

TFY 4125 V24

①

- Ref. gruppe

MTDT

MTKOM

MTDESIG

- Åpen emneside

MEKANIKK

(2)

OS1	1-12, 15	openstax.org
YF	1-11, 14	Young & Freedman
LL	1-6, 9	Lien & Lørhøiden

Størrelser og enheter [OS1 1 ; YF 1]

Eks: Diameter på snookerkule

$$d = 52.5 \text{ mm}$$

Symbol \rightarrow d tallverdi \rightarrow 52.5 SI-enhet (m = meter) \rightarrow mm
dekadisk forstøvelse \rightarrow (m = milli = 10^{-3})

Kompakt notasjon:

"Enhet for lengde er meter" \Rightarrow $[L] = m$

Trenger i mekanikken bare 3 grunnenheter, som i SI-systemet er,

for lengde: m (meter)
for masse: kg (kilogram)
for tid: s (sekund)

Trenger i elmag dessuten,

for strømstyrke: A (ampere)

Og i termodynamikk,

for temperatur: K (kelvin)
for stoffmengde: n (mol)

Etter 20.05.2019 defineres grunnenhetene i

SI-systemet med utgangspunkt i eksakte verdier for ulike naturkonstanter: c , e , k_B , N_A , h

Sammensatte enheter :

(3)

Fart (hastighet) $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon $[a] = (\text{m/s})/\text{s} = \text{m/s}^2$

Eks 1: Lysfarten i vakuum $c = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Eks 2: Ved fritt fall på jorda $a = g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$

Avledete enheter :

Kraft $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Energi $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ (joule)

Effekt $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

Eks: Midlere strømpris i Trondheim 03.01.24 var 89 øre pr kWh. Hvor mange joule får du for 50 kr ?

Løsn: # kWh for 50 kr = $5000 \text{ øre} / (89 \text{ øre/kWh})$

J pr kWh = $(1000 \text{ J/s}) \cdot 3600 \text{ s}$

\Rightarrow # J for 50 kr = $(5000/89) \cdot 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} \approx 202 \text{ MJ}$

Målinger og usikkerhet - et bittelite Lynkurs :

Anta N målte verdier x_1, x_2, \dots, x_N av en størrelse x

Middelverdi / gjennomsnitt: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Standardavvik: $\Delta x = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x_i - \bar{x}]^2 \right\}^{1/2}$

Standardfeil: $\Delta \bar{x} = \Delta x / \sqrt{N}$

Δx er et mål på spredningen i enkeltmålinger av x

$\Delta \bar{x}$ er et mål på usikkerheten i middelverdien \bar{x}

Resultatet av målingene oppgis gjerne på formen $\bar{x} \pm \Delta \bar{x}$

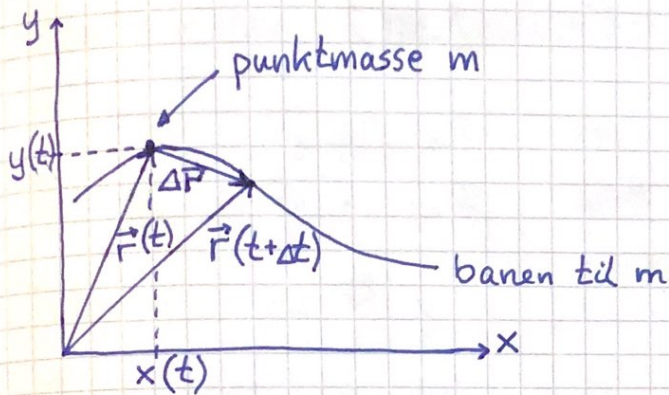
Ekse: $d = (52.50 \pm 0.05) \text{ mm}$ for diam. av en samling snookerkuler

Kinematikk [OS1 3,4 ; YF 2,3 ; LL1]

(4)

= beskrivelsen av bevegelse

Ser på liten masse (punktmasse) og antar først bevegelse i et plan (2D):



Posisjon ved tid t :

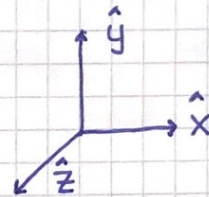
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

I 3D:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$



$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\text{Skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{Kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = -\hat{y} \times \hat{x}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} = -\hat{z} \times \hat{y}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} = -\hat{x} \times \hat{z}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

Forflytning i løpet av Δt : $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet:}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Ser at $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, dvs \vec{v} er tangent til banen

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hastighetsendring pr tidsenhet: } \textcircled{5}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Ser at $\vec{a} \parallel d\vec{v}$, dvs i samme retning som fartsendringen

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad \text{med } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \text{med } a_x = dx/dt = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

Integrasjon av \vec{v} og \vec{a} gir hhv \vec{r} og \vec{v} :

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

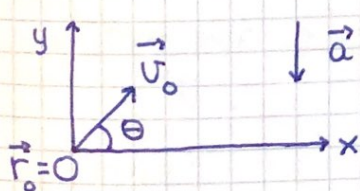
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis konstant \vec{a} ; med $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ og $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Eks: Skrått kast



Finn $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{y} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \theta; \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

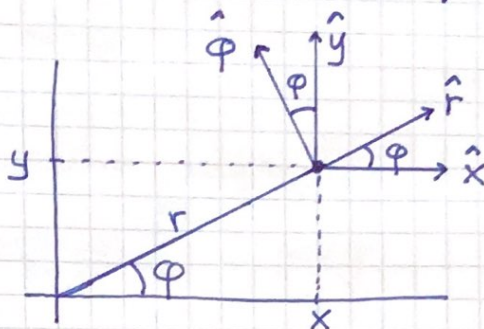
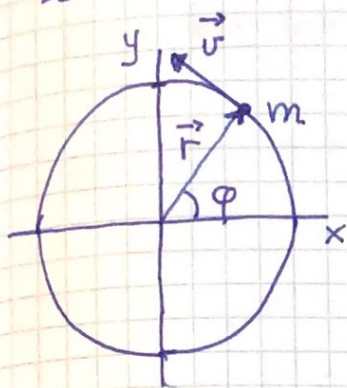
$$\Downarrow \\ t = x/v_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - x^2 \cdot g / 2v_0^2 \cos^2 \theta$$

Sirkelbevegelse

[OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

⑥



Polarkoordinater: $r =$ avstand fra origo

$\varphi =$ vinkel mellom \hat{x} og \hat{r} ; $\varphi > 0$ mot klokka

Ser fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos\varphi + \hat{y}r \sin\varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos\varphi + \hat{y} \sin\varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Buelengde/radius} : d\varphi = ds/r \Rightarrow [\varphi] = 1$
(evt rad)

Vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Omløpt vinkel pr tidsenhet} :$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \Rightarrow [\omega] = 1/s \quad (\text{evt rad/s})$$

Vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Endring i vinkelfart pr tidsenhet} :$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi} \Rightarrow [\alpha] = 1/s^2 \quad (\text{evt rad/s}^2)$$

Med liten dt er $dr (= |d\vec{r}|) = ds = r d\varphi$, slik at

$$v = dr/dt = r \cdot d\varphi/dt = r \cdot \omega$$

Videre ser vi fra figuren at

$$\vec{v} \perp \vec{r}, \text{ dvs } \vec{v} \parallel \hat{\varphi}$$

Dermed er:

$$\boxed{\vec{v} = r\omega \hat{\varphi}}$$

Akselerasjon:

(7)

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= -\hat{x} r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \hat{y} r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ &\quad - \hat{x} r \ddot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \ddot{\varphi} \cos \varphi \\ &= -\vec{r} \omega^2 + \hat{\varphi} r \alpha \\ &= -\hat{r} r \omega^2 + \hat{\varphi} r \alpha \end{aligned}$$

Sentripetalakselerasjon: $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$,
retning inn mot sirkelens sentrum

Baneakselerasjon: $\vec{a}_{\parallel} = r \alpha \hat{\varphi} = r \dot{\omega} \hat{\varphi} = \dot{v} \hat{\varphi}$,
retning tangentielt med sirkelbanen. Hvis ω og v er konstante, har vi uniform sirkelbevegelse med $a_{\parallel} = 0$

Periode def Tid pr omløp:

$$T = 2\pi r / v = 2\pi / \omega ; [T] = s$$

Frekvens def Antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} ; [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz (hertz)}$$

Eks: (TFY 4125 9/8-2022 nr 4-6)

Karusell, $d = 7.0 \text{ m}$, $\omega(t) = \omega_0 [1 - \cos \omega_0 t]$ med $\omega_0 = 0.15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4) Hva er α_{\max} ? $\alpha = \dot{\omega} = \omega_0^2 \sin \omega_0 t \Rightarrow \alpha_{\max} = \omega_0^2 \approx \underline{\underline{0.023 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}}$

5) Hva er v_{\max} i avstand 3.0 m fra sentrum?

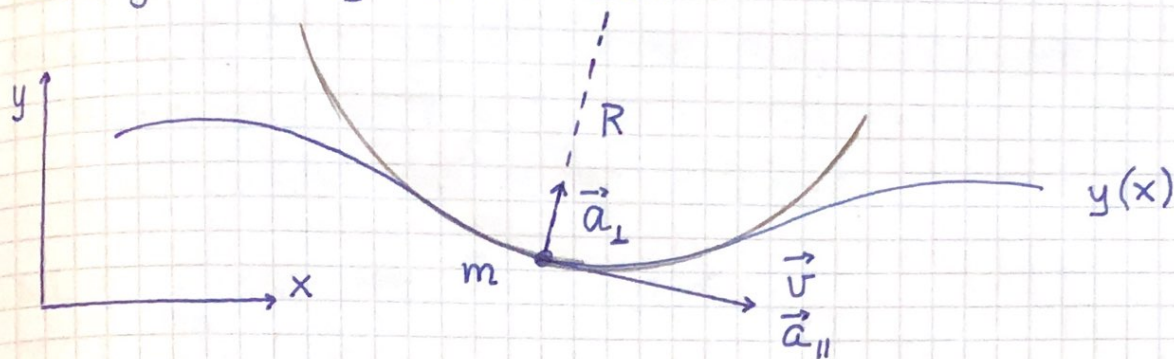
$$\omega_{\max} = 2\omega_0 \Rightarrow v_{\max} = 3.0 \cdot 2 \cdot 0.15 \text{ m/s} = \underline{\underline{0.90 \text{ m/s}}}$$

6) Hvor mange hele runder er rotert fra $t=0$ til $t=126 \text{ s}$?

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t - \sin \omega_0 t = 18.85 \text{ rad for } t=126 \text{ s} \\ &\Rightarrow N = \varphi / 2\pi = \underline{\underline{3}} \text{ hele runder} \end{aligned}$$

Bewegelse langs krum bane:

8

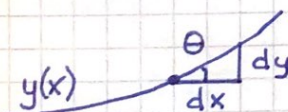


Banens krumningsradius: Radien R i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(Se TFY4104 H2019 s.10-11 for utledning)

- $a_{\perp} = v^2/R$, inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter
- $y'' = 0$ i vendepunkter, og for rett bane (skråplan)
- Banens helningsvinkel θ :


$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan \frac{dy}{dx}$$

Eks: (TFY4104 6/12-2018 nr 10-11)

$$y(x) = y_0 [(x/L)^4 - (x/L)^2] \text{ med } y_0 = 25.0 \text{ cm og } L = 250 \text{ cm}$$

10) Hva er θ ved $x = \pm 6L/5$?



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{L} [4(x/L)^3 - 2(x/L)] = \pm 0.4512 \Rightarrow \theta = \arctan(0.4512) \approx \underline{\underline{24^\circ}}$$

11) Hva er krumningsradien R i de to bunnpunktene?

$$y' = 0 \Rightarrow (x/L)^2 = 1/2$$

$$y'' = (y_0/L^2) [12(x/L)^2 - 2] = 4y_0/L^2 \text{ når } (x/L)^2 = 1/2$$

$$\Rightarrow R = 1/y'' = L^2/4y_0 = (250^2/4 \cdot 25) \text{ cm} = \underline{\underline{625 \text{ cm}}}$$

Newtons lover [OS1 5,6; YF 4,5; LL 2,3]

(9)

Anta m, \vec{v}, \vec{a} = legemets masse, fart, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, dus krefter er vekselvirkninger mellom legemer. Når legeme 1 virker på legeme 2 med kraft \vec{F}_{12} , virker 2 på 1 med kraft $-\vec{F}_{12}$

Enhet: $[F] = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$ (newton)

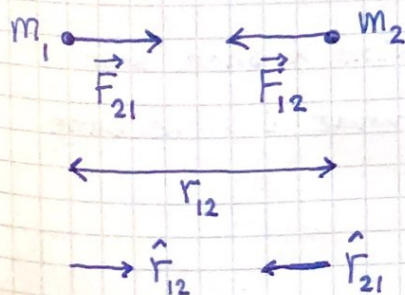
Impuls (evt bevegelsesmengde): $\vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$

Fundamentale krefter [OS1 13.1; OS2 5.3; YF 5.5; LL 2.1]

- Gravitasjon / Tyngdekraft: Svak tiltrekning mellom masser
- Coulombkraft: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger
- Kjemekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

Gravitasjon:



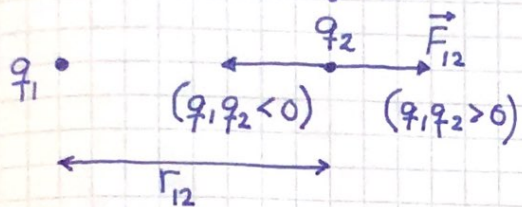
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

Coulombkraften:



Coulombs lov:

(10)

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Enhet for ladning:

$$[q] = C \text{ (coulomb)}$$

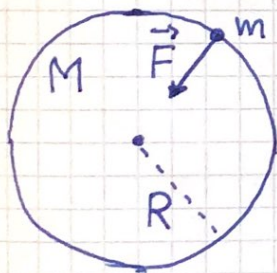
Vakuumpemittiviteten:

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

Relevante krefter i mekanikken:

- Tyngdekraften fra jorda (eller andre himmellegemer)
- Kontaktkrefter; normalkraft og friksjonskraft.
(I bunn og grunn coulombkrefter.)

Tyngde [OS1 13.2, 5.4; YF 4.4; LL 2.5]



$$F = G \frac{Mm}{R^2} = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}; R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \text{ med } g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2, \\ \text{tyngdens akselerasjon ved jordas overflate}$$

Fritt fall: Når $m \cdot g$ er eneste kraft som virker på m , gir N2:

$$mg = ma \Rightarrow \underline{\underline{a = g}}$$

Ekst: Satellittbaner, sirkulære. N2 med $a = v^2/r$ gir

$$GMm/r^2 = mv^2/r \Rightarrow v^2 r = GM$$

a) Lave baner (LEO): $h \sim 100\text{-}300 \text{ km} \Rightarrow r \sim 6.6 \cdot 10^6 \text{ m}$

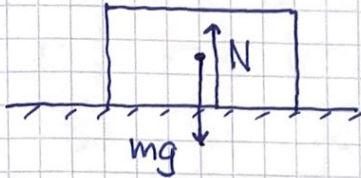
$$\Rightarrow v = \sqrt{GM/r} \approx 7.8 \text{ km/s}; T = 2\pi r/v \approx 1\frac{1}{2} \text{ time}$$

b) Geostasjonære baner (GEO): Over ekvator med $T = 24 \text{ timer}$
 $\Rightarrow h = r - R \approx 36000 \text{ km}$ og $v \approx 3 \text{ km/s}$

Kontaktkrefter [OS1 5.6, 6.2, 6.4, 14.3 ; YF 4.1, 5.3 ; LL 3, 8] (11)

Normalkraft : N = normalkomponent av kontaktkraften mellom to legemer

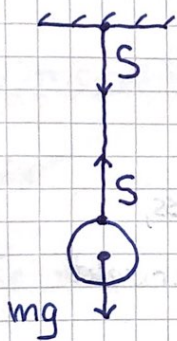
Eks:



Hvis kloss i ro : $N = mg$ (pga N1)

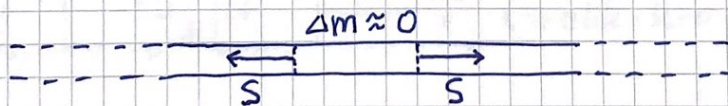
Snorkraft : S = kraft fra snora på det som er festet til snora

Eks:

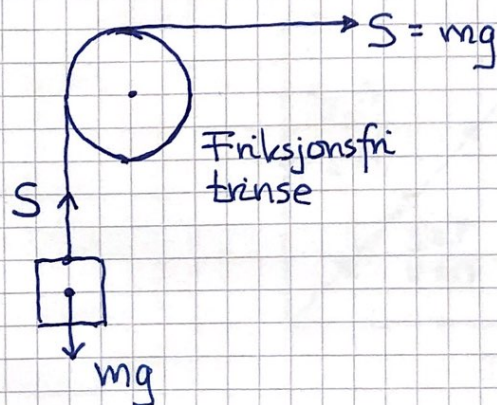


Hvis kule i ro : $S = mg$ (pga N1)

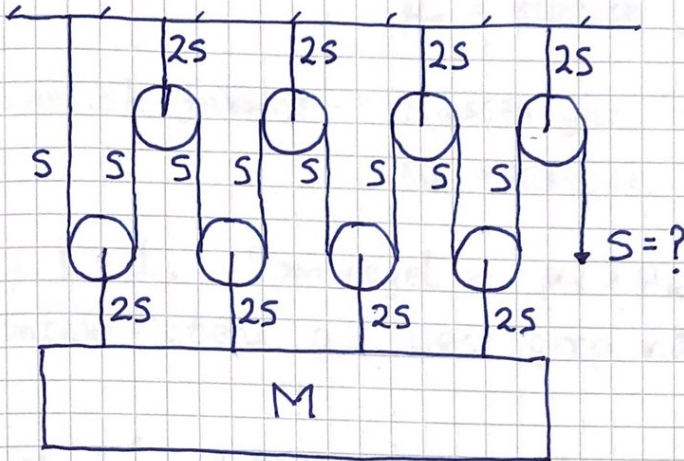
Strukket, lett snor har konstant snordrag S :



Kan endre retningen på \vec{S} med trinse :



Blir sterk med talje :



N1 for kassa:

$$4 \cdot 2S = Mg$$

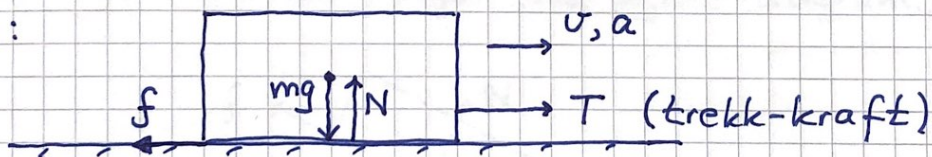
$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{8} Mg}$$

Friskjonskrefter [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1]

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom legemer

\vec{f} er rettet mot legemenes relative bevegelse

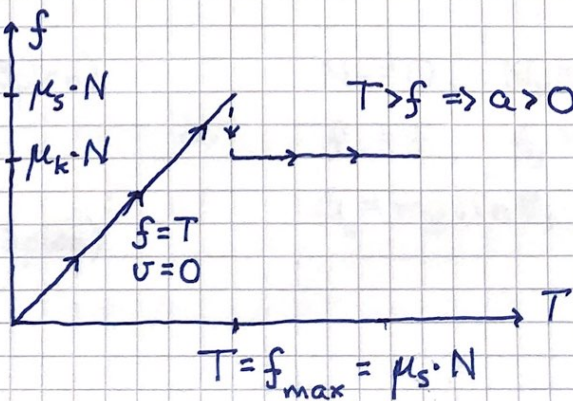
Eks:



N1 \perp bordet $\Rightarrow N = mg$

N2 \parallel bordet $\Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$

Eksp. gür:



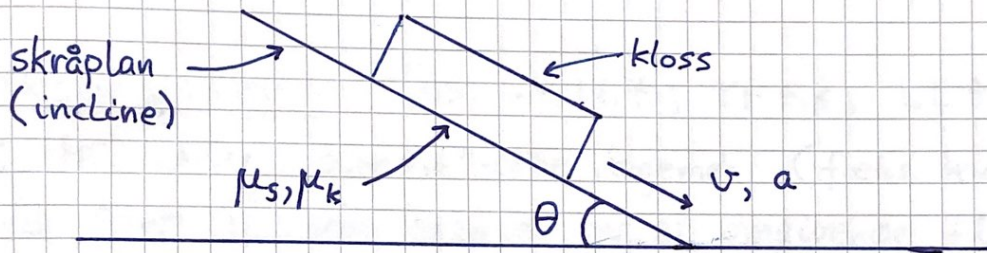
(13)

Statisk friksjon: Kloss i ro, $f = T$, $f_{\max} = \mu_s \cdot N$
 $\mu_s =$ statisk friksjonskoeffisient

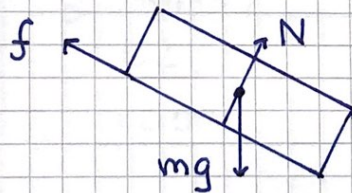
Kinetisk friksjon: Klossen glir, $f = \mu_k \cdot N$
 $\mu_k =$ kinetisk friksjonskoeffisient

$[\mu] = 1$. Som regel er $\mu_s > \mu_k$ (da ujevnheter i kontaktflatene gir best grep når $v = 0$).

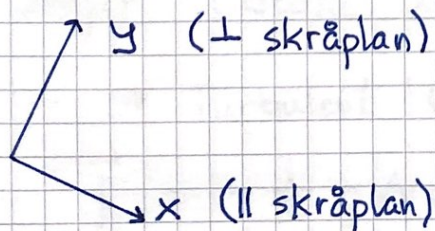
Eks (med løsningsstrategi):



- Finn ytre krefter. Tegn fritt-legeme-diagram.



- Velg koordinatsystem. Dekomponér.



$$\Rightarrow \begin{aligned} N_x &= 0, & N_y &= N \\ f_x &= f, & f_y &= 0 \\ G_x &= mg \sin \theta, & G_y &= mg \cos \theta \end{aligned}$$

- Bruk N_1 og/eller N_2 . Løs ligningene. (14)

$$N_1 \perp \text{skråplanet} : N = mg \cos \theta$$

$$N_2 \parallel \text{---} : mgsin\theta - f = ma$$

Statisk, $a=0$: $f = mgsin\theta \leq f_{max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos\theta$
 \Rightarrow Bare mulig hvis $\tan \theta \leq \mu_s$

Kinetisk : $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos\theta \Rightarrow a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$

Ser at vi nå kan måle μ_s : Øk θ inntil klossen begynner å gli, ved vinkel θ_{max} ; da er $\mu_s = \tan \theta_{max}$

Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7 ; YF 5.3 ; LL 8]

Vi betrakter symmetriske legemer (f.eks. kuler) med fart \vec{v} som bremses av et omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ . To viktige fluider :

	ρ (kg/m ³)	μ (kg/m·s)
Luft	1.2	$2 \cdot 10^{-5}$
Vann	1000	10^{-3}

Liten $v \Rightarrow$ Laminær (pen, lagdelt) strømning av fluidet rundt legemet, og $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$. Kule med radius r :
 $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov).

Stor $v \Rightarrow$ Turbulent (uordnet) strømning av fluidet,

og $\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}$

Her er C_d drag-koeffisienten (stort sett bestemt av legemets form) og A er legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$. Kule : $A = \pi r^2$; $C_d \approx 0.5$.

Eks: Terminalfart, dvs maksimal fart v_t , (15)
 for kuler/baller som faller, øker med kulenes radius r
 dersom de har uniform massetetthet ρ_k . Dvs, $v_t \sim r^\alpha$.
 Bestem eksponenten for (a) laminær og (b) turbulent strømning.

Løsn: N1 gir $f(v_t) = mg$, med $m = \frac{4}{3}\pi \rho_k r^3$

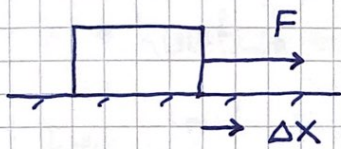
(a) $6\pi\mu r v_t = \frac{4}{3}\pi \rho_k r^3 g \Rightarrow v_t = 2\rho_k g r^2 / 9\mu \sim r^2 \Rightarrow \alpha = 2$

(b) $\frac{1}{2}\rho \pi r^2 C_d v_t^2 = \frac{4}{3}\pi \rho_k r^3 g \Rightarrow v_t^2 \sim r \Rightarrow v_t \sim \sqrt{r} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

Arbeid og energi [OS1 7,8; YF 6,7; LL 4]

Arbeid [OS1 7.1; YF 6.1-6.3; LL 4.1]

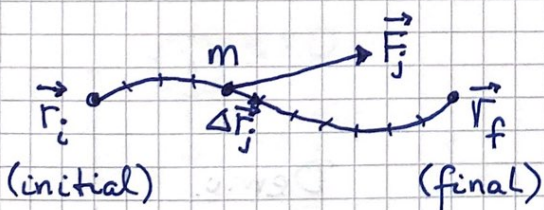
Arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Kraft} \cdot \text{Forflytning}$



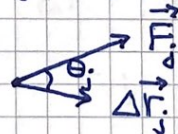
$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$

$[W] = N \cdot m = J \text{ (joule)}$

Generalisering:



$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \cdot \Delta r_j \cdot \cos \theta_j$



$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

= arbeid utført av \vec{F} på massen m , når m flytter seg fra \vec{r}_i til \vec{r}_f

Effekt [OS1 7.4; YF 6.4; LL 4.1]

(16)

Effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ Utført arbeid (evt. overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} ; [P] = \frac{J}{s} = W \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2; YF 6.2; LL 4.2]

Defineres ved å regne ut utført arbeid med bruk av N2.

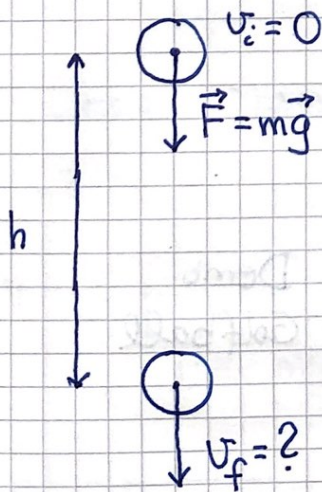


$$\begin{aligned} W &= \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f (d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v}) / 2 \\ &= \frac{1}{2} m \int_i^f d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \int_i^f d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \end{aligned}$$

$K =$ kinetisk energi $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$

Dermed: $W = K_f - K_i = \Delta K$ ("Work-energy theorem")

Eks:



Løsn:

$$K_i = 0, K_f = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$W = \Delta K$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

Konservative krefter og potensiell energi

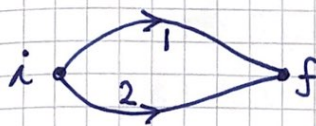
(17)

[OS1 8.1-8.4 ; YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

\vec{F} er konservativ hvis $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

↑ Integral rundt lukket bane

Da er W uavhengig av veien fra i til f :


$$W_1 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 ; W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$\Rightarrow W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\Rightarrow W_1 = W_2$, uavhengig av veien

Forskjell (endring) i potensiell energi U :

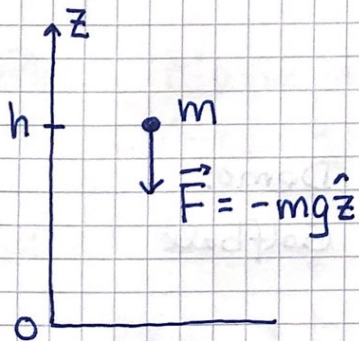
$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

NB: Bare forskjeller (endringer) ΔU har fysisk betydning. Vi velger fritt hvor vi har $U = 0$.

Anta f.eks. $U = 0$ i posisjon \vec{r}_0 . Da er

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks: Masse i tyngdefeltet; bestem $U(h)$



Velg (f.eks.) $U(z=0) = 0$.

Da er

$$U(h) = - \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= - \int_0^h (-mg\hat{z}) \cdot (dz\hat{z})$$

$$= \underline{\underline{mgh}}$$

Finner \vec{F} fra kjent U ved derivasjon:

(18)

$$1D: dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -dU/dx$$

$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til U :

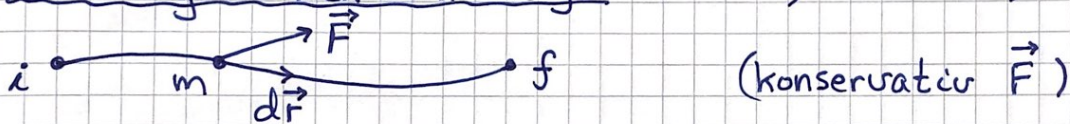
$\nabla U = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} U$ = vektor i den retningen som U øker raskest; dermed peker \vec{F} i den retningen som U avtar raskest

Eks: Masse m i tyngdefeltet, $U(z) = mgz$

$$\Rightarrow \partial U / \partial x = \partial U / \partial y = 0; \partial U / \partial z = mg$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U = -\hat{z} \partial U / \partial z = -mg\hat{z}, \text{ som stemmer.}$$

Bevaring av mekanisk energi [OS1 8.3; YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\left. \begin{aligned} \Delta K = K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U = U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_f - K_i = U_i - U_f$$

$$\Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$$

Dvs: Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et konservativt system

Eks: Masse m som slippes i tyngdefeltet

Anta $z_i = h$, $v_i = 0$ og $z_f = 0$. Bestem v_f .

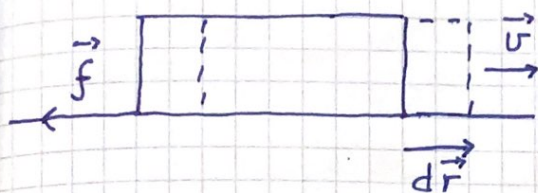
Løsn: $K_i = U_f = 0$

$$\Rightarrow K_f = U_i \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}, \text{ som før}$$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1 ; YF 7.3 ; LL 4.5]

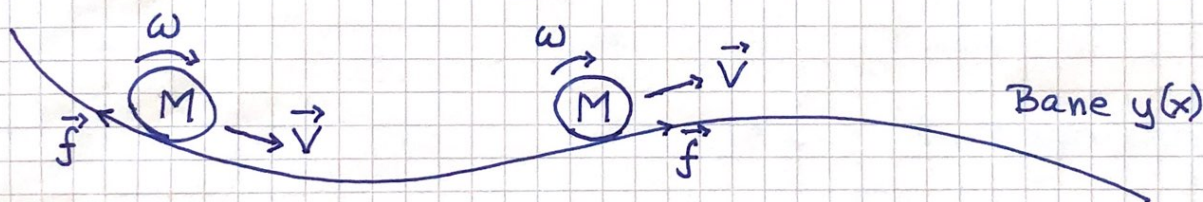
(19)



Kinetisk friksjon gir
 $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$
da \vec{f} og $d\vec{r}$ har motsatt
retning

Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi osv.
Kinetisk \vec{f} er ikke konservativ da $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$
Men statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi
da relativ forflytning $d\vec{r} = 0$

Labprosjektet: Ren rulling av kompakt kule



Statisk friksjon \vec{f} når kula ikke glir

⇒ Mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U = Mgy$

Kin. translasjonsenergi: $K_{trans} = \frac{1}{2} MV^2$

Kula roterer om sitt massesenter med
vinkelhastighet ω og har kinetisk
rotasjonsenergi K_{rot} i tillegg til K_{trans}

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

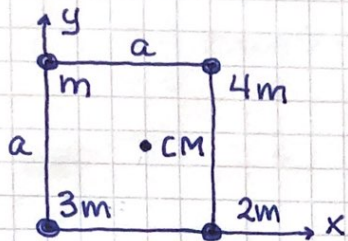
(20)

Massesenter [OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

For N punktmasser m_1, m_2, \dots, m_N i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Eks:



$$M = 10m$$

$$X_{CM} = (2ma + 4ma) / 10m = 0.6a$$

$$Y_{CM} = (ma + 4ma) / 10m = 0.5a$$

$$\vec{R}_{CM} = X_{CM} \hat{x} + Y_{CM} \hat{y}$$

For kontinuerlig massefordeling:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r} dm \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

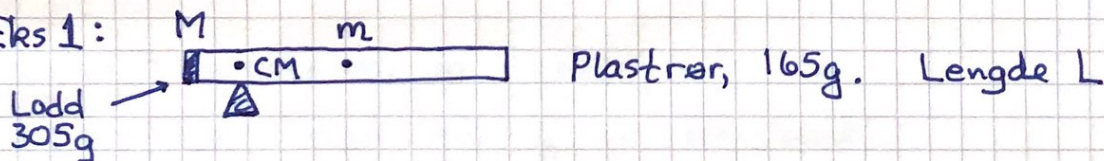
$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm \quad ; \quad dm = \text{masseelement}$$

$$dm = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma dA \\ \rho dV \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda, \sigma, \rho = \text{masse pr l\AA}ngde-, \text{flate-, volumenet} \\ dl, dA, dV = \text{l\AA}ngde-, \text{flate-, volumeelement} \end{array}$$

Med uniform massefordeling (dvs konstant massetetthet):

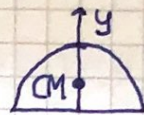
$$dm = \frac{M}{L} dl \quad (1D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{A} dA \quad (2D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{V} dV \quad (3D)$$

Eks 1:



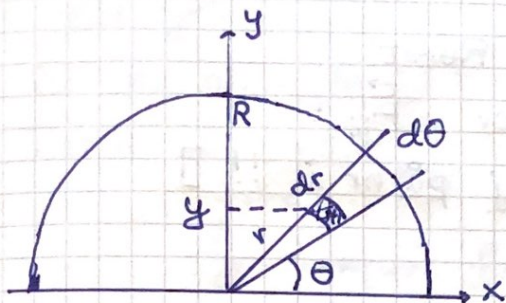
$$X_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{m \cdot L}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 2: Halv sirkulær plate



Masse M
 Radius R
 $Y_{CM} = ?$

(21)



$$dA = r d\theta \cdot dr ; A = \frac{1}{2} \pi R^2$$

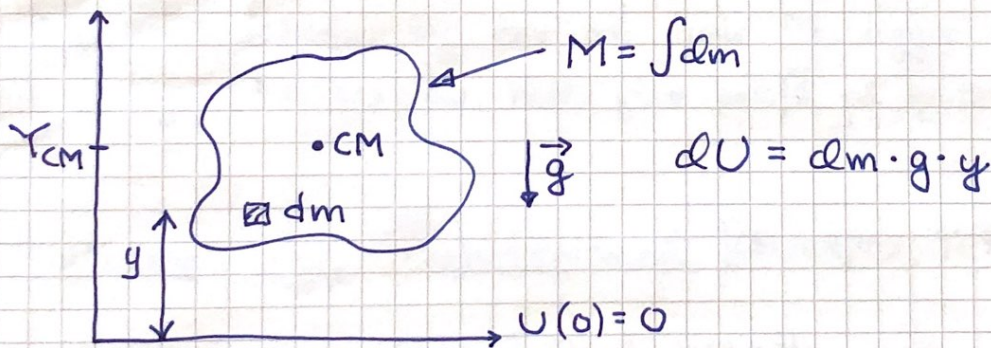
$$y = r \sin \theta$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{CM} &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \cdot dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}} \end{aligned}$$

[Beregn selv: Halv ring: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$; Halv kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$]

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet. Tyngdepunkt.



$$U = \int dU = \int g y dm = g M Y_{CM}$$

(dvs massesenter og tyngdepunkt er på samme sted når g er konstant)

Tyngdepunktbevegelsen [OS19.6; YF 8.5; LL 5.8] (22)

Anta system med N punktmasser $\{m_i\}$ i posisjoner $\{\vec{r}_i\}$.

$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Her er $\vec{F}_{i,ytre}$ = netto ytre kraft på m_i

\vec{F}_{ji} = kraft fra m_j på m_i

Legg sammen N2 for alle m_i i systemet.

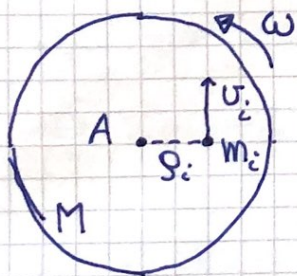
$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{CM} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\#5: \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{= \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga } N3} = \vec{F}_{ytre}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}} \quad N2 \text{ for CM (tyngdepunktet)}$$

Dvs: CM beveger seg som om hele M ligger i CM og påvirkes av netto ytre kraft på systemet!

Rotasjonsenergi. Trehetsmoment [OS1 10.4, 10.5; YF 9.4-9.6; LL 6.2-6.4]



$M = \sum_i m_i$ = legemets masse

A = rotasjonsaksen (\perp papirplanet)

r_i = avstand fra A til m_i

$v_i = r_i \omega$ = farten til m_i

ω = legemets vinkelfart

Legemets rotasjonsenergi:

$$K_{rot} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Legemets trehetsmoment mhp aksen A :

$$I = \sum_i m_i r_i^2; \text{ Med kontinuerlig massefordeling: } I = \int r^2 dm$$

Et stivt legeme kan generelt ha translasjon av CM med fart \vec{V} kombinert med rotasjon om en akse gjennom CM med vinkelfart $\vec{\omega}$ (der vektoren $\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen). Total kinetisk energi er:


(23)

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad [\text{Bevist i notat p\u00e5 hjemmesiden}]$$

M = total masse; I_0 = treghetsmoment mhp aksen gjennom CM

Rullbare legemer:

1) Ring og hul sylinder

 $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$

2) Kompakt skive og sylinder



Del opp i tynne ringer med radius ρ , tykkelse $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho d\rho$ og dermed $dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 \frac{M}{A} dA = \rho^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi\rho d\rho$
Skivas totale treghetsmoment blir da

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

- 3) T\u00f8nt kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
 4) Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ } Se \u00f8ving m/LF.

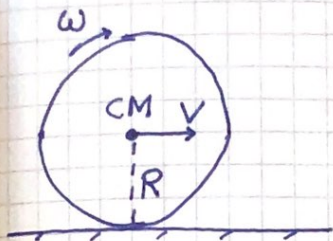
Ser at alle fire er p\u00e5 formen $I_0 = c \cdot MR^2$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c	1	2/3	1/2	2/5

↑ Lab

Ren rulling [OS1 11.1; YF 10.3; LL 6.7, 6.8]

(24)

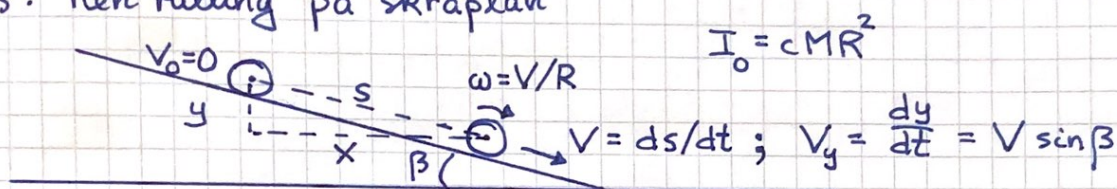


Før 1 hel omdreining: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ og $V = \frac{2\pi R}{T}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2}MV^2}$$

Eks: Ren rulling på skråplan



Bestem V , A , f samt max vinkel β_{\max} som gir ren rulling.

Løsn: Ren rulling \Rightarrow Statisk friksjon \Rightarrow Mek. energi er bevart

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2}MV^2 \Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}}} \quad [\Rightarrow \text{Kula er raskest}]$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1+c}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \sin\beta = \underline{\frac{g \sin\beta}{1+c}}$$

$$N2: Mg \sin\beta - f = MA \Rightarrow \underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta}$$

Fra før: $f \leq \mu_s \cdot N$ (max statisk friksjon er $\mu_s \cdot N$)

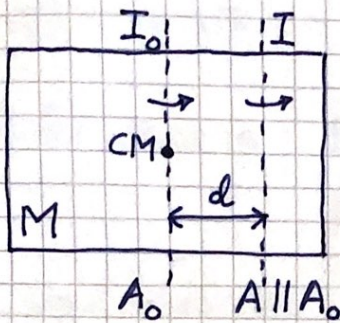
$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta \leq \mu_s Mg \cos\beta \Rightarrow \underline{\tan\beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}}$$

Hvis kule: $c = \frac{2}{5} \Rightarrow \beta_{\max} = \arctan(7\mu_s/2)$

Med f.eks. $\mu_s = 0.5$ blir $\beta_{\max} \approx 60^\circ$

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

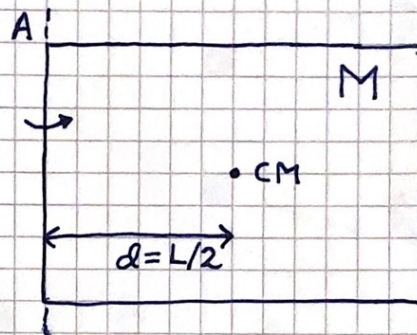
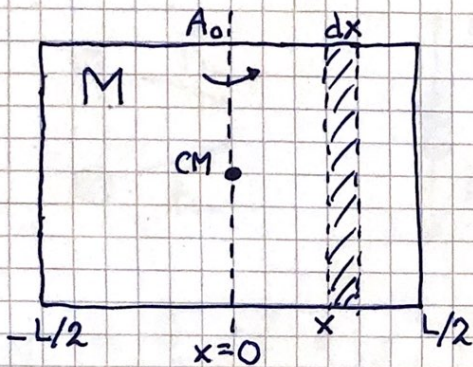
25



$$I = I_0 + Md^2$$

[Utleddet i notat]

Eks 1: Svingdør vs vanlig dør



$$g = x; dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = I_0 + Md^2$$

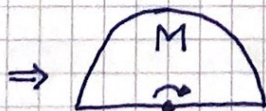
$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

[evt $I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2$; ok!]

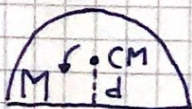
Eks 2: Hel og halv sirkulær skive



$$I_{20} = \frac{1}{2} \cdot 2MR^2 = MR^2$$



$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (= \frac{1}{2} I_{20})$$



Fra s. 21: $d = 4R/3\pi$

$$\text{Steiners sats} \Rightarrow I_0 = I - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) MR^2 \approx \underline{\underline{0.32 MR^2}}$$

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp

26

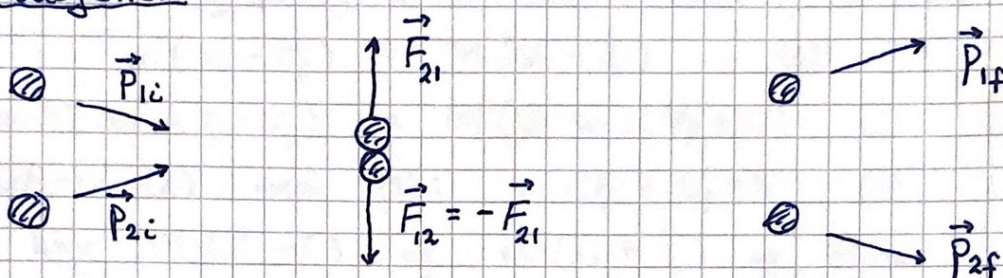
[OS1 9 ; YF8 ; LL5]

N2 for masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{massens impuls}; [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

Impulsbevarelse: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ er bevart

Kollisjoner



N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \xrightarrow{N2} \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant};$ indre krefter endrer ikke systemets totale impuls

Typiske kollisjoner er kortvarige $\Rightarrow \Delta U \approx 0; \Delta E \approx \Delta K \leq 0$
Mekanisk energi E kan tapes pga deformasjon og friksjon.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt:

De kolliderende legemene henger sammen, med felles slutfart. Gir maksimalt tap av mek. energi.

Vi ser nærmere på kollisjoner i 1D, såkalte sentrale støt.

Før: $m \otimes \rightarrow v_i \quad v_i \leftarrow \otimes M$

Etter: $v_f \leftarrow \otimes m \quad M \otimes \rightarrow v_f$

$\longleftrightarrow +$

Alltid: $\Delta p = 0 \Rightarrow mv_i + Mv_i = mv_f + Mv_f \quad (1)$

Fullstendig uelastisk: $\otimes \otimes \rightarrow v_f = v_f = (mv_i + Mv_i) / (m + M)$

Elastisk: $K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}Mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}Mv_f^2 \quad (2)$

Skriver om (1) og (2) og bruker 3. kvadratsetning på (2):

$$m(v_i - v_f) = M(v_f - v_i) \quad (1)$$

$$m(v_i + v_f)(v_i - v_f) = M(v_f - v_i)(v_f + v_i) \quad (2)$$

Dividerer (2) med (1): $v_i + v_f = v_f + v_i \quad (3)$

Tar hhv $M \cdot (3) - (1)$ og $m \cdot (3) + (1)$ og finner:

$$v_f = \frac{M}{m+M} \left(2v_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right); \quad v_f = \frac{m}{M+m} \left(2v_i + v_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Elastisk ball mot vegg

$$m \otimes \rightarrow v_i \quad \left\| \begin{array}{l} M = \infty \\ v_i = 0 \end{array} \right. \quad v_f = ? \leftarrow \otimes m \quad \left\| \begin{array}{l} M \\ v_f \end{array} \right.$$

Løsn: $v_f = \frac{M}{m+M} \cdot v_i \cdot \frac{m-M}{M} \approx v_i \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = \underline{\underline{-v_i}}$

Sjekker energi- og impulsbevarelse:

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 = K_i \quad \underline{\underline{OK}}$$

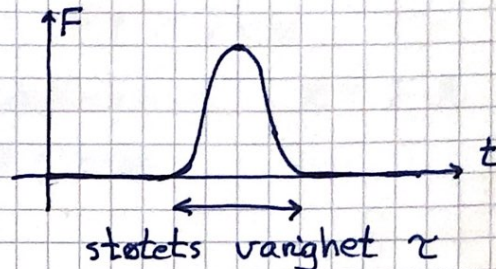
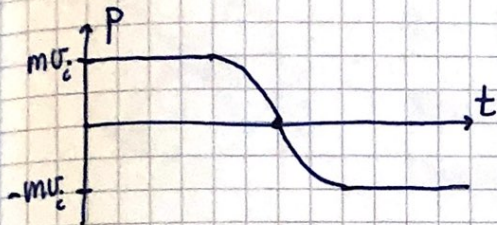
$$p_f = mv_f + Mv_f = -mv_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2v_i$$

$$= -mv_i + 2mv_i = mv_i = p_i \quad \underline{\underline{OK}}$$

"Kraftstøt": Kraften F fra vegg på ballen endrer ballens impuls,

(28)

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t) dt$$

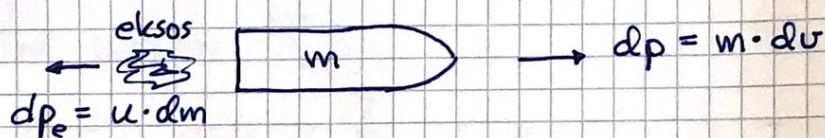


Estimat av (middlere) akselerasjon i støtet:

$$v_i = 10 \text{ m/s}, v_f = -10 \text{ m/s}, \tau \approx 2 \text{ ms} \Rightarrow a \approx \frac{20 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 10^4 \text{ m/s}^2$$

$a \gg g \Rightarrow$ OK å se bort fra ytre kraft mg i selve støtet

Rakettprikk



Eksos (masse dm) sendes bakover med fart u .

Pga impulsbevarelse øker rakettenes fart: $m \cdot dv = u \cdot dm$

N2 for raketten: $m \cdot dv/dt = u \cdot dm/dt = F_{\text{skyv}}$

Skyvekraft: $F_{\text{skyv}} = u \cdot \dot{m}$

Ved oppskyting i tyngdefeltet: $F = u \cdot \dot{m} - mg$

$$\Rightarrow m dv/dt = u dm/dt - mg$$

Løsning: Anta $v(0) = 0$ og konstante u, g .

Multipliser med dt/m og integrer fra $t=0$ til t

$$\Rightarrow \int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} dm/m - g \cdot t$$

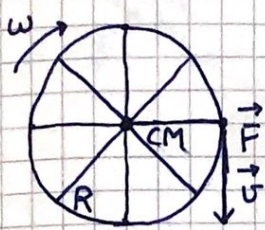
$$\Rightarrow v(t) = u \ln[m(t)/m(0)] - g \cdot t$$

$$= |u| \ln[m(0)/m(t)] - g \cdot t \quad (u < 0, m(t) < m(0))$$

Rotasjonsdynamikk [OS1 10; YF10; LL 6]

(29)

Antar først rotasjonsakse med fast orientering. F.eks. et hjul:



Effekt tilført hjulet av ytre kraft \vec{F} :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = FR\omega$$

Kraftens dreiemoment: $\tau = F \cdot R$

$$\text{Dermed: } P = \tau \cdot \omega$$

Men vi har alternativt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right) = I_0 \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed: $\tau = I_0 \dot{\omega}$ N2 for rotasjon om akse (gjennom CM) med fast orientering

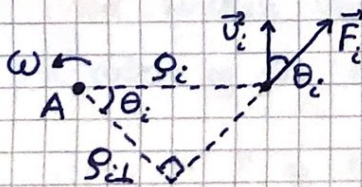
Jf. N2 for translasjon: $F = m\dot{v}$

Dersom flere ytre krefter \vec{F}_i :

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i = \sum_i F_i \rho_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

med netto ytre dreiemoment mhp rotasjonsaksen

$$\tau = \sum_i F_i \rho_i \cos \theta_i = \sum_i F_i \rho_{i\perp}$$



$\rho_{i\perp}$ = avstanden fra rot.aksen til kraftens forlengelseslinje = kraftens arm

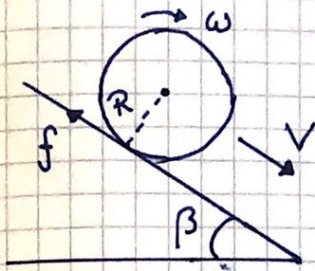
Fra $P = \frac{dW}{dt}$ og $P = \tau \cdot \omega = \tau \cdot \frac{d\phi}{dt}$ ser vi at

$$dW = \tau d\phi = \text{arbeid utført av } \tau \text{ ved omlept vinkel } d\phi$$

Jf. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{arbeid utført av } \vec{F} \text{ ved translasjon } d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skrånplan (s. 24)

30



$$I_0 = cMR^2; \quad \omega = \frac{v}{R}; \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$F_{\parallel} = Mg \sin \beta - f = M\dot{v} \quad (N2, \parallel)$$

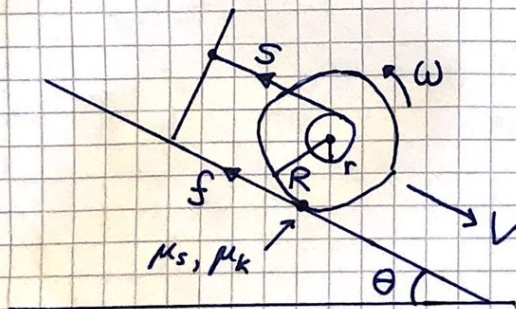
$$\tau = f \cdot R \quad (\text{da } \vec{N} \text{ og } M\vec{g} \text{ begge har null arm mhp rot.aksen gjennom CM})$$

$$N2, \text{ om rot.aksen: } \tau = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \dot{v}/R \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

$$\text{Setter } f \text{ inn i } N2, \parallel: Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v} \Rightarrow \dot{v} = g \sin \beta / (1+c)$$

og dermed $f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$. Som med energibevarelse s. 24!

Eks 2: Baklengssnelle på skrånplan (Øving)



- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å slure (rotete og gli) nedover skrånplanet?

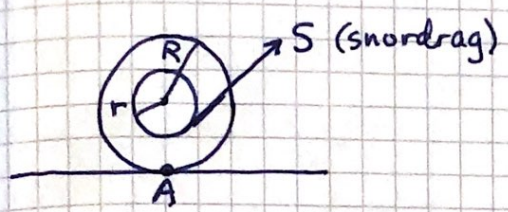
Tips: $N1 \parallel$ og $N1$ rot. om CM; $f = \mu_s N$ når $\theta = \theta_0$

- Hva er S og \dot{v} når $\theta > \theta_0$?

Tips: $N2 \parallel$ og $N2$ rot om CM; $f = \mu_k N$

Merk: Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π tar samme tid
 $\Rightarrow v = \omega r$

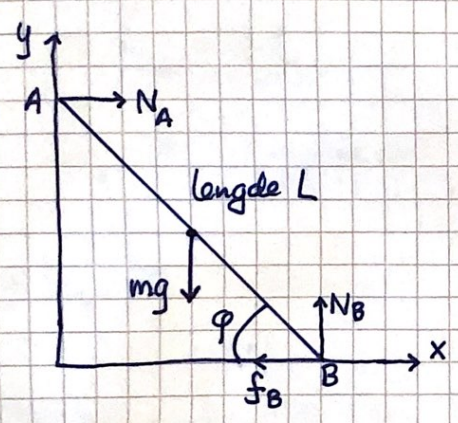
Eks 3: Hvilken vei ruller snella?



- Mg, N og f har null arm mhp A
- Forlengelse av \vec{S} til venstre for A gir rotasjon med klokka
- Forlengelse av \vec{S} til høyre for A gir rotasjon mot klokka

• Forlengelse av \vec{S} gjennom A gir $\tau_A = 0 \Rightarrow$ Snella står i ro!

Eks 4: Er stigen bratt nok?



Anta $f_A = 0$, og $\mu =$ statisk friksjonskoeff. i B. Da glir stigen når $f_B = f_{max} = \mu N_B$

Vi bruker N_1 i x- og y-retning samt N_1 mhp rotasjon om akse i B, \perp xy-planet.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow f_B = N_A \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_B = mg \end{aligned} \right\} \text{Kombinert med } f_B = \mu N_B$$

finner vi nå $N_A = \mu mg$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi = N_A \cdot L \cdot \sin \varphi = \mu mg L \sin \varphi$$

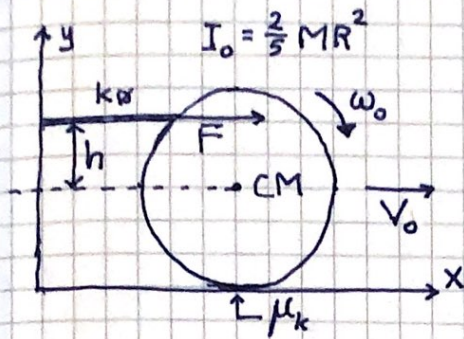
$$\Rightarrow \underline{\tan \varphi_{min} = \frac{1}{2\mu}}$$

Med f. eks. $\mu = 0.25$: $\varphi_{min} = \arctan 2 \approx 63^\circ$

Eks 5: Snooker

[LL 6.7 og øving] [051 11.1]

32



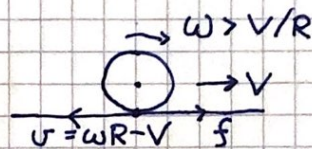
Kortvarig horisontalt støt med kjen i kulas sentrale vertikale plan i høyde h over aksen gjennom CM. Hvilken verdi h_0 gir ren rulling umiddelbart?

Løsn: $N_2 \Rightarrow F \cdot \Delta t = M V_0$ (Neglisjerer friksjon i støtet)

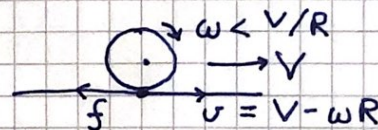
$N_2, \text{rot. om CM} \Rightarrow F h_0 \Delta t = I_0 \Delta \omega = \frac{2}{5} M R^2 \cdot V_0 / R$

$$\Rightarrow \underline{h_0 = \frac{2}{5} R}$$

$h > h_0 \Rightarrow$ "toppspin" :

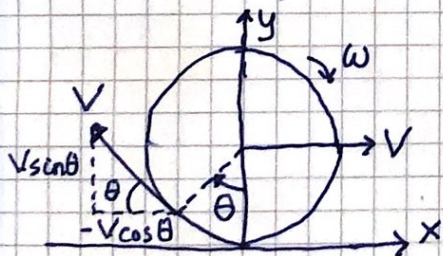


$h < h_0 \Rightarrow$ "underskru" :



Gir sluring i starten, men pga f vil ω nærme seg V/R og gi ren rulling etter hvert.

Banen til punkt på periferien ved ren rulling:



$$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R \dot{\theta}$$

Fra figuren:

$$v_x = V - V \cos \theta$$

$$v_y = V \sin \theta$$



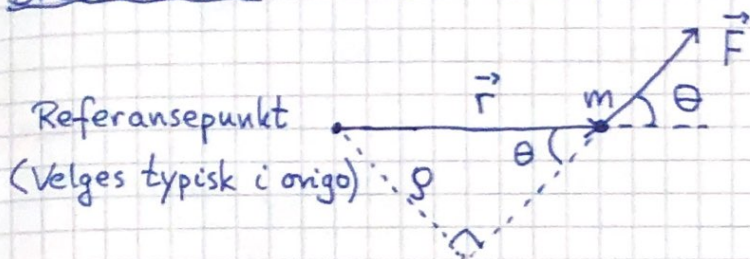
$$\text{Banen: } x(\theta) = R(\theta - \sin \theta); \quad y(\theta) = R(1 - \cos \theta)$$



Rotasjonsdynamikk med vektorer

33

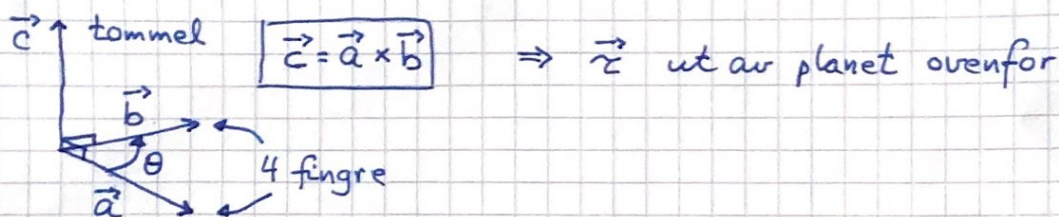
Dreiemoment: [OS1 10.6 ; YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \text{kraftens dreiemoment, relativt origo}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

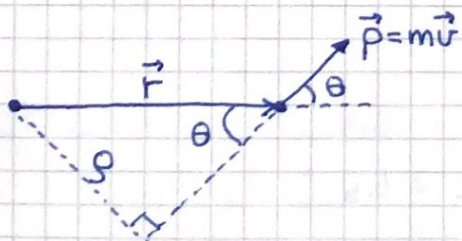
Høyrehåndsregel (HHR) for kryssprodukt:



Absoluttverdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$; $g = \text{kraftens arm}$
(som før)

Hvis flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls: [OS1 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

= massens dreieimpuls

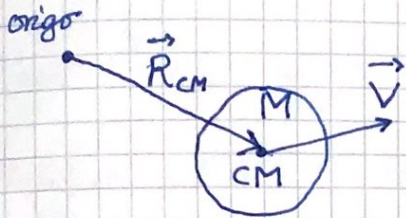
$$\vec{L} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{L} \perp \vec{p}$$
$$L = r p \sin \theta = g \cdot p$$

For partikkelsystem:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \text{evt.} \quad \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$

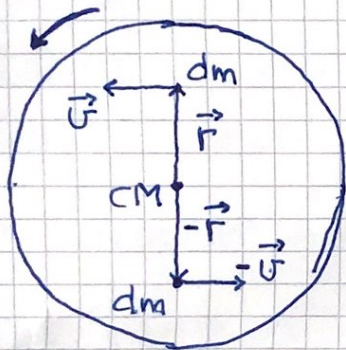
\vec{L} for stivt legeme [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6] (34)

To bidrag: Banedreieimpuls \vec{L}_b ("banespinn")
 Indre dreieimpuls \vec{L}_s ("spinn")



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Anta legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen, dvs uendret etter rotasjon 180° , og anta $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.



Bidrag fra dm :

$$\begin{aligned} d\vec{L}_s &= \vec{r} \times \vec{v} dm \\ &= g \cdot g \omega \hat{z} dm = g^2 dm \cdot \vec{\omega} \\ &= dI_o \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

(g = avstand fra rot.aksen til dm)

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \int d\vec{L}_s = \left\{ \int dI_o \right\} \cdot \vec{\omega} = I_o \vec{\omega}$$

$$\text{Total dreieimpuls: } \vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b = I_o \vec{\omega} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

[Se notat for mer detaljerte utledninger]

Eks: Jordas bevegelse relativt sola

$$L_s = I_o \omega ; I_o \approx \frac{1}{3} MR^2 ; \omega = 2\pi/T_\omega$$

$$L_b = R_{CM} M V = R_{CM}^2 M \Omega ; \Omega = 2\pi/T_\Omega$$

Tallverdier:

$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} ; R_{CM} = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$T_\omega = 24 \text{ h} ; T_\Omega = 365 \text{ d} ; \angle(\vec{L}_s, \vec{L}_b) = 23.5^\circ$$

$$\Rightarrow L_s = 5.9 \cdot 10^{33} \text{ Js} ; L_b = 2.6 \cdot 10^{40} \text{ Js} \quad (\Rightarrow L \approx L_b)$$

N2 for rotasjon [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]

(35)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad \text{sidan} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \text{Jf.} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{for translasjon}$$

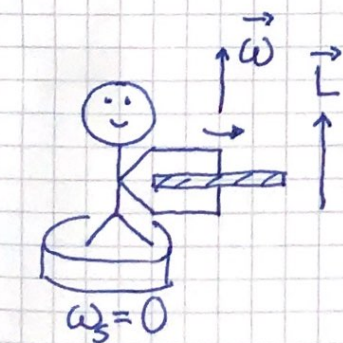
Hvis $\vec{F} = 0$ og $\vec{\tau} = 0$, er \vec{p} og \vec{L} konstante

Spesialtilfelle: Statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$
[Jf. stigen s. 31]

Bevaringslover oppsummert

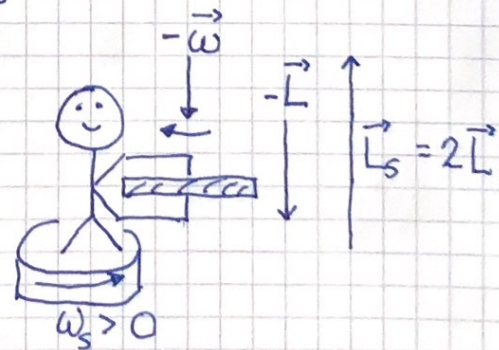
- Isolert system: Ingen ytre krefter.
Da er total E, \vec{p} og \vec{L} bevart.
- Konservativt system: Mek. energi $K+U$ bevart.
- Netto ytre kraft $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ bevart
- Netto ytre dreiemoment $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ bevart

Eks 1: Student med roterende hjul



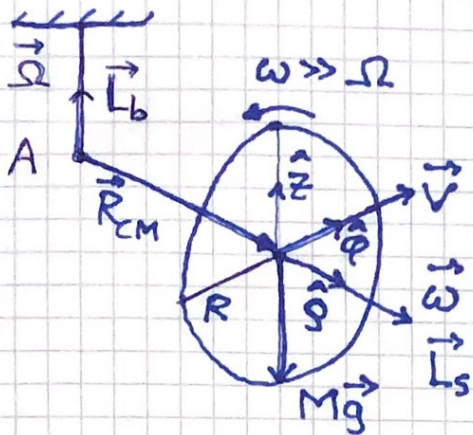
(student
+ kontorstol)

$$\begin{aligned} \text{Hjulet snus} \\ \tau = 0 \\ \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0 \end{aligned}$$



Eks 2: Presesjon [OS1 11.4; YF 10.7; LL 6.10]

(36)



$$I_0 \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

Beregn $T_\omega = 2\pi/\omega$

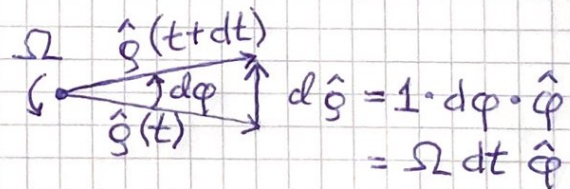
N2, rotasjon om A: $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$; $\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g}$
 $\vec{L}_A = \vec{L}_s + \vec{L}_b$ $= R_{CM} Mg \hat{\phi}$

$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$; $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM}^2 M \Omega \hat{z}$
 $\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s$

Sett inn i N2: $R_{CM} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega d\hat{g}/dt$

Akslingen og \hat{g} roterer om z-aksen med vinkel fart Ω

$$\Rightarrow d\hat{g}/dt = \Omega \cdot \hat{\phi}$$



Dermed:

$$R_{CM} Mg = MR^2 \omega \Omega = MR^2 \frac{2\pi}{T_\omega} \frac{2\pi}{T_\Omega}$$

$$\Rightarrow T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} g T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s} \approx \underline{\underline{0.4 \text{ s}}}$$

dvs $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omdreininger pr sekund

Swingninger [OS1 15; YF 14; LL 9]

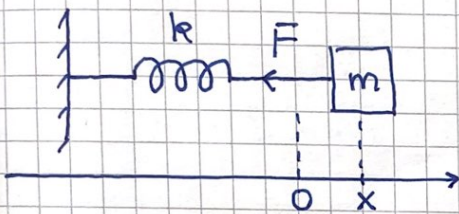
(37)

Periodisk oppførsel omkring likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler

(Senere: Ladning og strøm i elektriske kretser.)

Harmonisk oscillator [OS1 15.1; YF 14.2; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt ($F = 0$)

$x > 0$: strukket fjær ($F < 0$)

$x < 0$: sammenpresset fjær ($F > 0$)

Hookes lov : $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten ; $[k] = \text{N/m}$

N2 : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = k/m$

Løsning : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

evt $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

Aktuelle størrelser (j.f. sirkelbevegelse) :

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel swingning (s)

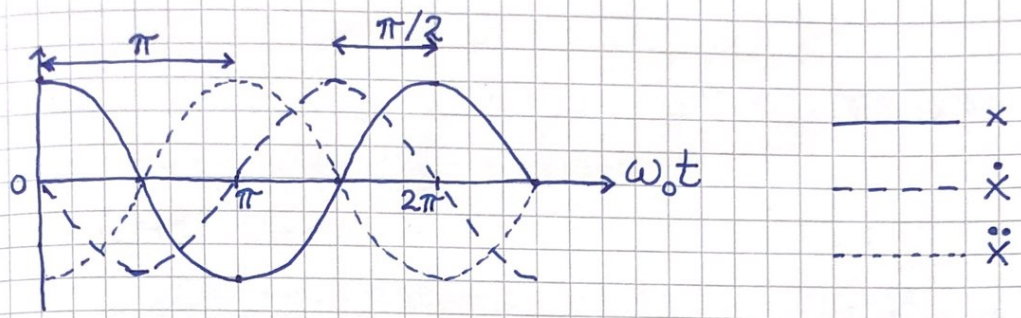
$f = 1/T$ = frekvens = antall swingninger pr tidsenhet (Hz)

φ = fasekonstant

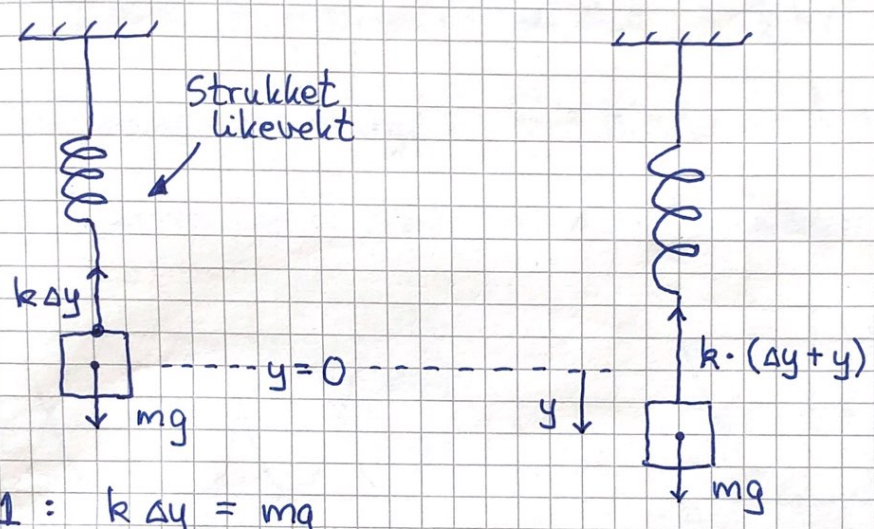
$\omega_0 t + \varphi$ = swingningens fase

Konstantene A og φ (evt B og C) fastlegges med to startbetingelser, f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

Anta $\varphi = 0$. Da er $x(t) = A \cos \omega_0 t$; $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$
og $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$



Eks: Hvordan svinger massen i fjæra i tyngdefeltet?



N1: $k \Delta y = mg$
 $\Rightarrow \Delta y = mg/k$

N2: $mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y}$
 $\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt med uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$: $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2; YF 14.3; LL 9.4] (39)

Anta $\varphi = 0$, dvs $x(t) = A \cos \omega_0 t$.

Potensiell energi:

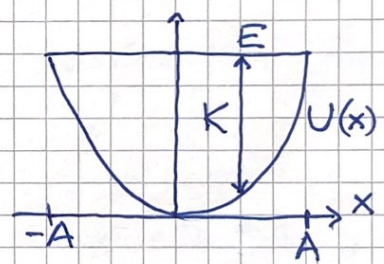
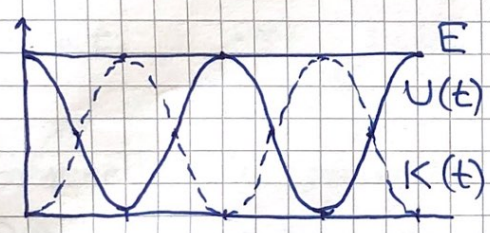
$$U = - \int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

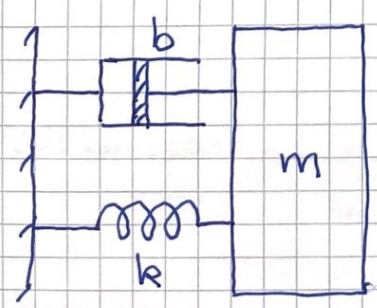
Total mekanisk energi: $E = K + U = \frac{1}{2} kA^2$, uavh. av t

\Rightarrow Fjærkraften $F(x) = -kx$ er konservativ.



Dempet fri svingning [OS1 15.5; YF 14.7; LL 9.7]

Anta friksjon proporsjonal med farten: $f = -b\dot{x}$



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\gamma = b/2m$; $\omega_0^2 = k/m$

Pga friksjon må $x \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$.

Pga formen på difflikningen må løsningen være på formen $\exp(-\alpha t)$, så vi prøver denne!

Innsetting gir: $[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

(40)

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$

$$\Rightarrow x(t) = (A + B \cdot t) \exp(-\gamma t)$$

Dette er svakeste demping som ikke gir svingninger.
Ønskelig i støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t) ; \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

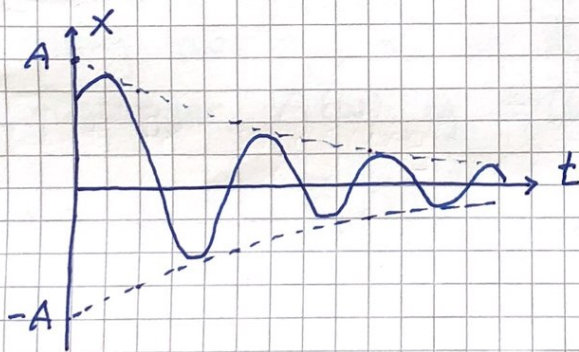
Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{(-1) \cdot (\omega_0^2 - \gamma^2)} = \gamma \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

Generell reell løsning: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$

Dvs harmonisk svingning med avtagende amplitude $A e^{-\gamma t}$.

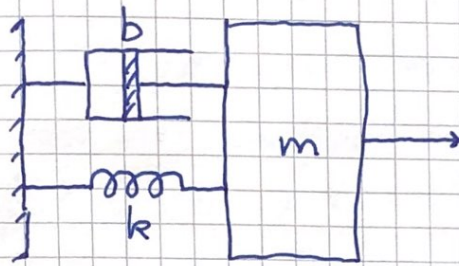


Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ avgjør hvor lenge svingebewegelsen varer

Svak demping: $\gamma \ll \omega_0$

$$\text{Da er } \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Tvingen svingning. Resonans [OS1 15.6; YF14.8; LL9.9] (41)



Antar harmonisk ytre kraft:
 $F(t) = F_0 \cos \omega t$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Den homogene løsningen oppfyller den homogene ligningen

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at $x_h(t)$ er prop. med $\exp(-\gamma t)$ og kan neglisjeres etter et innsvingningsforløp med varighet ca $3\tau = 3/\gamma$.

Fokuserer derfor på partikulærløsningen $x_p(t)$ og "gjetter"

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p gir to ligninger som fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Hvis dempingen er svak ($\gamma \ll \omega_0$) og $\omega \approx \omega_0$, kan amplituden A bli svært stor.

La oss regne ut midlere tilført effekt når $\omega = \omega_0$.

Da er $\varphi(\omega_0) = \arctan 0 = 0$ og

$\dot{x} = \omega_0 A(\omega_0) \cos \omega_0 t$ med $A(\omega_0) = F_0 / (m \cdot 2\gamma\omega_0)$.

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle = \frac{F_0^2 \omega_0}{m \cdot 2\gamma \omega_0} \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \quad (42)$$

Her er $2\gamma = b/m$ og $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$ slik at $\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2b}$.

Dette tilsvarer midlere effekttap pga friksjon,

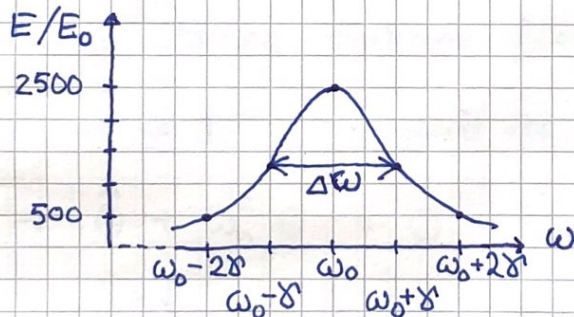
$$\langle P_f \rangle = \langle -b\dot{x} \cdot \dot{x} \rangle = -F_0^2/2b$$

Dvs, stasjonære forhold, med oscillatorenergi s.f. ar ω :

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} ; E_0 = F_0^2/2k$$

Eks: Anta $\omega_0 = 100\gamma$ (svak damping) og skisser resonanskurven $E(\omega)$. Bestem halvverdibredden og oscillatorens Q-faktor.

Løsning: $E(\omega_0) = 2500 E_0$, $E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0$,
 $E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$



Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = b/m$

FWHM: Full Width at Half Maximum

Oscillatorens Q-faktor ("quality factor"): $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

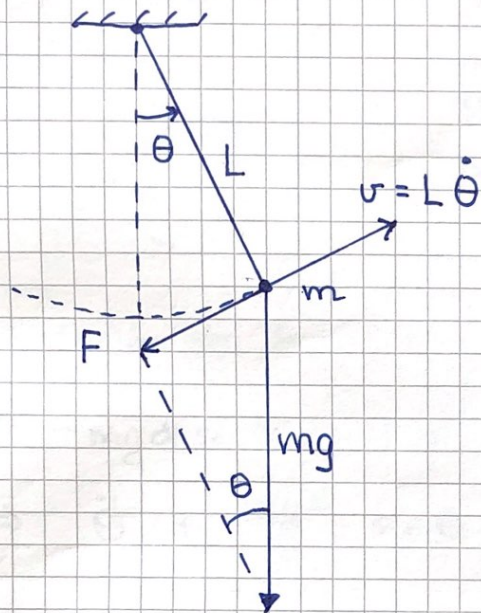
Med svak damping, $\gamma \ll \omega_0$, er $Q \gg 1$.

Her er $\Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/50$, dvs $Q = 50$.

Pendler [OS1 15.4; YF 14.4-14.6; LL 9.6]

(43)

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs stang.



N2 || sirkelbanen:

$$F = ma$$

med

$$F = -mg \sin \theta$$

$$a = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving omkring likevekt:

$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

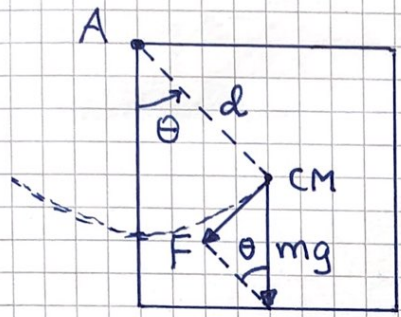
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Foucault-pendelen i Realfagbygget har lengde 25 m. Bestem perioden.

$$\text{Løsn: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{L/g} \approx \underline{10 \text{ s}}$$

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A i avstand d fra CM.



Masse m
 Tregghetsmoment I mhp A
 Dreiemoment mhp A:
 $\tau = -F \cdot d = -mgd \cdot \sin\theta$

N2, rotasjon om A: $\tau = I \ddot{\theta}$

$\Rightarrow -mgd \sin\theta = I \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin\theta = 0$

Anta små utsving omkring likevekt: $\sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = mgd/I$

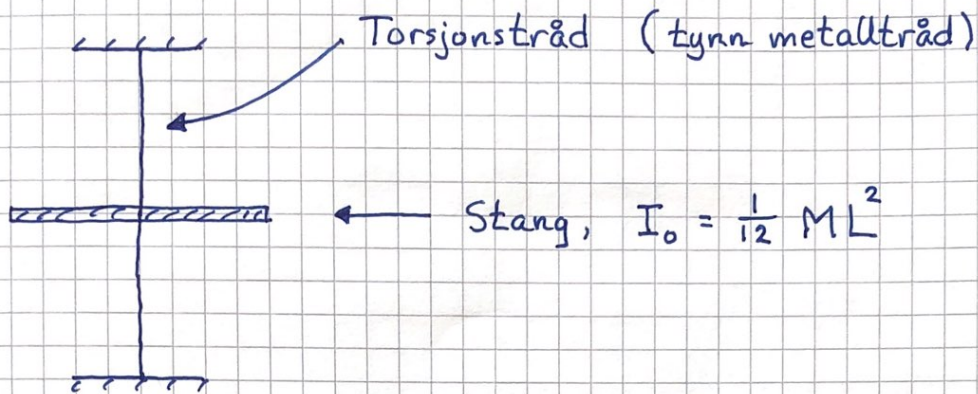
Eks: Kvadratisk plate (som over) med sidekanter $L = 20 \text{ cm}$ og aksen A i et hjørne. Masse m .

a) Vis at $I_0 = \frac{1}{6} mL^2$. (Aakse gjennom CM, parallell med A)

b) Vis at $I_A = \frac{2}{3} mL^2$

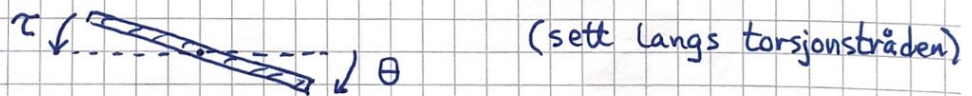
c) Vis at perioden er $T = 0.87 \text{ s}$

Torsjonspendel :



Når stanga roteres en vinkel θ bort fra likevekt, virker torsjonstråden med et dreiemoment på stanga, med retning tilbake mot likevekt, og prop. med vinkelen θ , dvs $\tau = -\kappa \theta$.

Trådens torsjonsstyrket κ har enhet N·m.



N2, rotasjon om trådens akse :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0$$

Eks: $M = 50\text{g}$, $L = 11\text{cm}$, $T = 0.80\text{ s}$

Bestem κ .

$$\text{Løsn: } \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx 0.003 \text{ Nm}$$

ELEKROMAGNETISME

46

OS2 5-15 openstax.org

YF 21-31 Young & Freedman

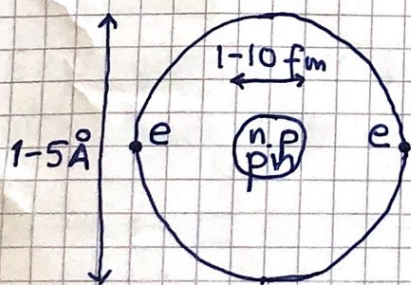
LHL 19-27 Lillestøl, Hunderi & Lien

Elektrostatikk [OS2 5-8 ; YF 21-24 ; LHL 19-20]

Elektrisk Ladning [OS2 5.1 ; YF 21.1 ; LHL 19.1]

Materie består av atomer. Et atom består av en atomkjerne og ett eller flere elektroner. En atomkjerne består av ett eller flere protoner og eventuelt neutroner.

Klassisk atommodell (N. Bohr 1913, NP1922):



$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{ångström})$$

Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
Elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	-e
Proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	+e
Neutron	n	$1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	0

Ladning er kvantisert i enheter av

$$e = \text{elementarladningen} \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Symbol for ladning: q, Q

Enhet: $[q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom med atomnummer Z har Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$

(47)

Ioner: Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

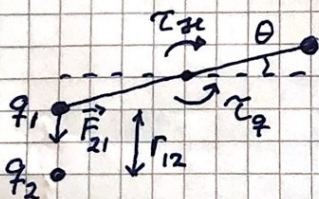
Eks: Cl^- , Na^+ , CO_3^{2-} , NH_4^+

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner

Eks: ^{13}N , ^{14}N , ^{15}N har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z=7$)

Coulombs lov [OS2 5.3; YF 21.3; LHL 19.3]

Coulomb, 1785:

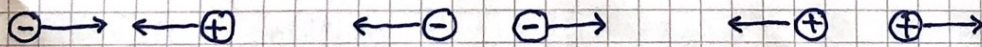


Torsjonspendel sett ovenfra.

Likevekt når $\tau_q = \tau_{el}$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta ; \tau_{el} = \alpha \theta$$

Exp. gav $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$, med tiltrekning mellom ulike typer ladning og frastøtning mellom like typer:



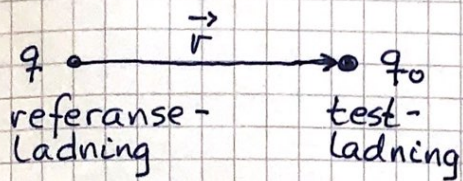
Coulombs lov:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21}$$

Vakuumpemittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5; YF 21.3-21.5; LHL 19.3-19.5] (48)



Kraft fra q på q_0 :

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{El. kraft pr ladningsenhet}$

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0 \quad \text{Enhet: } [E] = \text{N/C}$$

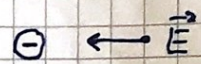
En punktladning q omgir seg med et el. felt

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

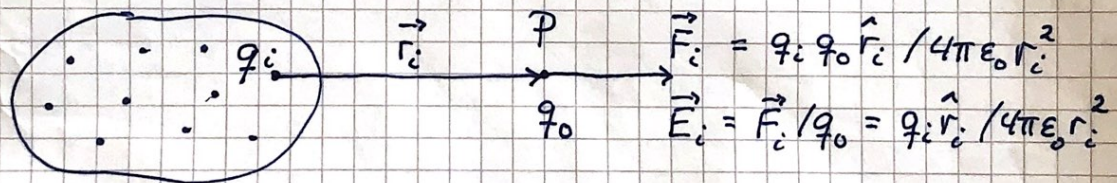
Bort fra $q > 0$:



Inn mot $q < 0$:



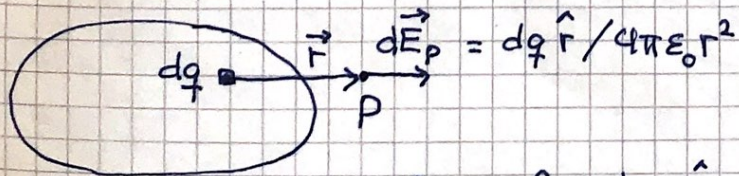
El. felt fra flere ladninger:



El. felt i posisjon P fra ladningene $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}$:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

Med kontinuerlig ladningsfordeling: $q_i \rightarrow dq$; $\sum_i \rightarrow \int$

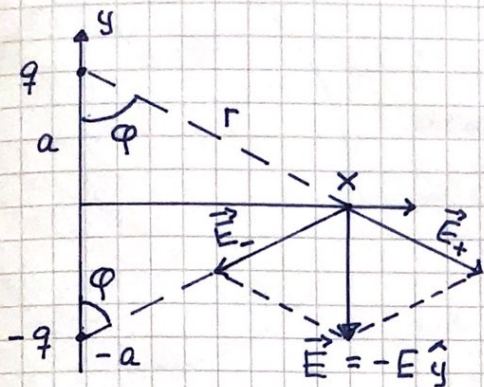


$$\vec{E}_P = \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Enkel elektrisk dipol

(49)

Punktladninger $\pm q$ i $y = \pm a$. Finn \vec{E} på x-aksen.



$$E = 2E_+ \cos \varphi \quad (E_- = E_+)$$

$$\cos \varphi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}$$

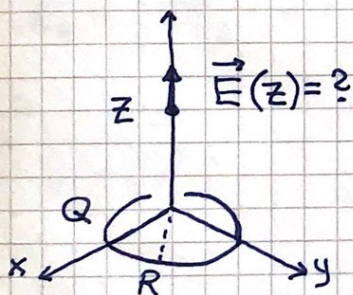
$$E_+ = q/4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Langt unna, $x \approx r \gg a$: $E(r) \sim 1/r^3$

Dvs, E går raskere mot null enn $E \sim 1/r^2$ fra punktladning.

Eks 2: Jevnt ladet ring



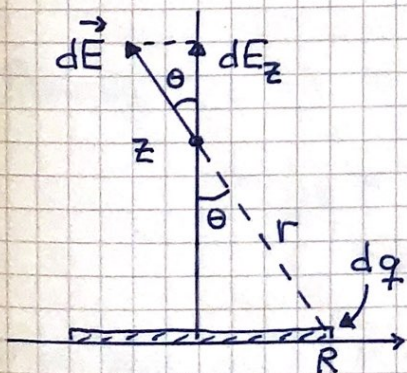
Symmetri $\Rightarrow \vec{E} = E_z \hat{z}$

Bidrag til E_z fra dq :

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq/4\pi\epsilon_0 r^2 ; \quad \cos \theta = z/r$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$



$$\Rightarrow E_z = \int dE_z$$

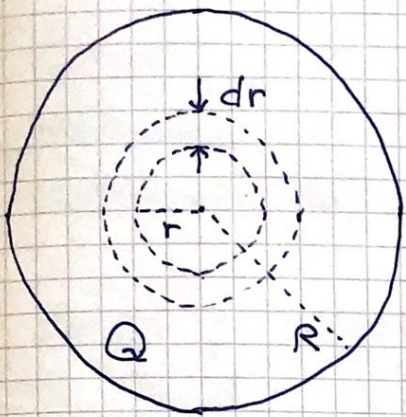
$$= \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq$$

$$= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Rimelig svar: $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$; $E_z(z \gg R) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ } OK!

Eks 3: Jevnt ladet skive

(50)



Kan betraktes som mange tynne ringer med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r \cdot dr$, og dermed ladning $dq = (Q/A)dA = (Q/\pi R^2) \cdot 2\pi r \cdot dr$

Da kjenner vi denne tynne ringens bidrag til feltet på symmetriaksen fra Eks 2 på forrige side.

Med skiva i xy -planet og z -aksen ut av planet:

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

Rimelig: $z \gg R \Rightarrow \frac{z}{z(1 + R^2/z^2)^{1/2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$

$$\Rightarrow E_z \approx Q/4\pi\epsilon_0 z^2, \text{ som punktladning } Q \text{ i origo, OK!}$$

Med stor skive, $R \gg z$: $E_z \approx Q/2\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/2\epsilon_0$

der $\sigma = Q/\pi R^2$ er skivas ladning pr flateenhet.

Med andre ord: Feltet er (tilnærmet) konstant i nærheten av ei jevnt ladet skive.

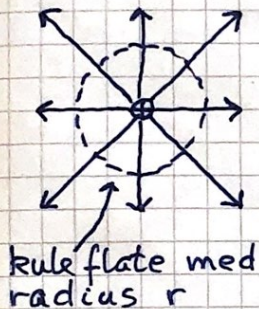
Feltlinjer for \vec{E} [OS2 5.6; YF 21.6; LHL 19.6]

Gir et visuelt bilde av \vec{E} omkring ladningene.

Retning: Feltlinjer $\parallel \vec{E}$

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ er prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning



Feltlinjetetthet i avstand r :

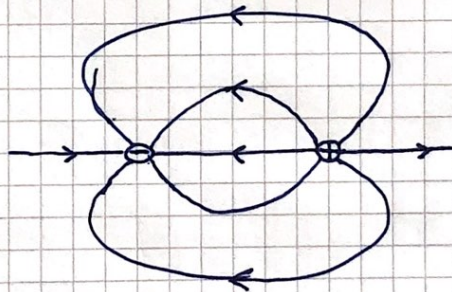
$$N/A = N/4\pi r^2 \sim 1/r^2$$

El. feltstyrke i avstand r :

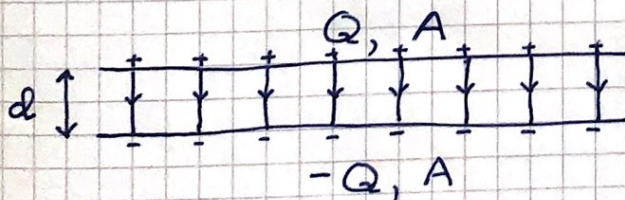
$$E = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \sim 1/r^2$$

OK!

Eks 2: Dipol



Eks 3: Parallellplatekondensator



$$\sigma = Q/A$$

Antar kort avstand d mellom to plater med ladning $\pm Q$ fordelt på areal A . Da er \vec{E} (tilnærmet)

konstant mellom platene, med feltstyrke

$$E = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0, \text{ og } E \approx 0 \text{ utenfor.}$$

(Dette følger av Eks 3 på s. 50.)

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF21.7; LHL 19.10]

Enkel dipol: $-q \quad \vec{d} \quad q$ Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$; $[p] = C \cdot m$

Flere punktladninger q_i i pos. \vec{r}_i : $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Kontinuerlig ladningsfordeling: $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

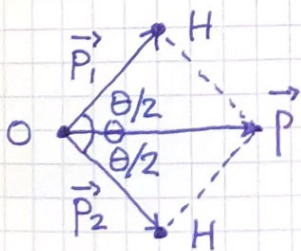
Nettoladning for dipol: $\sum_i q_i = 0$ evt. $\int dq = 0$

Eks 1: Hva er dipolmomentet til det lineære molekylet CO_2 ?

Løsning 1: $\overset{+}{O} = \overset{++}{C} = \overset{-}{O}$ $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \underline{0}$
 $\vec{p}_1 \rightarrow \quad \leftarrow \vec{p}_2$

Eks 2: For H_2O er $d(O-H) = 0.96 \text{ \AA}$, $\theta(H-O-H) = 104.5^\circ$ og fordelingen av elektroner slik at den kan beskrives med punktladninger $+e/3$ på H-atomene og $-2e/3$ på O-atomet. Hva er da dipolmomentet til H_2O ?

Løsning 2:



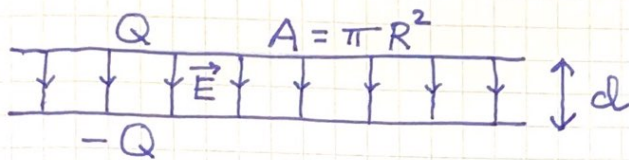
$$p_1 = p_2 = \frac{e}{3} \cdot d$$

$$p = 2p_1 \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} e \cdot d \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0.96 \cdot 10^{-10} m \cdot \cos 52.25^\circ$$
$$\approx \underline{6.3 \cdot 10^{-30} C \cdot m}$$

Med $e \cdot \text{\AA}$ som enhet: $p \approx 0.39 e\text{\AA}$

Eks 3: En platekondensator har plater med radius 10 cm i innbyrdes avstand 1.0 mm. Platene har ladning ± 25 nC jevnt fordelt. Bestem ladning pr flateenhet, elektrisk feltstyrke mellom platene, og kondensatorens dipolmoment.

Løsn 3:



$$\sigma = Q/A = 25 \cdot 10^{-9} \text{ C} / \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2 \approx \underline{8.0 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2}$$

$$E = \sigma/\epsilon_0 \approx \underline{9.0 \cdot 10^4 \text{ N/C}}$$

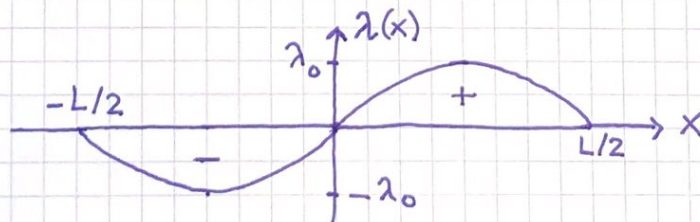
$$p = Q \cdot d = \underline{2.5 \cdot 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}}$$

Eks 4: En dipolantenne med lengde L har ved et gitt tidspunkt en ladning pr lengdeenhet

$$\lambda(x) = \lambda_0 \sin(2\pi x/L)$$

med $x=0$ midt på antenna. Anslå antennes dipolmoment!

Løsn 4:



Vi har omtrent ladninger $\pm \frac{1}{2} \lambda_0 \cdot \frac{1}{2} L$ i innbyrdes avstand $\frac{1}{2} L$, slik at $p \approx \frac{1}{8} \lambda_0 L^2$.

(Eksakt er $p = \lambda_0 L^2 / 2\pi$; se s. 63 fra vår 2023)

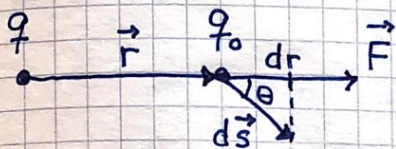
Potensiell energi og elektrisk potensial

(54)

[OS2 7.1-7.2; YF 23.1-23.2; LHL 19.9, 20.3]

Coulombkraften er, som gravitasjonskraften, konservativ.

Pot. energi for ladningspar q og q_0 :



$$\begin{aligned}dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= -F \cdot dr = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \text{endring i pot. energi n\u00e5r} \\ &\text{avstand mellom } q \text{ og } q_0 \text{ endres} \\ &\text{fra } r \text{ til } r+dr\end{aligned}$$

Vi velger $U=0$ n\u00e5r $r \rightarrow \infty$:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{pot. energi for}$$

Ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pot. energi pr ladningsenhet}$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{potensialet som } q$$

omgir seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

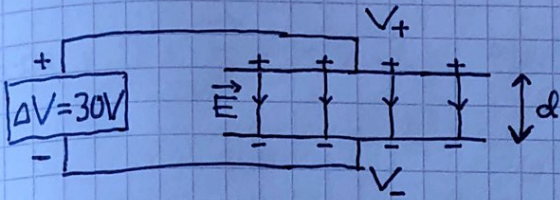
Enhet: $[V] = V$ (volt)

$\Rightarrow [E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)

Energienhet p\u00e5 atom\u00e5r niv\u00e5:

$$1 \text{ eV (elektronvolt)} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks 1: Platekondensator, plateradius 10 cm, plateavstand 1.0 mm



Beregn feltstyrken E mellom platene og ladningen $\pm Q$ på platene

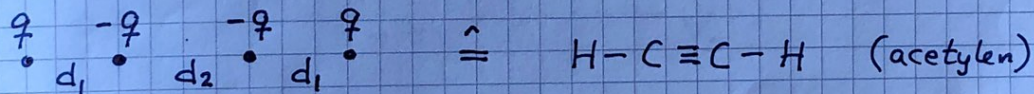
$$\text{Løsning 1: } \Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d$$

$$\Rightarrow E = \Delta V / d = 30 \text{ V} / 10^{-3} \text{ m} = \underline{30 \text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 \Rightarrow Q = \sigma A = \epsilon_0 E \pi R^2 = \underline{8.3 \text{ nC}}$$

Merk: \vec{E} har retning fra pos. mot neg. ladning, og fra høyt mot lavt potensial

Eks 2: Pot. energi U for flere punktladninger



Anta $q = 0.41 e$, $d_1 = 106.0 \text{ pm}$ og $d_2 = 120.3 \text{ pm}$ (klassisk punktladningsmodell for C_2H_2), samt at alle ladningspar bidrar med $U_{ij} = q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}$ til total pot. energi U .

Beregn U i enheten eV.

Løsning 2: Antall unike ladningspar med N punktladninger er

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Her er $N=4$, og de 6 unike ladningsparene har innbyrdes avstander d_1 (2 par), d_2 (1 par), d_1+d_2 (2 par) og $2d_1+d_2$ (1 par).

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_1+d_2} + \frac{1}{2d_1+d_2} \right\} \\ &= -6.3455 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{-4.0 \text{ eV}} \end{aligned}$$

Beregning av \vec{E} fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9]

(56)

Fra s.18: $\vec{F} = -\nabla U$. Med $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$ får vi

$$\vec{E} = -\nabla V$$

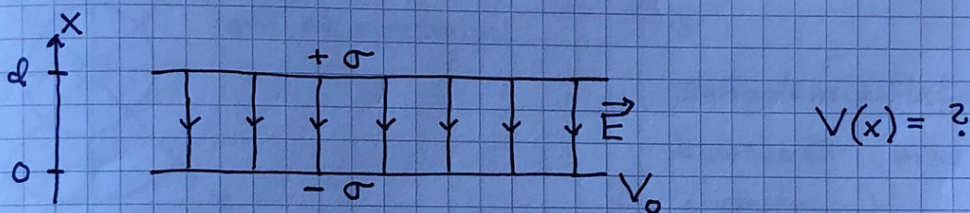
$$V = V(x) \Rightarrow \nabla V = \hat{x} dV/dx \quad (\text{tilsv. for } V(y) \text{ og } V(z))$$

$$V = V(r) \Rightarrow \nabla V = \hat{r} dV/dr$$

Eks 1: Punktladning (i origo)

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} \frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (\text{OK})$$

Eks 2: Plåtekondensator



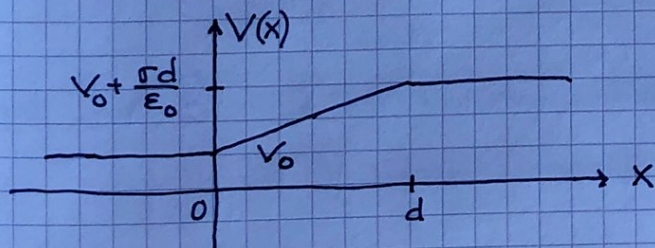
Løsn: Fra før har vi $\vec{E} = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$ mellom platene og $E=0$ utenfor. Siden $\vec{E} = -\hat{x} dV/dx$, må vi ha $V(x) = \text{konstant}$ utenfor platene og

$$V(x) = \sigma x/\epsilon_0 + V(0) = \sigma x/\epsilon_0 + V_0 \quad \text{mellom platene}$$

$V(x)$ må videre være kontinuerlig, slik at

$$V(x) = V_0 \quad \text{for } x \leq 0 \quad \text{og}$$

$$V(x) = V_0 + \sigma d/\epsilon_0 \quad \text{for } x \geq d$$



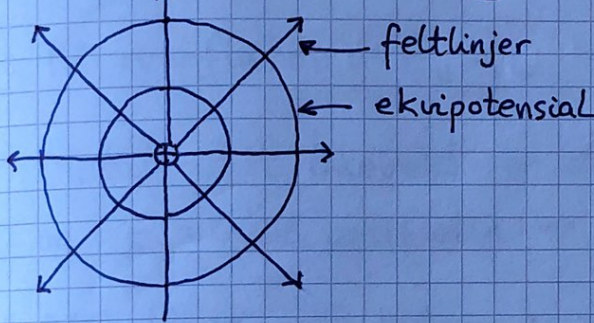
Ekvipotensialer [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

Et ekvipotensial er et område (linje, flate eller volum) der potensialet er konstant.

La $d\vec{s}$ være en liten forflytning på en ekvipotensialflate, slik at $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

Vi innser da at $\vec{E} \perp d\vec{s}$, dvs \vec{E} står normalt på en ekvipotensialflate.

Eks 1 : Punktladning

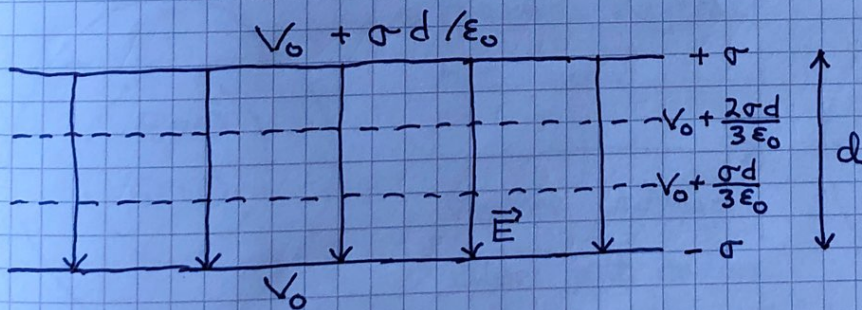


\vec{E} har retning radieelt



ekvipotensialflatene er kuleskall (med ladningen i sentrum)

Eks 2: Platekondensator



uniformt felt $\vec{E} \Rightarrow$ ekvipotensialflatene er plan normalt på \vec{E}

Materialers elektriske egenskaper

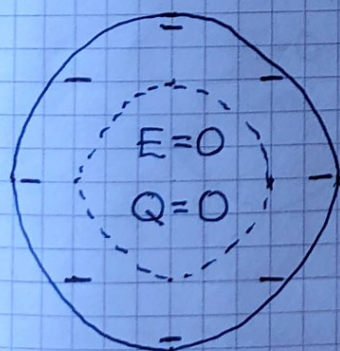
(58)

Ledere (Metaller) [OS2 7.5 (6.4); YF 22.5; LHL 19.8]

Har frie elektroner, typisk 1 eller 2 pr atom. Disse frie ladningene vil settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$, pga N2: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$. Dermed, for et metall i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inni et metall.
- All nettoladning ligger på overflaten.
- På overflaten: $E_{\parallel} = 0$, $E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ($\sigma = Q/A$)
- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial: $E = 0$ inni og $E_{\parallel} = 0$ på overflaten $\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ for alle $d\vec{s}$
- Metallbit med hulrom: $E = 0$ i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

Bevis:

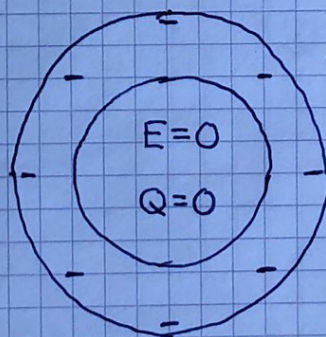


Kompakt metallbit

Fjerner nøytral bit inni.

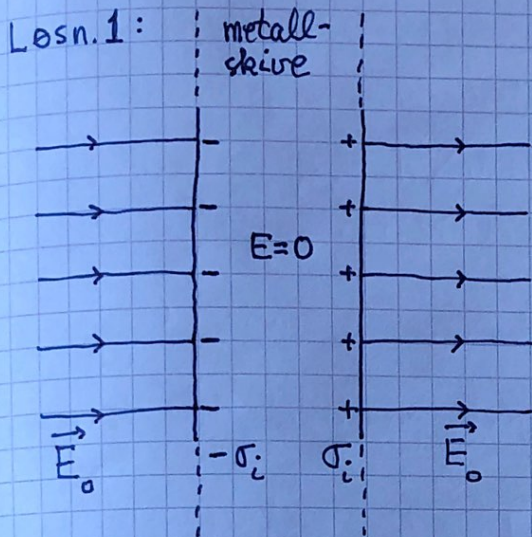


Verken ladning eller felt endres.



Metallbit med hulrom

Eks 1: Bestem industert overflateledning $\pm \sigma_i$ på ei metallskive i et uniformt ytre felt $E_0 = 1.0 \text{ kV/m}$.



Ytre felt: \vec{E}_0

Felt pga $\pm \sigma_i$: \vec{E}_i

$$E_i = \begin{cases} \sigma_i / \epsilon_0 & \text{inni skiva} \\ 0 & \text{utenfor} \end{cases}$$

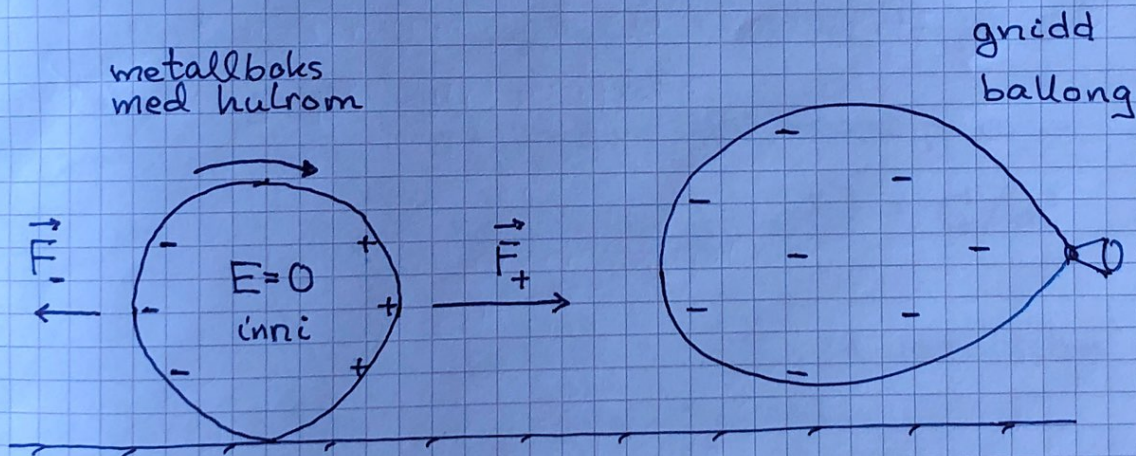
Totalt felt inni skiva:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$$

$$\Rightarrow E_i = E_0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \epsilon_0 E_0 = \underline{8.85 \text{ nC/m}^2}$$

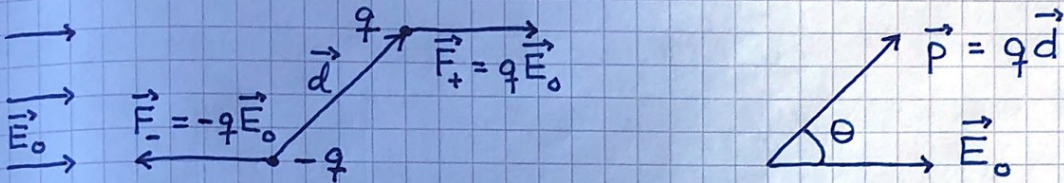
Eks 2: Faraday bur



Netto tiltrekning pga kortest avstand mellom ballongens negative ladning og boksens positive ladning.

Isolator (Dielektrikum) [OS2 8.5; YF 24.4-24.5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner. Har bundet ladning som gir polarisering i et ytre felt \vec{E}_0 . Ser på molekylær dipol:



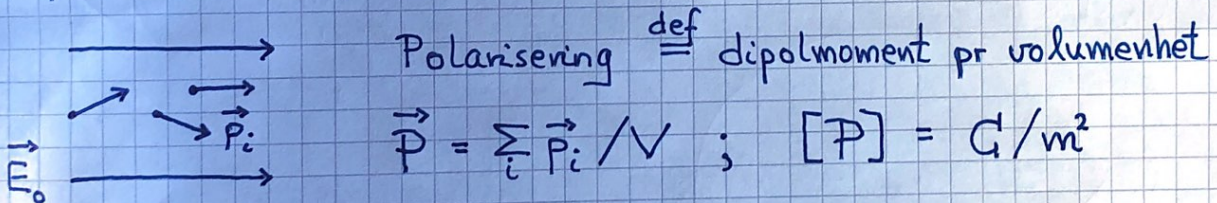
Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$; inn i planet

$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

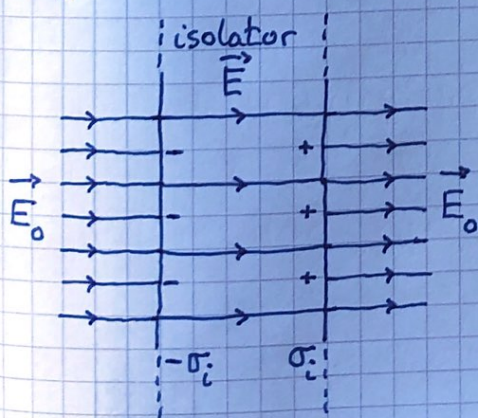
Dipolens pot. energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$

Oppsummert: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$; $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$

Isolatorens molekylære dipoler orienterer seg med dipolmomentet \vec{p} i samme retning som det ytre feltet \vec{E}_0 :



Nettoeffekt: Indusert ladning $\pm\sigma_i$ på overflaten og dermed et svekket felt inni isolatoren.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$E = E_0 - E_i < E_0$$

Lineær respons:

E_i prop. med E_0

$$\Rightarrow E \text{ --- } E_0$$

Isolatorens relative permittivitet:

$$\epsilon_r = E_0 / E \Rightarrow E = E_0 / \epsilon_r$$

	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

(61)

Isolatorens permittivitet : $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Eks 1: Hva er feltstyrken i avstand 1.0 mm fra et ion med ladning $+2e$ inni en isolator med $\epsilon_r = 5.7$?

Løsning 1: $E = E_0 / \epsilon_r = Q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2 = Q / 4\pi \epsilon r^2$
 $= \{ 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / 5.7 \cdot 10^{-6} \} \text{ V/m} = \underline{0.51 \text{ mV/m}}$

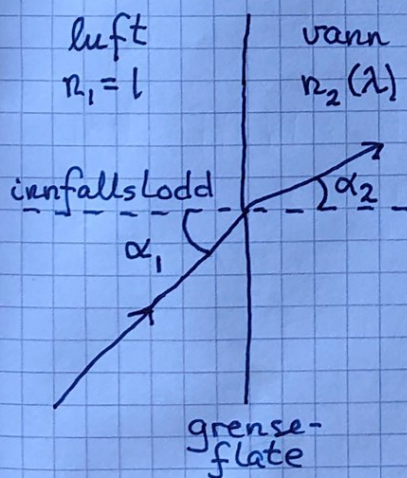
Eks 2: Hva er farten til synlig lys i vann?

Løsning 2: $v = c/n$, der $n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)}$ er brytningsindeksen.

For synlig lys, $\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$, er $n \approx 1.3$ for vann (dvs $\epsilon_r \approx 1.7$) slik at $v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} / 1.3 \approx \underline{2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$.

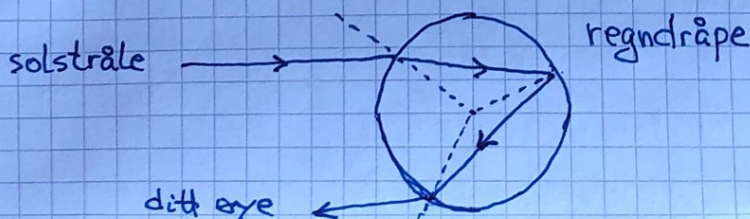
Eks 3: Hvordan oppstår regnbuen?

Løsning 3: En lysstråle endrer retning (brytes) når den passerer en grenseflate mellom to dielektrika med ulik brytningsindeks. Snells lov: $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$



$$\Rightarrow \alpha_2(\lambda) = \arcsin \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{n_2(\lambda)} \right\}$$

λ (nm)	n_2	farge
400	1.345	fiolett
450	1.341	blå (← indigo)
525	1.337	grønn
575	1.335	gul
600	1.334	oransje
700	1.331	rød



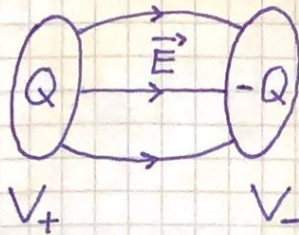
Kondensator. Kapasitans

[0528; YF24; LHL20]

(62)

To adskilte ledere = en kondensator (capacitor)

Ladning $\pm Q$ på lederne \Rightarrow felt \vec{E}



Coulombs lov $\Rightarrow E$ prop. med Q

\Rightarrow potensialforskjellen (spenningen)

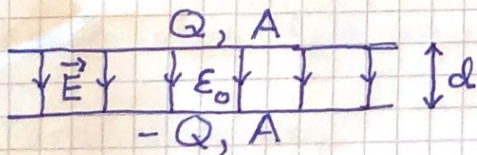
$V = V_+ - V_-$ prop. med Q

Kondensatorens kapasitans (capacitance):

$$C = Q/V \quad ; \quad [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Kretssymbol:

Eks: Platekondensator



$$E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$$

$$V = E \cdot d = Qd/A\epsilon_0$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 A/d$$

Med $d = 10^{-3} \text{ m}$, $A = \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2$: $C = 0.28 \text{ nF}$

Dielektrikum mellom platene øker kapasitansen:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma/\epsilon = Q/A\epsilon_r\epsilon_0 = V/d$$

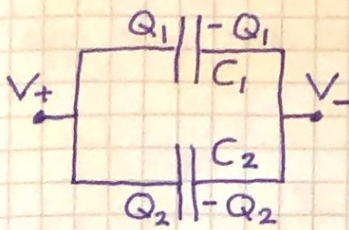
$$\Rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d, \text{ økt med en faktor } \epsilon_r$$

Enhet for permittivitet:

$$[\epsilon] = [C \cdot d/A] = F/m$$

Kobling av kapasitanser [OS2 8.2; YF 24.2; LHL 20.2] (63)

Parallellkobling: Lik spenning $V = V_+ - V_- = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$



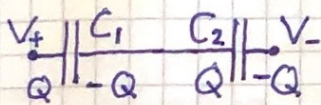
over C_1 og C_2 , som lagrer total

ladning $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$,

slik at total kapasitans blir

$$C = Q/V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



Lik ladning $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$ på C_1 og C_2 , og total spenning $V = V_1 + V_2$ betyr

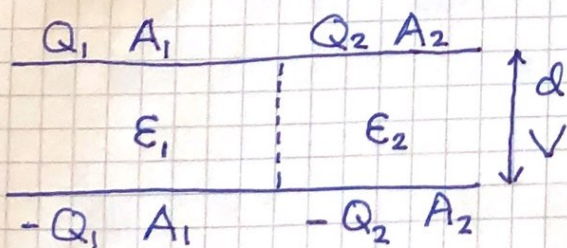
at total kapasitans C er gitt ved

$$V = V_+ - V_- \quad \frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

N kapasitanser i parallell: $C = \sum_{j=1}^N C_j$; i serie: $\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j}$

Kondensator fylt med ulike dielektrika:

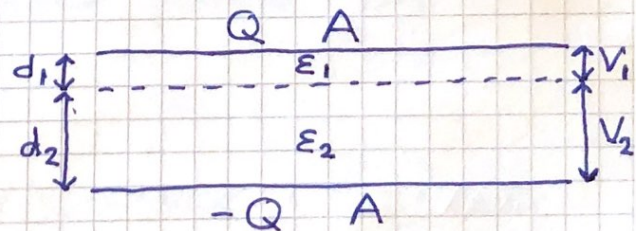
Parallellkobling



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

Seriekobling



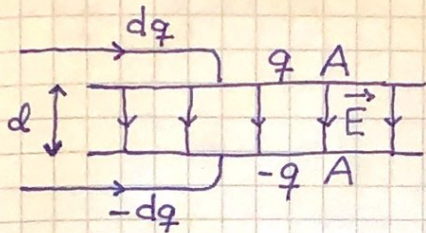
$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

Energi i \vec{E} -felt [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

64

Opplading av en kondensator krever et arbeid, som ender opp som pot. energi lagret i \vec{E} -feltet mellom platene.



$v(q) = q/C =$ pot. forskjell mellom platene med ladning $\pm q$;
økning til ladning $\pm (q+dq)$ øker den potensielle energien med
 $dU = v(q) dq = q dq / C$

\Rightarrow Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir total pot. energi :

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Bruker $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = E \cdot d$ og får

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

Her er $A \cdot d$ volumet mellom platene, der vi har $E \neq 0$. Dermed :

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenhet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

som gjelder generelt.

Eks: Beregn energitettheten i feltet mellom platene når $d = 1.0 \text{ mm}$ og $V = 1.0 \text{ kV}$.

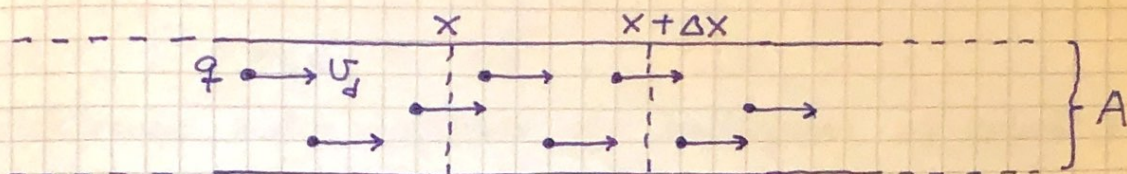
$$\text{Løsn: } u_E = 0.5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (1000/0.001)^2 \text{ J/m}^3 = \underline{4.4 \text{ J/m}^3}$$

Elektrisk strøm [052 9,10; YF 25,26; LHL 21,22]

(65)

Strøm og strømtetthet [052 9.1,9.2; YF 25.1; LHL 21.1]

Ser på leder med tverrsnitt A , med n frie ladninger q pr volumenet som har midlere driftshastighet v_d langs lederen:



strøm $\stackrel{\text{def}}{=} \text{mengden ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet}$

$$I = \Delta Q / \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} dQ/dt ; [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

I løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer alle frie ladninger, dvs ladningsmengden $q n A \Delta x$ i volumet $A \Delta x$, tverrsnittet ved $x + \Delta x$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{strøm pr flateenhet}$

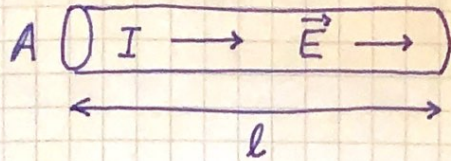
$$j = I/A = n q v_d \Rightarrow \vec{j} = n q \vec{v}_d ; [j] = A/m^2$$

I metall er de frie ladningene elektroner med $q = -e$, slik at $\vec{j} = -n e \vec{v}_d$

—————
—————→ elektrisk strøm
←————
————— elektronstrøm

Ohms lov [OS2 9.2-9.4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4] (66)

Anta spenning V over leder med lengde l og tverrsnitt A (og som er del av en lukket krets):



$$V = E \cdot l ; j = I/A$$

$$N2 : \vec{F} = m_e \vec{a} = -e \vec{E}$$

Elektronene møter motstand pga kollisjoner og oppnår en midlere driftshastighet $\vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau$, der τ er midlere tid mellom kollisjoner. Dermed:

$$\vec{j} = -ne \vec{v}_d = -ne \cdot (-e \vec{E} / m_e) \cdot \tau = \sigma \cdot \vec{E}$$

med $\sigma = ne^2 \tau / m_e =$ materialets elektriske ledningsevne (= konduktivitet). Dette er P. Drudes modell (ca 1900) for Ohms lov, på mikroskopisk form. Med $j = I/A$ og $E = V/l$ får vi Ohms lov på makroskopisk form:

$$V = R \cdot I ; R = l / \sigma A = \text{lederens motstand (resistans)}$$

Lederens konduktans: $G = R^{-1} \Rightarrow I = G \cdot V ; G = \sigma A / l$

Materialets resistivitet: $\rho = \sigma^{-1} \Rightarrow \vec{j} = \vec{E} / \rho$

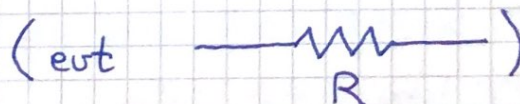
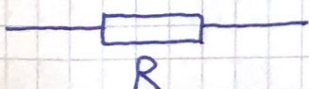
Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm)

$[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

$[\rho] = \Omega \cdot m$

$[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$

Kretssymbol:



Eks: Anslå ledningsevnen til kobber.

(67)

Løsn: Siden $\sigma = ne^2\tau/m_e$, trenger vi estimater for n og τ . Kobber har molar masse 63 g/mol og massetetthet ca 9 g/cm³, og vi antar 1 fritt elektron pr atom

$$\Rightarrow n \approx \frac{9 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3}{63 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ elektroner/mol} \approx 10^{29} \frac{\text{elektroner}}{\text{m}^3}$$

Midlere tid mellom kollisjoner: $\tau = d/v_T$

Midlere lengde mellom kollisjoner: $d \approx 1 \text{ nm}$

Midlere elektronfart: Kinetisk energi pr partikkel i elektrongassen er prop. med absolutt temperatur T ,

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T ; k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = \text{Boltzmanns konstant}$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T/m_e} \approx 10^5 \text{ m/s ved romtemp. (ca 300K)}$$

Dermed: $\tau \approx 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 10^{-14} \text{ s}$

slik at $n \cdot \tau \approx 10^{15} \text{ s/m}^3$.

Videre er $e^2/m_e = 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2/\text{kg}$ slik at ledningsevnen til kobber er ca $\sigma \approx 3 \cdot 10^7 \text{ S/m}$.

Ekspenimentelt er $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$.

Hvis $A = 2.5 \text{ mm}^2$ og $I = 1.0 \text{ A}$ blir driftshastigheten

$$v_d = j/ne = I/neA \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$g(T)$ [OS 29.3; YF 25.2; LHL 21.2, 21.5]

Metall: Økt $T \Rightarrow$ kortere tid τ mellom kollisjoner $\Rightarrow g$ øker

Exp: $g(T) = g_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$; $\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$

$g_0 = g(T_0)$ ved referansetemp. f.eks 293 K (20°C)

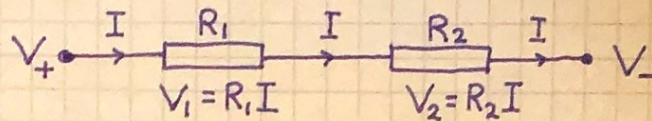
Halvleder (Si, Ge, GaAs, ...): Isolator, $n \approx 0$ ved $T = 0 \text{ K}$.

Økt $T \Rightarrow n$ øker $\Rightarrow g$ øker

Anvendelser: Diode, transistor, solcelle osv

Kobling av motstander [OS2 10.2; YF 26.1; LHL 21.3]

(68)

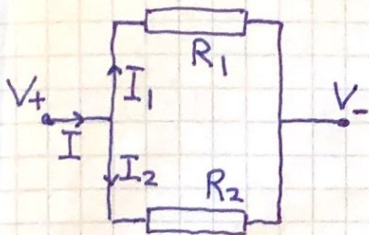
Seriekobling: 

Lik strøm I gjennom motstander i serie

Total spenning: $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)I$

$$\Rightarrow R = V/I = R_1 + R_2$$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2 :

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Total strøm: $I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R}$

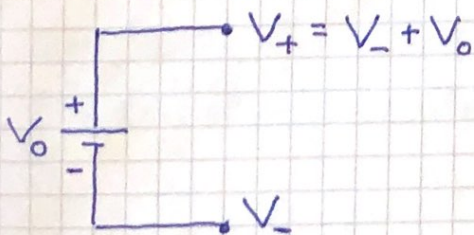
$$\Rightarrow R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

Med N i serie: $R = \sum_{j=1}^N R_j$; i parallell: $R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}$

DC-kretser [OS2 10 (9); YF 26 (25); LHL 22]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning $V_+ - V_- = V_0$ mellom polene.

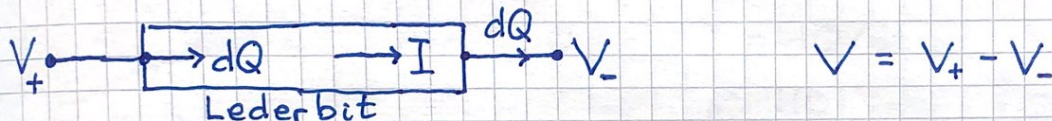
Eks: Kjemisk batteri. Solcelle.
Mobillader.

Kirchhoffs regler [OS2 10.3; YF 26.2; LHL 22.3]

(69)

- K1: Pga ladningsbevarelse er netto strøm inn mot og ut av et knutepunkt like store, $\sum_j I_j = 0$.
Fortegn: $I_j > 0$ inn, $I_j < 0$ ut (eller omvendt)
- K2: Pga energibevarelse er summen av potensialendringer rundt en lukket sløyfe null, $\sum_j V_j = 0$.
Fortegn: $V_j > 0$ for potensialøkning (eller omvendt)

Elektrisk effekt [OS2 9.5; YF 25.5; LHL 22.2]



$$\text{Effekt inn: } P_{\text{inn}} = dU_{\text{inn}}/dt = V_+ dQ/dt = V_+ I$$

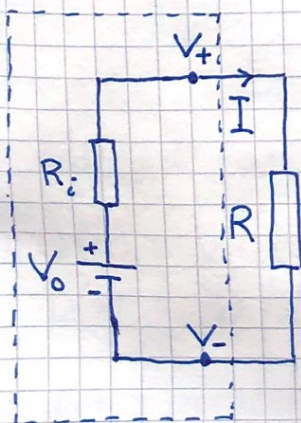
$$\text{---"--- ut: } P_{\text{ut}} = dU_{\text{ut}}/dt = V_- dQ/dt = V_- I$$

$$\text{Effekttap i lederbiten: } P = P_{\text{inn}} - P_{\text{ut}} = (V_+ - V_-) \cdot I = \underline{V \cdot I}$$

$$\text{Hvis ohmsk motstand: } V = RI \Rightarrow P = VI = RI^2 = V^2/R$$

Eksempler:

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde



$$K2: V_0 - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

R_i = indre motstand i reell spenningskilde

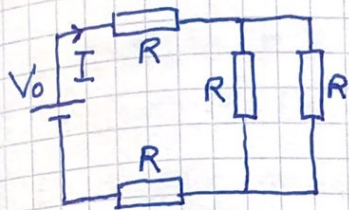
$R_i = 0$ i ideell spenningskilde

Potensialspenning:

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < 0 \text{ n\u00e5r } R_i \gg 0 \\ (\text{og } I > 0)$$

Eks 2: Hva er total motstand?

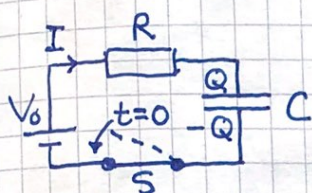
(70)



$$R_{\text{tot}} = R + (R^{-1} + R^{-1})^{-1} + R = \underline{\underline{5R/2}}$$

$$(\Rightarrow I = 2V_0/5R)$$

Eks 3: RC-krets [OS2 10.5; YF 26.4; LHL 22.4]



Bestem $Q(t)$ og $I(t)$ når bryteren S lukkes ved $t=0$ og $Q(t=0) = 0$, for

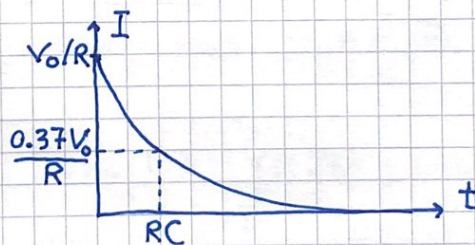
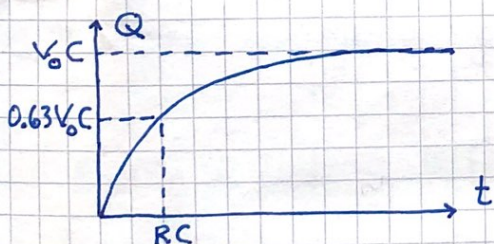
(a) $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$; (b) $R = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$

$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - Q/C = 0 ; I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow RC \frac{dQ}{dt} = V_0 C - Q \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -t/RC$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \{1 - e^{-t/RC}\} ; I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



$\tau = RC =$ kretsens tidskonstant = et mål for hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren

$$Q(\tau) = V_0 C (1 - e^{-1}) \approx 0.63 V_0 C ; Q(3\tau) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-1} \approx 0.37 V_0/R ; I(3\tau) \approx 0.05 V_0/R$$

$$(a) \tau = 100 \Omega \cdot 10^{-7} \text{ F} = 10^{-5} \text{ s}$$

$$(b) \tau = 10^6 \Omega \cdot 10^{-6} \text{ F} = 1 \text{ s}$$

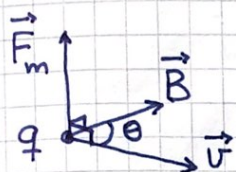
Magnetostatikk [OS2 11,12; YF 27,28; LHL 23]

(71)

Magnetisk kraft [OS2 11.2; YF 27.2; LHL 23.4]

En strøm I (og magneter) omgir seg med et magnetfelt \vec{B} .

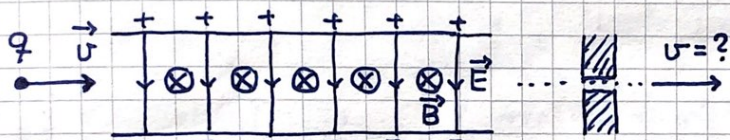
En ladning q med fart \vec{v} i et magnetfelt \vec{B} påvirkes av en magnetisk kraft:



$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} ; F_m = q v B \sin \theta$$
$$\vec{F}_m \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

Enhet: $[B] = T$ (tesla); $1T = 10^4 G$ (gauss)

Eks: Krysset \vec{E} og \vec{B}



Notasjon:

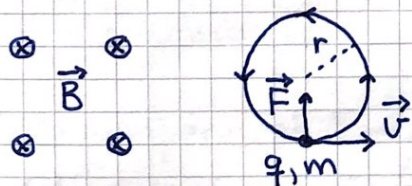
\otimes inn i planet
 \odot ut av —"

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

Hvis f.eks. $q > 0$, peker \vec{F}_e ned og \vec{F}_m opp

\Rightarrow Ingen avbøyning for partikler med $v = E/B$. (Fartfilter!)

Ladning i uniformt \vec{B} -felt [OS2 11.3; YF 27.4; LHL 23.1, 23.4]



Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$ (det er bare v_{\perp} som påvirkes av \vec{B})

$$\Rightarrow F = q v B$$

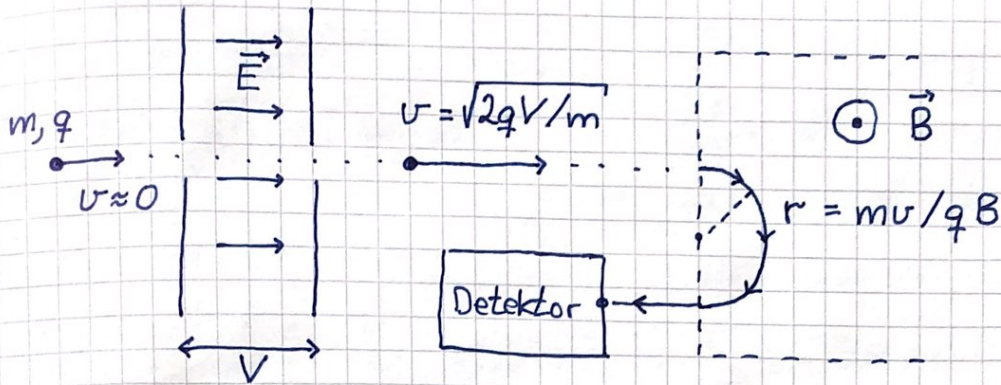
$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ Magnetisk kraft gjør aldri arbeid.

\Rightarrow uniform sirkelbevegelse med konstant $K = \frac{1}{2} m v^2$
(spiralbane hvis \vec{v} har komponent v_{\parallel} langs \vec{B})

$$N2: q v B = m v^2 / r \Rightarrow r = m v / q B$$

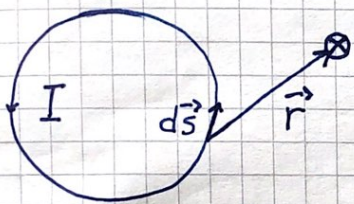
$$\Rightarrow \omega_c = v / r = q B / m = \text{syklotronfrekvensen}$$

Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; YF 27.5; Øving 12] (72)



$\Rightarrow r = \sqrt{2Vm/q} \cdot B^{-1} \Rightarrow$ kan separere isotoper og
identifisere hva slags ioner man har

Biot-Savarts Lov [OS2 12.1; YF 28.2; LHL 23.5]



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \text{magnetfelt}$$

i avstand \vec{r} fra lederbit $d\vec{s}$
i strømsløyfe med strøm I

Totalt magnetfelt fra hele strømsløyfa:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot-Savarts lov (1820)}$$

Jf. Coulombs lov: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$

Vakuump permeabiliteten: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$

Vakuump permittiviteten: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Farten til E.M. bølger i vakuum: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Lysfarten i materiale med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

og permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$: $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

Med unntak av noen få ferromagnetiske materialer er $\mu_r \approx 1$
slik at $v = c/n$ med $n = \sqrt{\epsilon_r}$ = materialets brytningsindeks

Tre sentrale eksempler (se notat for utledningene)

(73)

[OS2 12.2+4+6; YF 28.3+5+7; LHL 23.5+6]

1. Lang rett strømførende leder:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \text{ dvs retning}$$



tangentielt til sirkel med lederen i sentrum.

HHR: Tommel langs I
gir fire øyngre fingre langs \vec{B}

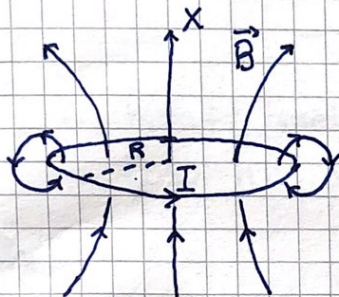
2. Sirkulær strømsløyfe:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

på sløyfas akse (her: x-aksen)

R = sløyfas radius.

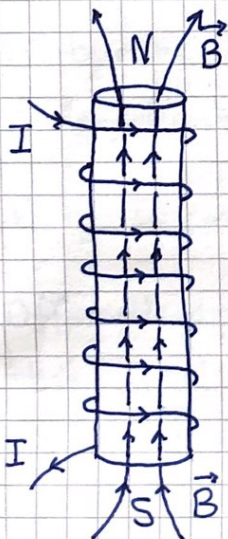
HHR: Fire fingre langs I
gir tommel langs \vec{B} på sløyfas akse.



3. Spole:

Antar ideell spole, dvs lang og tettviklet.

Med N viklinger på en lengde l og spolestrøm I:



Inni spolen: Uniformt felt med feltstyrke $B = \mu_0 n I$, der

$n = N/l =$ antall viklinger pr lengdeenhet

Utenfor spolen: $B \approx 0$

(unntatt ved endene av spolen)

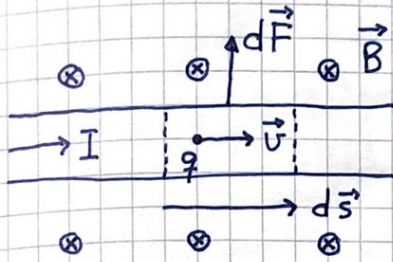
HHR som for enkel strømsløyfe.

\vec{B} inni spolen fra sørpol S mot nordpol N.

Elektromagnet

Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4; YF 27.6; LHL 23.2]

74



$d\vec{F} = N \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$ = kraft på de
 N frie ladningene q med midlere
 driftshastighet \vec{v} langs lederen;
 $N = \#$ frie ladn. på lengden ds

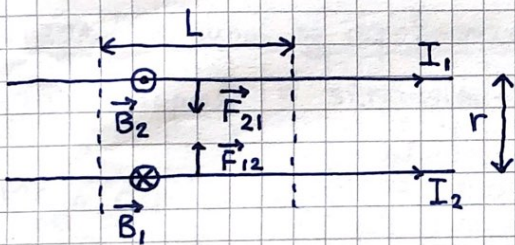
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft på hele lederen: $\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$

Rettleider, lengde L i uniformt \vec{B} -felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom to parallelle strømmer

[OS2 11.4; YF 28.4; LHL 23.5]



$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi r}$ = feltstyrke
 i avstand r fra leder 1, 2.

Innbyrdes kraft på lengde L : $F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$

Pr lengdeenhet: $f = F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi r$

I_1 og I_2 motsatt vei \Rightarrow frastøtende innbyrdes kraft

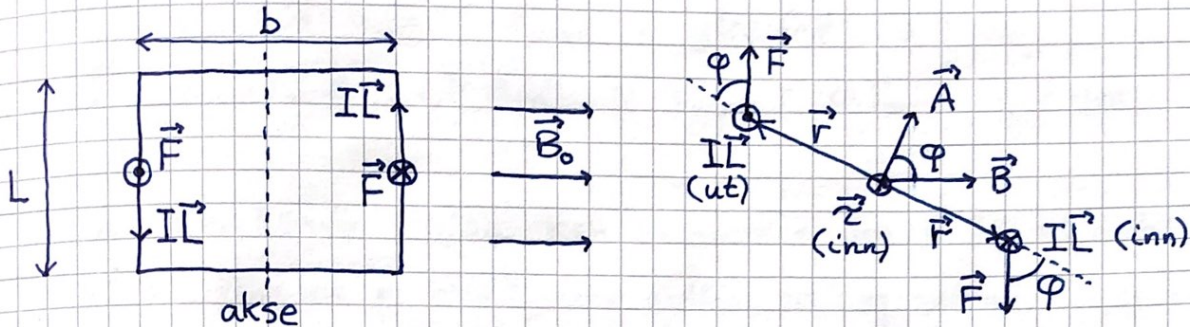
Offisiell definisjon av enheten ampere (inntil 20.05.2019):

Hvis $I_1 = I_2$ og $r = 1\text{m}$ gir $f = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$,

da er $I_1 = I_2 = 1\text{A}$.

Eks 2: Dreiemoment på strømsløyfe i ytre \vec{B}_0 -felt

(75)



$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}_0; \quad \vec{B}_0 \perp \vec{L} \Rightarrow F = ILB_0$$

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n} = b \cdot L \cdot \hat{n}; \quad \hat{n} = \text{enhetsvektor } \perp \text{ strømsløyfa}$$

$$|\vec{\tau}| = |\sum \vec{r} \times \vec{F}| = |2 \vec{r} \times \vec{F}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\varphi = IAB_0 \sin\varphi$$

$$= |I\vec{A} \times \vec{B}_0|, \quad \text{dvs } \vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}_0$$

Dersom spole med N viklinger: $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}_0$

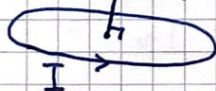
Dette er prinsippet for en likestrømsmotor (DC-motor).

Magnetisk dipol og dipolmoment [os2 11.5; YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

Magn. dipol = strømsløyfe (evt spole med N viklinger)

Magn. dipolmoment $\stackrel{\text{def}}{=}$ produktet mellom strøm og omsluttet areal

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n}; \quad \text{HHR gir retning på } \vec{A}$$

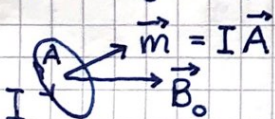


$$\vec{m} = I\vec{A} = \text{strømsløyfas magn. dipolmoment}$$

$$\text{Spole med N viklinger: } \vec{m} = NI\vec{A}$$

$$[\text{m}] = \text{A} \cdot \text{m}^2$$

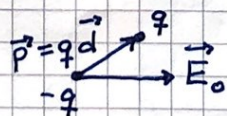
\vec{m} i ytre felt \vec{B}_0 :



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

\vec{p} i ytre felt \vec{E}_0 :



$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Eks 1: Spole, $N = 3200$, $A = 4.0 \text{ cm}^2$, $I = 1.5 \text{ A}$.

(76)

$m = |\vec{m}| = ?$ τ_{max} i ytre felt 1.5 T ?

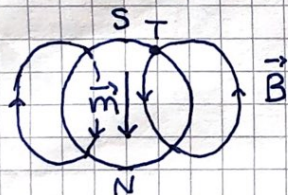
Løsn 1: $m = NIA = 1.9 \text{ Am}^2$; $\tau_{\text{max}} = mB_0 = 2.9 \text{ Nm}$

Eks 2: En Skoda Enyaq kan akselerere fra 0 til 62 mph på 6.9 s. Hva må μ_s minst være mellom dekk og veibane?

Løsn 2: Antar ren rulling (dvs hjula spinner ikke), firehjulsdrift og ingen kraft nedover pga luftstrøm over og under bilen. Dermed: $\mu_s mg \geq ma \Rightarrow \mu_s \geq a/g$ med $a = (62 \cdot 1.6/3.6) \text{ m/s} / 6.9 \text{ s} = 4.0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \mu_s \geq 0.41$

Eks 3: \vec{B} i Trondheim (63.45° N , 10.42° Ø)

Jorda som magnetisk dipol:



$$m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

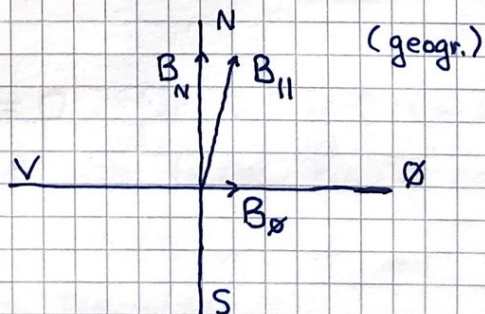
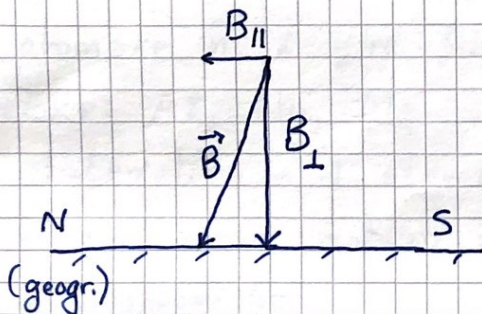
(Magn. N, nær geogr. S, kalles som regel magn. S)

Trondheim mars 2024 (World Magnetic Model)

$$B = |\vec{B}| = 52.21 \mu\text{T}; \quad dB/dt = 47.9 \text{ nT/år}$$

$$B_{\perp} = 50.42 \mu\text{T}; \quad B_{\parallel} = 13.57 \mu\text{T}$$

$$B_N = 13.52 \mu\text{T}; \quad B_{\text{Ø}} = 1.15 \mu\text{T}$$

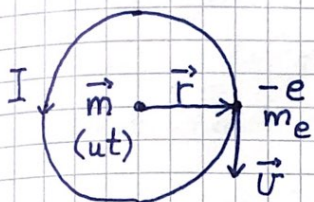


De magn. polene flytter seg flere km pr år.

Magnetisme [OS2 12.7; YF 28.8; LHL 26.1-26.6]

(77)

Atomær magnetisk dipol:



$$I = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}; \quad A = \pi r^2$$

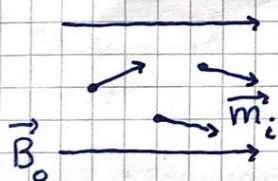
$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} evr \quad \left. \begin{array}{l} \\ L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{eL}{2m_e}$$

Kvantemekanikk viser at dreieimpuls L og spin S for elektroner og andre elementærpartikler er av størrelsesorden $\hbar = h/2\pi$, med $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant.

Dermed er atomer små magnetiske dipoler med dipolmoment av størrelsesorden

$$\mu_B = e\hbar/2m_e \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

(Noen atomer har $\vec{m} = 0$.) I et ytre felt \vec{B}_0 virker dreiemomentet $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$, som gir tendens til innretting av \vec{m} langs \vec{B}_0 :



Materialets magnetisering $\stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment}$

pr volumenhett

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V; \quad [M] = \text{A/m}$$

[Jf. polarisering \vec{P} , s. 60]

De aller fleste materialer får ubetydelig innretting av atomære \vec{m} i ytre felt \vec{B}_0 og er paramagnetiske.

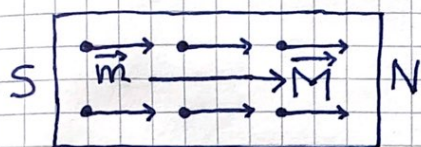
Eks: Al, Na, Mg...

Materialer med atomære $\vec{m} = 0$ får induisert en svak magnetisering motsatt rettet det ytre feltet \vec{B}_0 og er diamagnetiske.

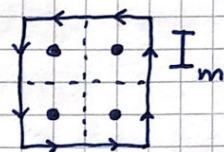
Eks: Cu, Au, Hg... og vann, tre, plast.

Noen få grunnstoffer (Fe, Ni, Co, Gd) og endel (78) legeringer (f.eks. $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, neodym-magnet) har atomer som vekselvirker med sine nærmeste naboatomer slik at alle atomære \vec{m} i samme retning blir mest stabilt (dvs lavest energi); materialet er ferromagnetisk.

Permanentmagnet: Parallele \vec{m} i hele materialet.

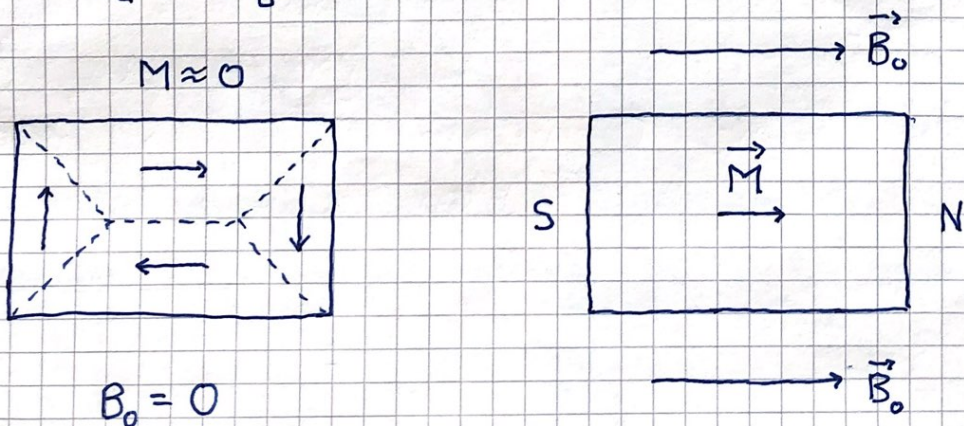


Sett forfra:
(med N ut av planet)



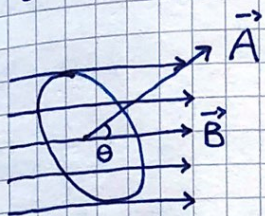
Får makroskopisk, bundet magnetiseringsstrøm I_m i overflaten, mens indre strømmer kansellerer.
(Jf. induert overflateledning på isolator i ytre felt \vec{E}_0 .)

Umagnetisk ferromagnet (f.eks. stål): Har mange små domener (områder med lineær størrelse 1-100 μm). Alle atomære \vec{m} peker i samme retning og gir magnetisering \vec{M}_d i et gitt domene, men ulike domener har \vec{M}_d i ulike retninger, slik at total magnetisering blir $\vec{M} = \sum_d \vec{M}_d \approx 0$. Materialet er umagnetisk, men blir magnetisk i et ytre felt \vec{B}_0 pga innretting av de ulike \vec{M}_d langs \vec{B}_0 :



Elektrodynamikk [OS2 13-15; YF 29-31; LHL 24,25,27] (80)

Magnetisk fluks [OS2 13.1; YF 27.3; LHL 23.7]

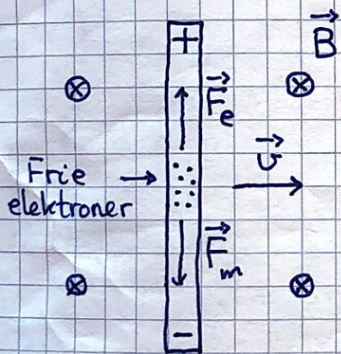


$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta = \text{magn. fluks}$
gjennom flate med areal A og vinkel θ mellom \vec{B} og \vec{A}

Generelt: $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ Enhet: $[\Phi] = T \cdot m^2 = \text{Wb (weber)}$

Faradays induksjonslov [OS2 13.1; YF 29.1-4; LHL 24.1]

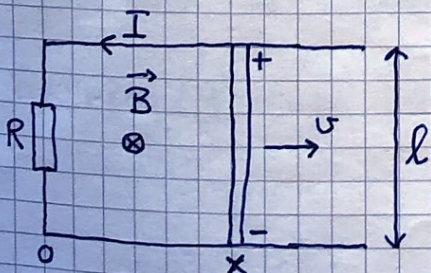
Ser på leder med lengde l som trekkes med fart \vec{v} gjennom et uniformt felt \vec{B} :



Pga $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ på frie elektroner i ledere induseres neg. ladn. nederst og pos. ladn. øverst, og dermed et el. felt \vec{E} rettet nedover, med en tilhørende spenning (pot. forskjell) $\Delta V = E \cdot l$ over ledere.

Likevekt (dynamisk) når $F_e = F_m \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$
 $\Rightarrow \Delta V = vBl$

Vi lager en lukket krets; og skriver om ΔV :



$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (xBl)$$
$$= \frac{d}{dt} (B \cdot A) = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{d\Phi}{dt}$$

Faradays induksjonslov: Endringen i omsluttet magn. fluks pr tidsenhet tilsvarer industert spenning i en lukket sløyfe,

$$\Delta V = -d\Phi/dt$$

Lenz' lov [052 13.2; YF 29.3; LHL 24.1]

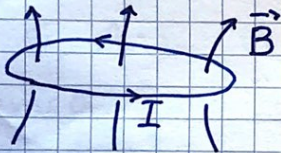
(81)

Den induerte strømmen I skaper et magnetfelt \vec{B}_I med tilhørende omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ som motvirker den påtvungne fluksendringen $\Delta\Phi$.

Eks: I fig. s. 80 påtvinges en økning $\Delta\Phi = B \cdot \Delta A$ inn i planet. Da går induert strøm I mot klokka slik at tilhørende omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ er positiv ut av planet.

Induktans og induksjon [052 14.1+2; YF 30.2; LHL 25.1]

Selvinduktans:



Pga Biot-Savarts lov er \vec{B} prop. med I , slik at omsluttet fluks Φ er prop. med I .

Dermed kan vi skrive: $\Phi = L \cdot I$

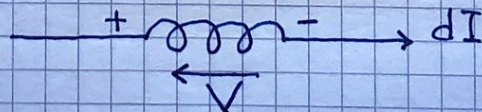
L = sløyfas (selv-) induktans

$[L] = \text{Wb/A} = \text{H}$ (henry)

Selinduksjon: $V = -d\Phi/dt = -L dI/dt$

Spole som kretselement:

Retning/fortegn på V :



Eks: Ideell spole, lengde l , tverrsnitt A , N viklinger

$\Phi = NBA$; $B = \mu_0 n I = \mu_0 (N/l) I$

$\Rightarrow L = \Phi/I = N^2 \mu_0 A / l$

Energi i \vec{B} -felt [OS2 14.3 ; YF 30.3 ; LHL 25.3] (82)

Endring av strømmen i en spole, fra $i = 0$ til $i = I$, krever at det gjøres et arbeid for å overvinne den induserte motspenningen $v = L di/dt$.

$$dU = P dt = v \cdot i dt = L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L i di$$

= tilført energi når strømmen økes fra i til $i + di$

$$\Rightarrow U = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 = \text{total tilført energi}$$

$$L = N^2 \mu_0 A / l ; \quad I = B / \mu_0 (N / l)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot (A \cdot l)$$

Her er $A \cdot l$ volumet inni spolen, der vi har $B \neq 0$.

Dermed:

$u_B = B^2 / 2\mu_0 =$ energi pr volumenhet i \vec{B} -feltet som gjelder generelt.

Dersom vi har både \vec{E} og \vec{B} samtidig, f.eks. i en elektromagnetisk bølge:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

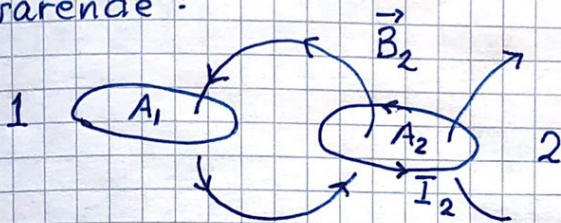
= energi pr volumenhet i et elektromagnetisk felt

Gjensidig induktans og induksjon:



Fluks Φ_2 gjennom A_2 er prop. med I_1 : $\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$

Tilsvarende:



Fluks Φ_1 gjennom A_1 er prop. med I_2 : $\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$

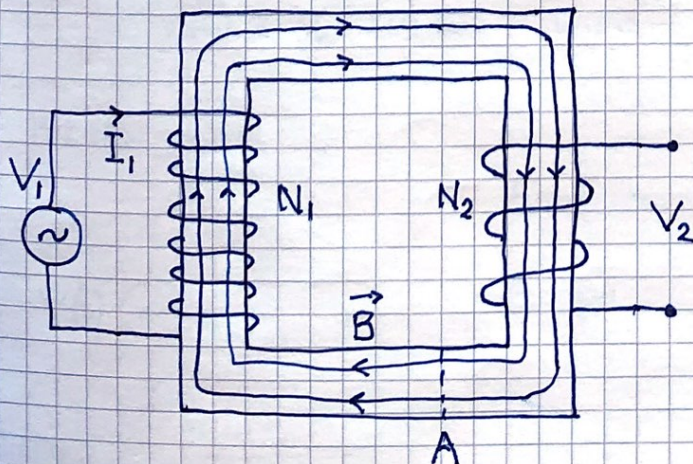
Det kan bevises at $M_{12} = M_{21} = M$, som er de to sløyfenes gjensidige induktans, med samme enhet som L , dvs $[M] = H$.

Gjensidig induksjon:

$$V_2 = -d\Phi_2/dt = -M dI_1/dt$$

$$V_1 = -d\Phi_1/dt = -M dI_2/dt$$

Eks: Transformator



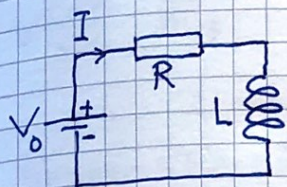
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\dot{\Phi}_2}{\dot{\Phi}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

(siden $\Phi_1 = N_1 BA$
og $\Phi_2 = N_2 BA$)

Avsluttende eksempler [OS2 14,15; YF 30,31; LHL 25,27]

84

Eks 1: RL-krets

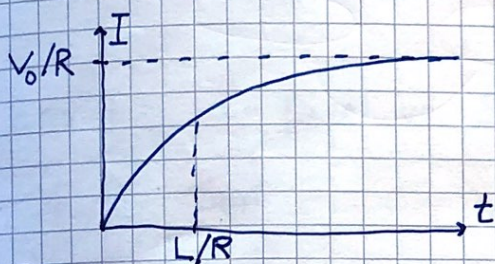


V_0 kobles til ved $t=0$

$$K2: V_0 - RI - L dI/dt = 0$$

altså samme lign. for $I(t)$ som vi hadde for $Q(t)$ i RC-kretsen

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga induert motspenning i spolen tar det noe tid før vi oppnår maks. strøm V_0/R .

Eks 2: Vannkraft og vekselspanning

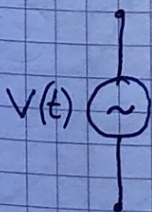
Rennende vann driver en turbin, som sørger for å rotere en spole med N viklinger rundt tverrsnitt A i et magnetfelt \vec{B} med vinkelfart ω . Dette gir en tidsavhengig omsluttet fluks

$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

og dermed en induert vekselspanning (AC, alternating current)

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad \text{med } V_0 = NBA\omega$$

Kretssymbol:

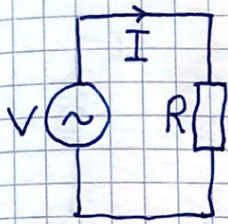


$$\text{Frekvens: } f = \omega/2\pi$$

$$\text{Europa: } f = 50 \text{ Hz}$$

Eks 3: Effektivverdier

(85)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t; \quad I_0 = V_0 / R$$

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \text{ da } \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\text{Skriver } \langle P \rangle \text{ p\u00e5 formen } \langle P \rangle = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}}$$

$$\text{Effektivverdier: } V_{\text{rms}} = V_0 / \sqrt{2}; \quad I_{\text{rms}} = I_0 / \sqrt{2}$$

$$\text{Kontakten i veggen: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: 1-fase vs 3-fase; 230 V vs 400 V

V_1 • Sort

$$V_1 = V_0 \sin \omega t$$

V_2 • Brun

$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

V_3 • Gr\u00e5

$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

N • Bl\u00e5

$$V_N = 0 \quad (\text{neutral-leder})$$

PE • Gul og gr\u00f8nn

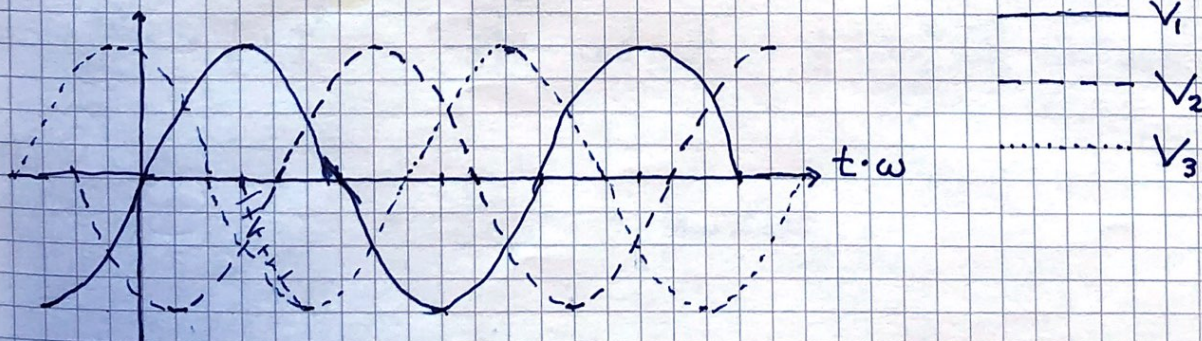
$$V_{PE} = 0 \quad (\text{Protective Earth})$$

Siden $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ f\u00e5r vi

$$V_{21} = V_2 - V_1 = 2 V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

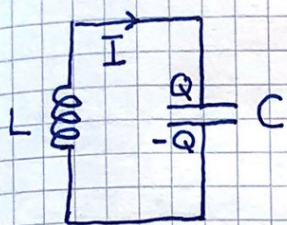
$$\text{dvs } (V_{21})_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3} V_0}{\sqrt{2}} \approx 400 \text{ V} \quad \text{n\u00e5r } V_0 = 325 \text{ V}$$

og tilsvarende for V_{32} og V_{31} .



Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

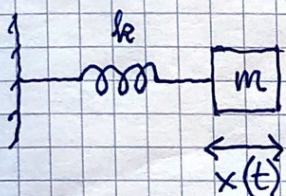
(86)



Anta $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$
 K2: $-L\dot{I} - Q/C = 0$; $I = \dot{Q}$
 $\Rightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$; $\omega_0^2 = 1/LC$

$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$; $I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$

Mekanisk analogi:



N2: $-kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = k/m$

$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$

(der vi antok $x = x_0$ ved $t = 0$)

Analoge størrelser i de to systemene:

$Q \leftrightarrow x$; $I \leftrightarrow \dot{x}$; $L \leftrightarrow m$; $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$

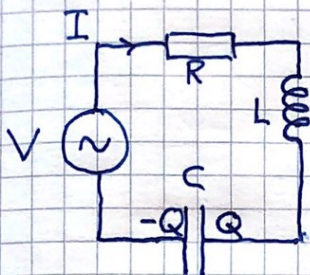
$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \text{energi i } \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$

Begge systemer er konservative, uten tap av energi (dissipasjon):

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 &= \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L \underbrace{\omega_0^2}_{= C^{-1}} Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant} \end{aligned}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

87



$$K2: V_0 \cos \omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow b \leftrightarrow R; F_0 \leftrightarrow V_0$$

Resonans når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

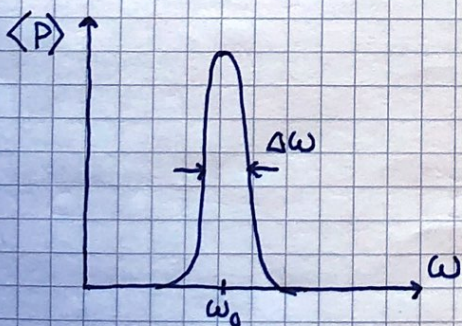
$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}; \quad 2\gamma = R/L$$

$$I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$

$$\langle P \rangle(\omega) = \langle V(t)I(t) \rangle \sim Q_0^2(\omega)$$

[Jf. mek. energi $E(\omega) \sim A^2(\omega)$; s. 42]



Halvverdbredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$
(FWHM)

Oscillatorens kvalitetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Eksp.: Med voltmetre måles $V_R = RI$ og $V_C = Q/C$ og dermed $I_0(\omega)$ og $Q_0(\omega)$.