TFY 4125 V24

- Ref. gruppe
  MTDT
  MTKOM
  MTDESIG
- Åpen emneside

MEKANIKK

OS1 1 - 12, 15 openstax.org

YF 1 - 11, 14 Young & Freedman

LL 1 - 6, 9 Lien & Løvhøiden

Størrelser og enheter [OS1 1 ; YF 1]

Eks: Diameter på snookerkule

$d = 52.5$ mm — SI-enhet (m = meter)

symbol, tallverdi, dekadisk forstavelse

(m = milli = 10^{-3})

Kompakt notasjon:

"Enhet for lengde er meter" $\Rightarrow$ $[L] = m$

Trenger i mekanikken bare 3 grunnenheter, som i SI-systemet er,

for lengde : m (meter)

for masse : kg (kilogram)

for tid : s (sekund)

Trenger i elmag dessuten,

for strømstyrke : A (ampere)

Og i termodynamikk,

for temperatur : K (kelvin)

for stoffmengde : n (mol)

Etter 20.05.2019 defineres grunnenhetene i SI-systemet med utgangspunkt i eksakte verdier for ulike naturkonstanter : c, e, k_B, N_A, h

Sammensatte enheter : ③

Fart (hastighet) $[v] = m/s$

Akselerasjon $[a] = (m/s)/s = m/s^2$

Eks 1: Lysfarten i vakuum $c = 299792458$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s

Eks 2: Ved fritt fall på jorda $a = g \approx 9.81$ m/s^2

Avledete enheter :

Kraft $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$ (newton)

Energi $[W] = N \cdot m = J$ (joule)

Effekt $[P] = J/s = W$ (watt)

Eks : Midlere strømpris i Trondheim 03.01.24 var 89 øre pr kWh. Hvor mange joule får du for 50 kr ?

Løsn : # kWh for 50 kr = 5000 øre / (89 øre / kWh)

J pr kWh = (1000 J/s) · 3600 s

⇒ # J for 50 kr = $(5000/89) \cdot 3.6 \cdot 10^6$ J $\approx$ 202 MJ

Målinger og usikkerhet - et bittelite Lynkurs :

Anta N målte verdier $x_1, x_2, \ldots, x_N$ av en størrelse x

Middelverdi / gjennomsnitt : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

Standardavvik : $\Delta x = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left[x_i - \bar{x} \right]^2 \right\}^{1/2}$

Standardfeil : $\Delta \bar{x} = \Delta x / \sqrt{N}$

Δx er et mål på spredningen i enkeltmålinger av x

$\Delta \bar{x}$ er et mål på usikkerheten i middelverdien $\bar{x}$

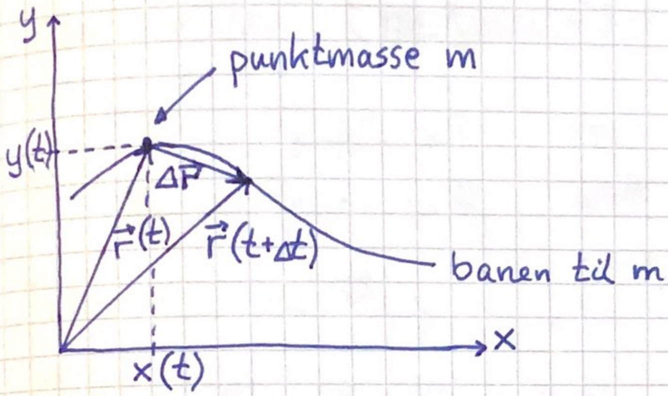
Resultatet av målingene oppgis gjerne på formen $\bar{x} \pm \Delta \bar{x}$

F.eks: $d = (52.50 \pm 0.05)$ mm for diam. av en samling snooker-kuler

Kinematikk [OS1 3,4 ; YF 2,3 ; LL1]

= beskrivelsen av bevegelse

Ser på liten masse (punktmasse) og antar først bevegelse i et plan (2D):



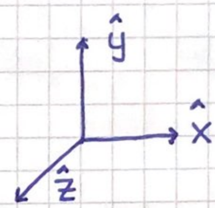
Posisjon ved tid t:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

I 3D:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$



$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$ (dvs dimensjonsløse)

Skalarprodukt: $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots\ldots = 0$

Kryssprodukt:

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z} = -\hat{y}\times\hat{x}$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x} = -\hat{z}\times\hat{y}$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} = -\hat{x}\times\hat{z}$$
$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$$

Forflytning i løpet av Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Hastighet $\stackrel{def}{=}$ Forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Ser at $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$, dvs $\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon $\overset{def}{=}$ Hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Ser at $\vec{a} \parallel d\vec{v}$, dvs i samme retning som fartsendringen

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \qquad \text{med } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} \qquad \text{med } a_x = dx/dt = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

Integrasjon av $\vec{v}$ og $\vec{a}$ gir hhv $\vec{r}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

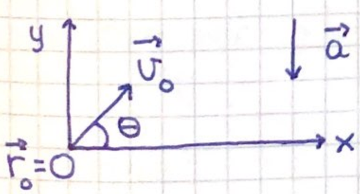
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Hvis konstant $\vec{a}$; med $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ og $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t \; ; \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \tfrac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2$$

Eks: Skrått kast



$\downarrow \vec{a} = -g\hat{y}$ med $g \approx 9.81\ m/s^2$

$\boxed{\text{Finn } \vec{r}(t) \text{ og banen } y(x)}$

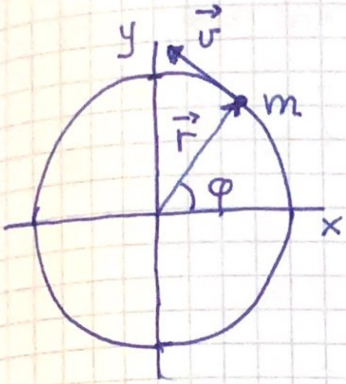
Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{y} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{y}$

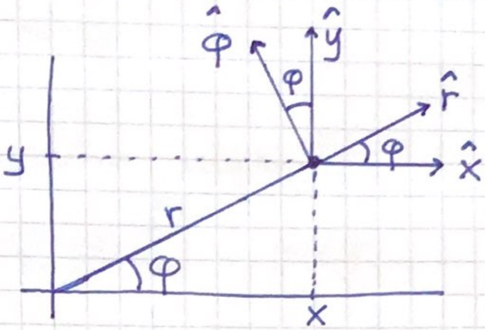
$$\Rightarrow x(t) = v_0 t\cos\theta \; ; \quad y(t) = v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\Downarrow$$

$$t = x/v_0\cos\theta \qquad \Rightarrow y(x) = x\tan\theta - x^2\cdot g/2v_0^2\cos^2\theta$$

Sirkelbevegelse [OS1 4.4 ; YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8] ⑥





Polarkoordinater : r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; $\varphi > 0$ mot klokka

Ser fra figuren :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\varphi + \hat{y}\,r\sin\varphi = r\,\hat{r}$

$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$, $\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ Buelengde / radius : $d\varphi = ds/r$ $\Rightarrow [\varphi] = 1$ (evt rad)

Vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=}$ Omløpt vinkel pr tidsenhet :

$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ $\Rightarrow [\omega] = 1/s$ (evt rad/s)

Vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ Endring i vinkelfart pr tidsenhet:

$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}$ $\Rightarrow [\alpha] = 1/s^2$ (evt rad/s²)

Med liten dt er dr $(= |d\vec{r}|) = ds = r\,d\varphi$, slik at

$v = dr/dt = r \cdot d\varphi/dt = r \cdot \omega$

Videre ser vi fra figuren at

$\vec{v} \perp \vec{r}$, dvs $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

Dermed er: $\boxed{\vec{v} = r\omega\hat{\varphi}}$

Akselerasjon:

$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\hat{x}\, r\dot{\varphi}\sin\varphi + \hat{y}\, r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\hat{x}\, r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \hat{y}\, r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$
$$- \hat{x}\, r\ddot{\varphi}\sin\varphi + \hat{y}\, r\ddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$= -\vec{r}\,\omega^2 + \hat{\varphi}\, r\alpha$$
$$= -\hat{r}\, r\omega^2 + \hat{\varphi}\, r\alpha$$

Sentripetalakselerasjon: $\vec{a}_\perp = -\hat{r}\, r\omega^2 = -\hat{r}\, v^2/r$, retning inn mot sirkelens sentrum

Baneakselerasjon: $\vec{a}_\parallel = r\alpha\hat{\varphi} = r\dot{\omega}\hat{\varphi} = \dot{v}\hat{\varphi}$, retning tangentielt med sirkelbanen. Hvis ω og v er konstante, har vi uniform sirkelbevegelse med $a_\parallel = 0$

Periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ Tid pr omløp:

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad ; \quad [T] = s$$

Frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ Antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$

Eks: (TFY 4125 9/8-2022 nr 4-6)

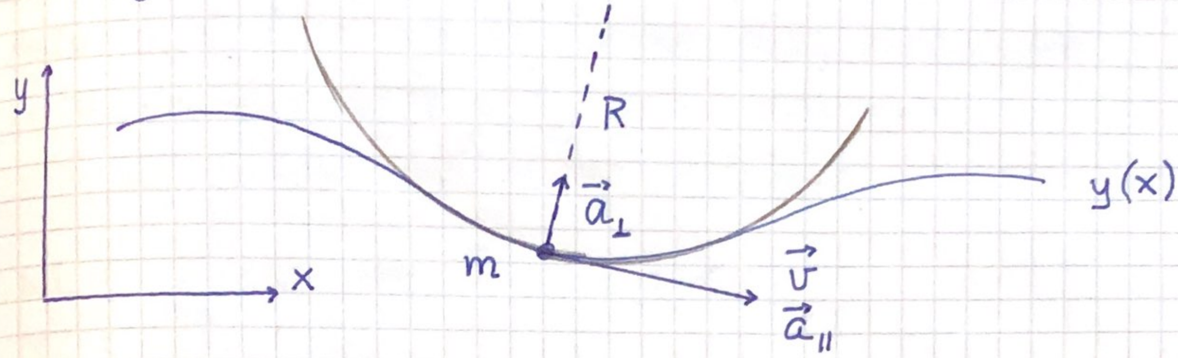
Karusell, $d = 7.0$ m, $\omega(t) = \omega_0[1-\cos\omega_0 t]$ med $\omega_0 = 0.15\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4) Hva er α_{max}? $\alpha = \dot{\omega} = \omega_0^2 \sin\omega_0 t \Rightarrow \alpha_{max} = \omega_0^2 \approx \underline{\underline{0.023\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}}$

5) Hva er v_{max} i avstand 3.0 m fra sentrum?
$\omega_{max} = 2\omega_0 \Rightarrow v_{max} = 3.0 \cdot 2 \cdot 0.15$ m/s $= \underline{0.90 \text{ m/s}}$

6) Hvor mange hele runder er rotert fra $t=0$ til $t = 126$ s?
$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt = \omega_0 t - \sin\omega_0 t = 18.85$ rad for $t = 126$ s
$\Rightarrow N = \varphi/2\pi = \underline{\underline{3}}$ hele runder

Bevegelse langs krum bane:

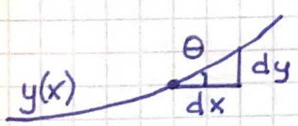


Banens krumningsradius: Radien R i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(Se TFY4104 H2019 s. 10-11 for utledning)

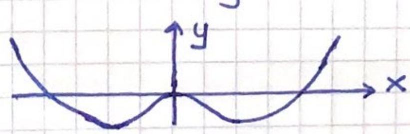
- $a_\perp = v^2/R$, inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter
- $y'' = 0$ i vendepunkter, og for rett bane (skråplan)
- Banens helningsvinkel θ:



$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\frac{dy}{dx}$$

Eks: (TFY4104 6/12-2018 nr 10-11)

$y(x) = y_0\left[(x/L)^4 - (x/L)^2\right]$ med $y_0 = 25.0$ cm og $L = 250$ cm



10) Hva er θ ved $x = \pm 6L/5$?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{L}\left[4(x/L)^3 - 2(x/L)\right] = \pm 0.4512 \Rightarrow \theta = \arctan(0.4512) \approx \underline{\underline{24^\circ}}$$

11) Hva er krumningsradien R i de to bunnpunktene?

$y' = 0 \Rightarrow (x/L)^2 = 1/2$

$y'' = (y_0/L^2)\left[12(x/L)^2 - 2\right] = 4y_0/L^2$ når $(x/L)^2 = 1/2$

$$\Rightarrow R = 1/y'' = L^2/4y_0 = (250^2/4\cdot 25)\text{ cm} = \underline{\underline{625\text{ cm}}}$$

Newtons lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3]

Anta $m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1 : $\vec{F} = 0 \iff \vec{v}$ = konstant

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, dvs krefter er vekselvirkninger mellom legemer. Når legeme 1 virker på legeme 2 med kraft $\vec{F}_{12}$, virker 2 på 1 med kraft $-\vec{F}_{12}$

Enhet : $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$ (newton)

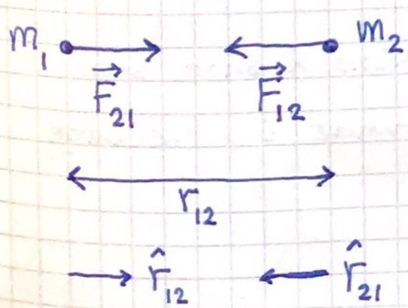
Impuls (evt bevegelsesmengde) : $\vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{F} = m\, d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$

Fundamentale krefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3; YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon / Tyngdekraft : Svak tiltrekning mellom masser
- Coulombkraft : Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger
- Kjernekrefter : Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

Gravitasjon:



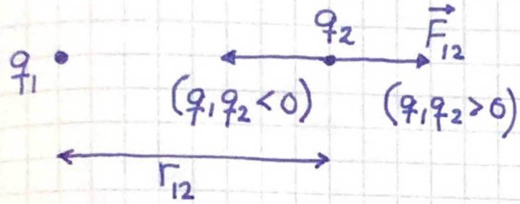
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \; N\, m^2/kg^2$$

Coulombkraften:



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$$

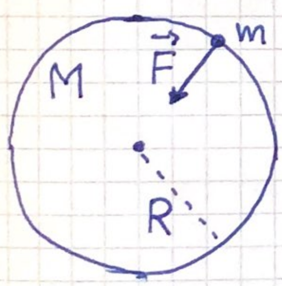
Enhet for ladning:
$[q] = C$ (coulomb)

Vakuumpermittiviteten:
$\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

Relevante krefter i mekanikken:

- Tyngdekraften fra jorda (eller andre himmellegemer)
- Kontaktkrefter; normalkraft og friksjonskraft. (I bunn og grunn coulombkrefter.)

<u>Tyngde</u> [OS1 13.2, 5.4; YF 4.4; LL 2.5]



$F = G\dfrac{Mm}{R^2}$ = tyngden av m

Jorda: $M \approx 5.97 \cdot 10^{24}$ kg; $R \approx 6.37 \cdot 10^6$ m

$\Rightarrow F = m \cdot g$ med $g = GM/R^2 \approx 9.81\ m/s^2$,
tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall: Når $m \cdot g$ er eneste kraft som virker på m, gir N2:

$$mg = ma \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = g}}$$

Eks: Satellittbaner, sirkulære. N2 med $a = v^2/r$ gir

$$GMm/r^2 = mv^2/r \quad \Rightarrow \quad v^2 r = GM$$

a) Lave baner (LEO): $h \sim 100$-300 km $\Rightarrow r \sim 6.6 \cdot 10^6$ m
$\Rightarrow v = \sqrt{GM/r} \approx 7.8$ km/s ; $T = 2\pi r/v \approx 1\frac{1}{2}$ time

b) Geostasjonære baner (GEO): Over ekvator med $T = 24$ timer
$\Rightarrow h = r - R \approx 36000$ km og $v \approx 3$ km/s