!\ominus \quad \ominus\!\rightarrow \qquad \leftarrow\!\oplus \quad \oplus\!\rightarrow$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$ Coulombs lov

$\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$ = vakuumpermittiviteten

$1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5; YF 21.3-21.5; LHL 19.3-19.5]

$q \bullet \xrightarrow{\vec{r}} \bullet\, q_0$

referanse-ladning — test-ladning

Kraft fra q på q_0:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Elektrisk felt $\overset{def}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0}$$

Enhet: $[E] = N/C$

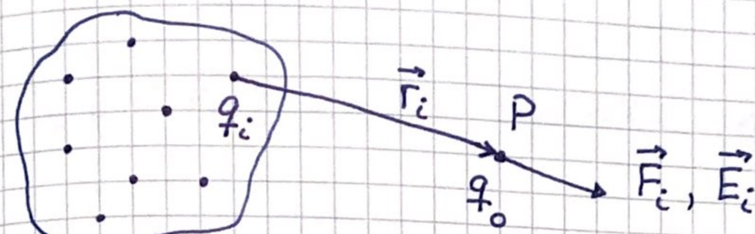
Punktladning q omgir seg med et el. felt:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Bort fra $q > 0$: $\oplus \quad \bullet\!\xrightarrow{\vec{E}}$

Inn mot $q < 0$: $\ominus \quad \xleftarrow{\vec{E}}\!\bullet$

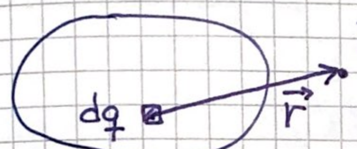
Flere referanseladninger:



El. felt i posisjon P fra ladningene $\{q_1\ q_2 \cdots q_i \cdots\}$:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$$

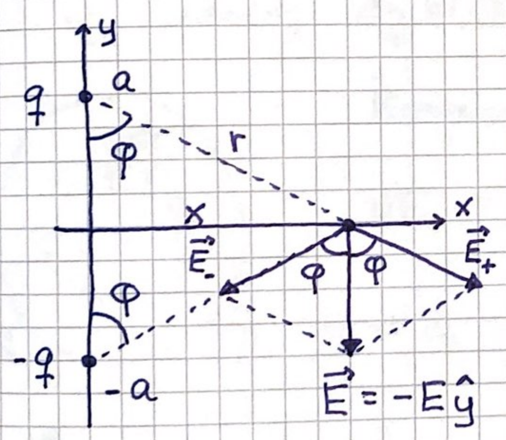
Kontinuerlig ladningsfordeling: $q_i \to dq$; $\sum_i \to \int$



$$\vec{E}_P = \int \frac{dq\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Enkel elektrisk dipol

Punktladn. $\pm q$ i $y = \pm a$. Finn $\vec{E}$ på x-aksen.



$E = 2E_+ \cos\varphi \quad (E_- = E_+)$

$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}$

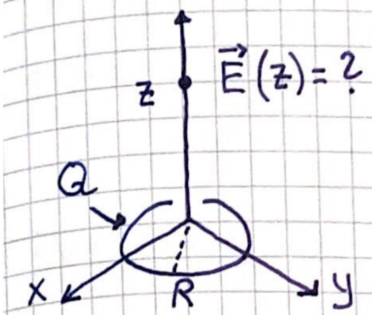
$E_+ = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$

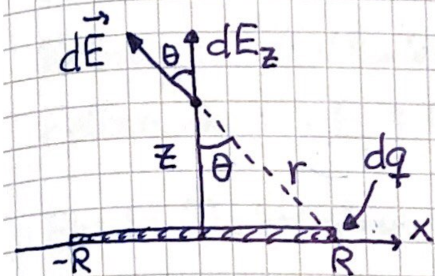
$$\vec{E} = -\hat{y} \cdot \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

Langt unna dipolen, $x \gg a$: $x \approx r$

$E(r) \sim 1/r^3$ (går raskere mot null enn $E(r) \sim 1/r^2$ fra punktladning)

Eks 2: Jevnt ladet ring





Symmetri $\Rightarrow$ $\vec{E}$ langs z-aksen

Bidrag fra dq:

$dE_z = dE \cdot \cos\theta$

$dE = dq/4\pi\varepsilon_0 r^2$; $\cos\theta = z/r$

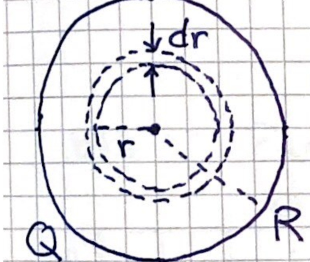
$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int dq$$

$$= \underline{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Rimelig svar? $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$; $E_z \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ når $z \gg R$

Eks 3: Jevnt ladet skive

= mange tynne ringer med radius r, bredde dr og ladning $dq = (Q/A)\cdot dA = (Q/\pi R^2)\cdot 2\pi r\,dr$



Ringens bidrag til feltet på z-aksen:

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \Big|_0^R \left[-\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right] = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \underline{E_z = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - (1+R^2/z^2)^{-1/2}\right]}$$

$z \gg R \Rightarrow (1+R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2 \Rightarrow E_z \approx Q/4\pi\varepsilon_0 z^2$ <u>OK!</u>

Stor skive, $R \gg z$: $E_z \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$\sigma = Q/\pi R^2$ = skivas ladning pr flateenhet

Dvs: Feltet er <u>tilnærmet konstant</u> nær ei jevnt ladd skive!

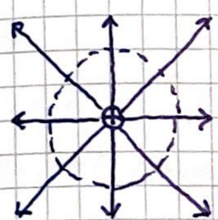
Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6; YF 21.6; LHL 19.6]

Visuelt bilde av $\vec{E}$ omkring ladningene.

Retning: Feltlinjer $\parallel \vec{E}$

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning

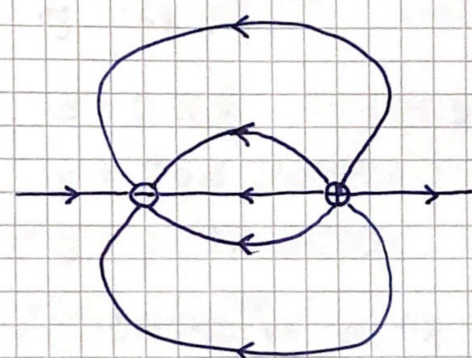


Feltlinjetetthet: $\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$

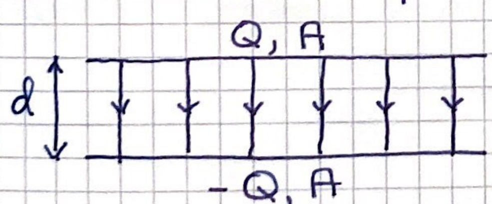
Feltstyrke: $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \sim \frac{1}{r^2}$

$\Big\}$ OK

Eks 2: Dipol



Eks 3: Parallellplatekondensator (nyttig kretselement)



$\sigma = Q/A$

Med kort avstand d mellom de to platene ($d \ll \sqrt{A}$) er feltet tilnærmet konstant mellom platene,

$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, mens $E \approx 0$ utenfor.

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF 21.7; LHL 19.10]

Enkel dipol: $-q \xrightarrow{\vec{d}} q$ Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$; $[p] = C \cdot m$

Flere punktladn. q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Kontinuerlig ladningsfordeling : $\vec{p} = \int \vec{r}\, dq$

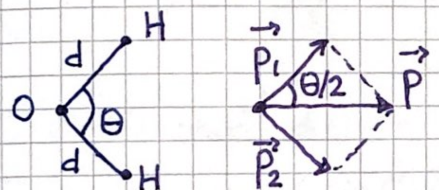
Dipol har alltid null nettoladning: $\sum_i q_i = 0$; $\int dq = 0$

Eks 1 : CO_2 $\overset{-}{O} = \overset{++}{C} = \overset{-}{O}$, $\vec{p}_1 \longrightarrow \longleftarrow \vec{p}_2$ $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \underline{\underline{0}}$

Eks 2: H_2O, $p\,(\text{exp}) = 1.85\ D$ (debye)

$1D = 10^{-21}\ C \cdot m^2/s\ /c \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-29}\ C \cdot m$ (da $c \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$)

Med ladning q på H og $-2q$ på O, hvor stor er q?



$d = 0.96\ \text{Å}$, $\theta = 104.5°$

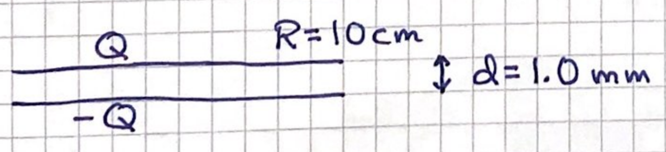
$p = 2qd\cos(\theta/2)$

$\Rightarrow q = p/2d\cos(\theta/2)$

$$\Rightarrow q = (1.85 \cdot 10^{-29}/3)\ C \cdot m \,/\, (2 \cdot 0.96 \cdot 10^{-10}\ m \cdot \cos 52.25°) \approx 5.25 \cdot 10^{-20}\ C$$

$$\approx \underline{\underline{\tfrac{1}{3} e}}$$

Eks 3: Platekondensator



Med $Q = 8.3\ nC$, bestem σ og p.

Løsn: $\sigma = Q/A = Q/\pi R^2 = 2.6 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$

$p = Q \cdot d = 8.3 \cdot 10^{-12}\ C \cdot m$

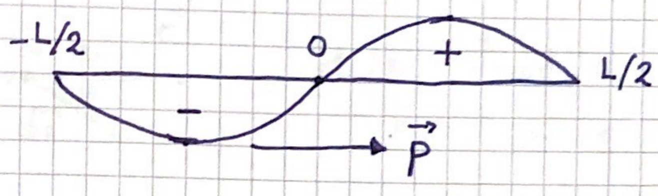
Eks 4: Dipolantenne

Ladning pr lengdeenhet: $\lambda(x,t) = \lambda_0 \sin kx \cos \omega t$

Ved $t = 0$: $\lambda(x,0) \to \lambda(x) = \lambda_0 \sin kx$

$$-L/2 \leq x \leq L/2 \; ; \quad k = 2\pi/L$$

$$L = 40 \text{ cm} \; ; \quad \lambda_0 = 5.0 \; \mu C/m$$



Ladning $dq = \lambda(x) \cdot dx$ på en liten bit mellom x og $x + dx$ bidrar med

$$dp = x \cdot dq = x \cdot \lambda_0 \sin(kx)\, dx$$

til dipolmomentet. Totalt dipolmoment blir dermed

$$p = \int dp = \lambda_0 \int_{-L/2}^{L/2} x \sin(kx)\, dx$$

Løses med delvis integrasjon:

$u = x, \quad v' = \sin(kx) \quad \Rightarrow \quad u' = 1, \quad v = -\frac{1}{k}\cos(kx)$

$$\Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} x \sin(kx) dx = \Big|_{-L/2}^{L/2} \left(-\frac{x}{k}\cos kx\right) + \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{k} \cos kx\, dx}_{=0}$$

$$= -\frac{L^2}{4\pi}\cos\pi - \frac{L^2}{4\pi}\cos(-\pi)$$

$$= L^2/2\pi$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{\lambda_0 L^2}{2\pi} = \frac{5.0 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m} \cdot (0.40\, m)^2}{2\pi} = 1.27 \cdot 10^{-7} \; C \cdot m$$

$$\approx \underline{0.13 \; \mu C \cdot m}$$

$\longrightarrow \vec{p}(0)$ $\quad$ $p = 0$ $\quad$ $\longleftarrow \vec{p}(\pi/\omega)$

$\omega t = 0$ $\quad$ $\omega t = \pi/2$ $\quad$ $\omega t = \pi$