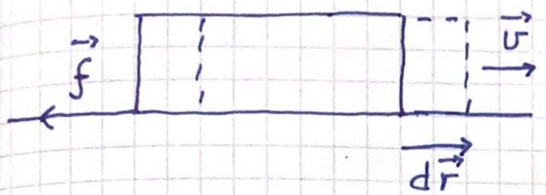
Friksjonsarbeid [OS1 7.1 ; YF 7.3 ; LL 4.5]



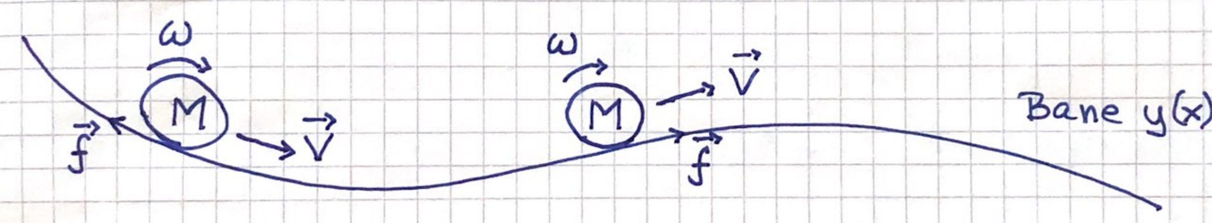
Kinetisk friksjon gir

$$dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

da $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning

Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi osv.
Kinetisk $\vec{f}$ er ikke konservativ da $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$
Men statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi da relativ forflytning $d\vec{r} = 0$

Labprosjektet: Ren rulling av kompakt kule



Statisk friksjon $\vec{f}$ når kula ikke glir
⇒ Mekanisk energi er bevart
Pot. energi: $U = Mgy$
Kin. translasjonsenergi: $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$
Kula roterer om sitt massesenter med vinkelhastighet ω og har kinetisk rotasjonsenergi K_{rot} i tillegg til K_{trans}

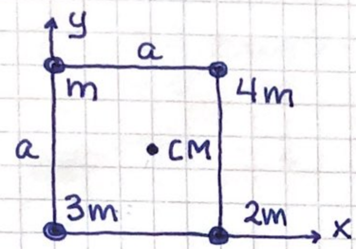
Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

Massesenter [OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

For N punktmasser $m_1, m_2, \ldots, m_N$ i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Eks:



$M = 10m$

$X_{CM} = (2ma + 4ma)/10m = 0.6a$

$Y_{CM} = (ma + 4ma)/10m = 0.5a$

$\vec{R}_{CM} = X_{CM}\hat{x} + Y_{CM}\hat{y}$

For kontinuerlig massefordeling:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r}\, dm \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm \quad ; \quad dm = \text{masseelement}$$

$$dm = \begin{cases} \lambda\, dl \\ \sigma\, dA \\ \rho\, dV \end{cases}$$

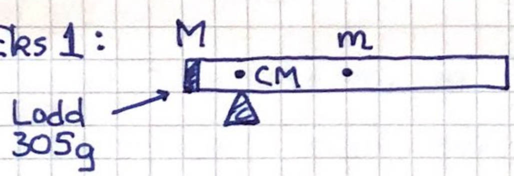
λ, σ, ρ = masse pr lengde-, flate-, volumenhet

dl, dA, dV = lengde-, flate-, volumelement

Med uniform massefordeling (dvs konstant massetetthet):

$$dm = \frac{M}{L}dl \ (1D) \ ; \quad dm = \frac{M}{A}dA \ (2D) \ ; \quad dm = \frac{M}{V}dV \ (3D)$$

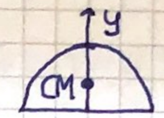
Eks 1:



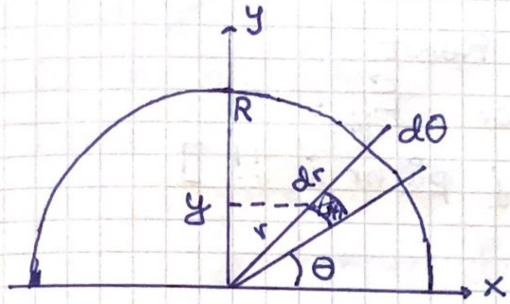
Plastrør, 165g. Lengde L

$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\left\{M\cdot 0 + m\cdot\frac{L}{2}\right\} = \frac{m\cdot L}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 2: Halv sirkulær plate



Masse M
Radius R
$Y_{CM} = ?$



$dA = r\,d\theta \cdot dr \quad ; \quad A = \frac{1}{2}\pi R^2$

$y = r \sin\theta$

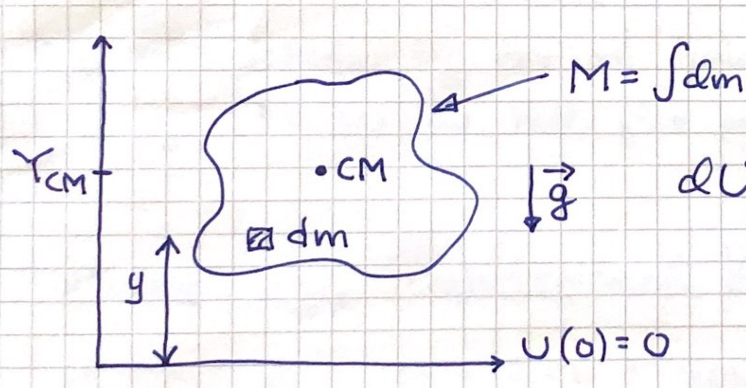
$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r\sin\theta \cdot r\,d\theta \cdot dr = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3}R^3 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}}$$

[Beregn selv: Halv ring: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$; Halv kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$]

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet. Tyngdepunkt.



$dU = dm \cdot g \cdot y$

$$U = \int dU = \int g\,y\,dm = g M Y_{CM}$$

(dvs massesenter og tyngdepunkt er på samme sted når g er konstant)

Tyngdepunktbevegelsen [OS 19.6; YF 8.5; LL 5.8]

Anta system med N punktmasser $\{m_i\}$ i posisjoner $\{\vec{r}_i\}$.

N2 for m_i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

Her er $\vec{F}_{i,ytre}$ = netto ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{ji}$ = kraft fra m_j på m_i

Legg sammen N2 for alle m_i i systemet.

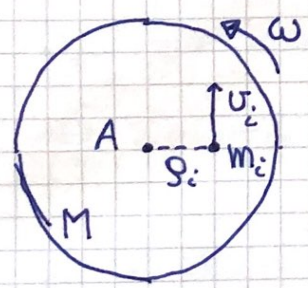
VS: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M\vec{R}_{CM} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$

HS: $\underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{= \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga N3}} = \vec{F}_{ytre}$

$$\Rightarrow \boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$ N2 for CM (tyngdepunktet)

Dvs: CM beveger seg som om hele M ligger i CM og påvirkes av netto ytre kraft på systemet!

Rotasjonsenergi. Treghetsmoment [OS 10.4, 10.5; YF 9.4-9.6; LL 6.2-6.4]



$M = \sum_i m_i$ = legemets masse

A = rotasjonsaksen ($\perp$ papirplanet)

ρ_i = avstand fra A til m_i

$v_i = \rho_i \omega$ = farten til m_i

ω = legemets vinkelfart

Legemets rotasjonsenergi:

$K_{rot} = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\{\sum_i m_i \rho_i^2\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

Legemets treghetsmoment mhp aksen A:

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$; Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int \rho^2 \, dm$

Et stivt legeme kan generelt ha translasjon av CM med fart $\vec{V}$ kombinert med rotasjon om en akse gjennom CM med vinkelfart $\vec{\omega}$ (der vektoren $\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen). Total kinetisk energi er:

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

[Bevist i notat på hjemmesiden]

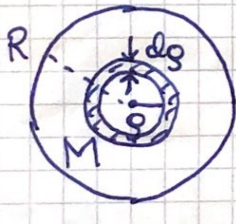
M = total masse; I_0 = treghetsmoment mhp aksen gjennom CM

Rullbare legemer:

1) Ring og hul sylinder

$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

2) Kompakt skive og sylinder



Del opp i tynne ringer med radius ρ, tykkelse $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho\, d\rho$ og dermed

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 \frac{M}{A} dA = \rho^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi\rho\, d\rho$$

Skivas totale treghetsmoment blir da

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

3) Tynt kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
4) Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

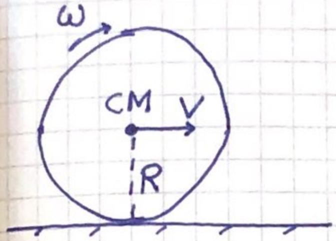
} Se øving m/LF.

Ser at alle fire er på formen $I_0 = c \cdot MR^2$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c	1	2/3	1/2	2/5

$\boxed{\text{Lab}}$

Ren rulling [OS1 11.1; YF 10.3; LL 6.7, 6.8]



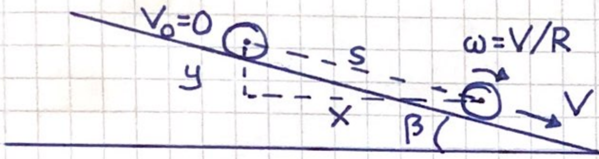
For 1 hel omdreining: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ og $V = \frac{2\pi R}{T}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

$$\Rightarrow K = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}I_0\omega^2 = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2\left(\tfrac{V}{R}\right)^2 = \underline{(1+c)\cdot\tfrac{1}{2}MV^2}$$

Eks: Ren rulling på skråplan

$I_0 = cMR^2$



$V = ds/dt$; $V_y = \frac{dy}{dt} = V\sin\beta$

Bestem V, A, f samt max vinkel β_{max} som gir ren rulling.

Løsn: Ren rulling ⇒ Statisk friksjon ⇒ Mek. energi er bevart

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2}MV^2 \Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}}}$$ [⇒ Kula er raskest]

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\frac{2gy}{1+c}}\sin\beta = \underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}}$$

$$\text{N2: } Mg\sin\beta - f = MA \Rightarrow \underline{f = \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta}$$

Fra før: $f \leq \mu_s \cdot N$ (max statisk friksjon er $\mu_s \cdot N$)

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta \Rightarrow \underline{\tan\beta \leq \mu_s\cdot\frac{1+c}{c}}$$

Hvis kule: $c = \frac{2}{5}$ ⇒ $\beta_{max} = \arctan(7\mu_s/2)$

Med f.eks. $\mu_s = 0.5$ blir $\beta_{max} \approx 60°$