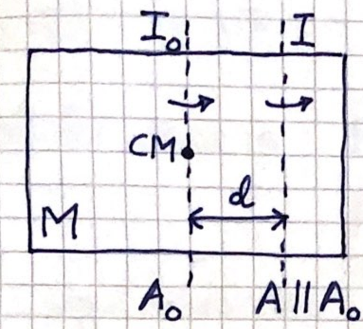
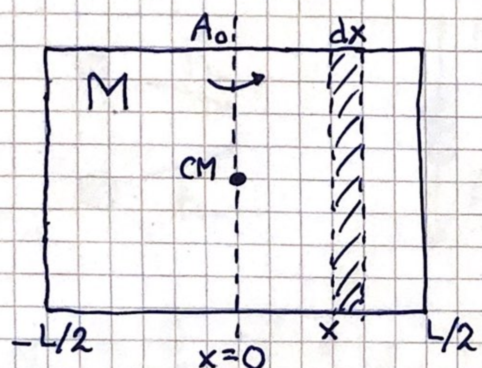
Steiners sats [OS1 10.5 ; YF 9.5 ; LL 6.3]

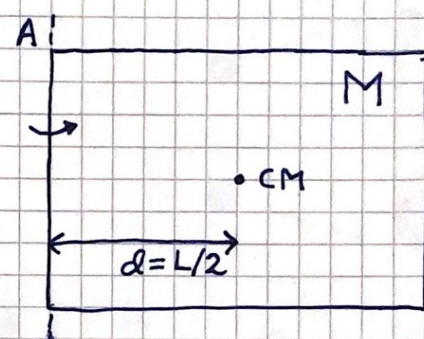


$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

[Utledet i notat]

Eks 1: Svingdør vs vanlig dør





$\rho = x$; $dm = M \cdot dx/L$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \underline{\tfrac{1}{12} ML^2}$$

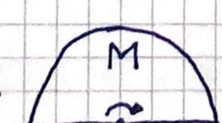
$$I = I_0 + Md^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4}\right) ML^2 = \underline{\tfrac{1}{3} ML^2}$$

[evt $I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2$; ok!]

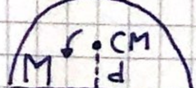
Eks 2: Hel og halv sirkulær skive

$$I_{20} = \tfrac{1}{2} \cdot 2MR^2 = MR^2$$

$\Rightarrow$



$$I = \tfrac{1}{2} MR^2 \quad \left(= \tfrac{1}{2} I_{20}\right)$$



Fra s. 21 : $d = 4R/3\pi$

$$\text{Steiners sats} \Rightarrow I_0 = I - Md^2 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{16}{9\pi^2}\right) MR^2$$
$$\approx \underline{0.32\ MR^2}$$

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp

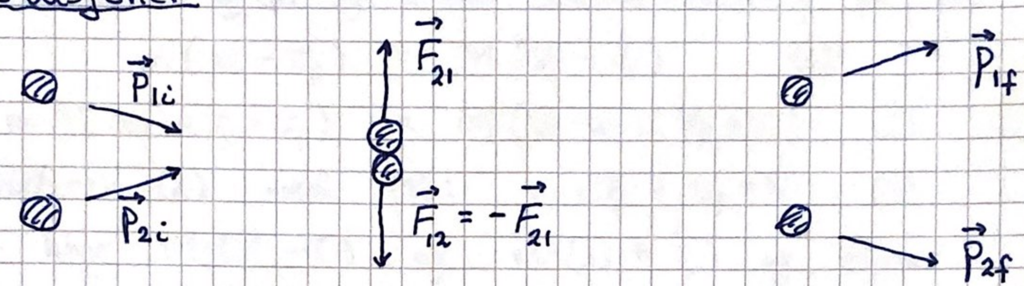
[OS1 9 ; YF8 ; LL 5]

N2 for masse m : $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v}$ = massens impuls ; $[p] = kg \cdot m/s$

Impulsbevarelse : $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ er bevart

Kollisjoner



N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \overset{N2}{\Longrightarrow} \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ = konstant ; indre krefter endrer ikke systemets totale impuls

Typiske kollisjoner er <u>kortvarige</u> $\Rightarrow \Delta U \approx 0$; $\Delta E \approx \Delta K \leq 0$

Mekanisk energi E kan tapes pga deformasjon og friksjon.

Elastisk støt : $\Delta E = 0$

Uelastisk støt : $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt :
De kolliderende legemene henger sammen, med felles sluttfart. Gir maksimalt tap av mek. energi.

Vi ser nærmere på kollisjoner i 1D, såkalte sentrale støt.

Før: $m \bullet \longrightarrow v_i \qquad V_i \longleftarrow \bullet M$

$- \longleftrightarrow +$

Etter: $v_f \longleftarrow \bullet m \qquad M \bullet \longrightarrow V_f$

Alltid: $\Delta p = 0 \Rightarrow m v_i + M V_i = m v_f + M V_f$ (1)

Fullstendig uelastisk: $\overset{m+M}{\bullet\bullet} \longrightarrow \quad v_f = V_f = (m v_i + M V_i)/(m+M)$

Elastisk: $K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2$ (2)

Skriver om (1) og (2) og bruker 3. kvadratsetning på (2):

$$m(v_i - v_f) = M(V_f - V_i) \quad (1)$$

$$m(v_i + v_f)(v_i - v_f) = M(V_f - V_i)(V_f + V_i) \quad (2)$$

Dividerer (2) med (1): $v_i + v_f = V_f + V_i$ (3)

Tar hhv $M \cdot (3) - (1)$ og $m \cdot (3) + (1)$ og finner:

$$v_f = \frac{M}{m+M}\left(2V_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M}\right) \; ; \quad V_f = \frac{m}{M+m}\left(2v_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Elastisk ball mot vegg

$m \bullet \longrightarrow v_i$ | $M = \infty$, $V_i = 0$ $\qquad v_f = ? \longleftarrow \bullet m$ | M, V_f

Løsn: $v_f = \frac{M}{m+M} \cdot v_i \cdot \frac{m-M}{M} \approx v_i \cdot \left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{\underline{-v_i}}$

Sjekker energi- og impulsbevarelse:

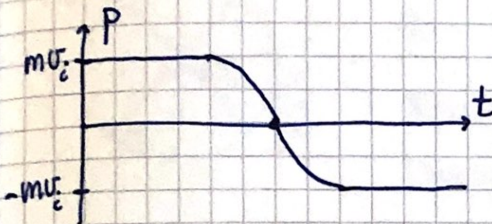
$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 = K_i$ <u>OK</u>

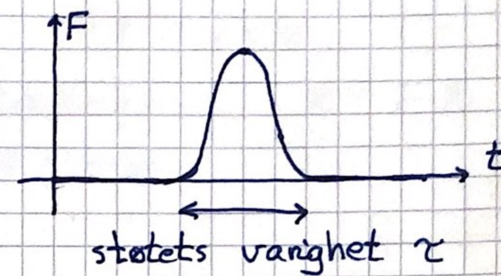
$P_f = m v_f + M V_f = -m v_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2 v_i$

$= -m v_i + 2 m v_i = m v_i = P_i$ <u>OK</u>

"Kraftstøt": Kraften F fra veggen på ballen endrer ballens impuls,

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F\,dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t)\,dt$$



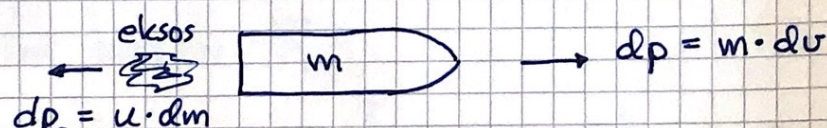


Estimat av (midlere) akselerasjon i støtet:

$v_i = 10$ m/s, $v_f = -10$ m/s, $\tau \approx 2$ ms $\Rightarrow a \approx \frac{20 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = \underline{10^4 \text{ m/s}^2}$

$a \gg g \Rightarrow$ OK å se bort fra ytre kraft mg i selve støtet

<u>Rakettprinsipp</u>



Eksos (masse dm) sendes bakover med fart u.

Pga impulsbevarelse øker rakettens fart: $m \cdot dv = u \cdot dm$

N2 for raketten: $m \cdot dv/dt = u \cdot dm/dt = F_{skyv}$

Skyvkraft: $F_{skyv} = u \cdot \dot{m}$

Ved oppskyting i tyngdefeltet: $F = u \cdot \dot{m} - mg$

$\Rightarrow m\, dv/dt = u\, dm/dt - mg$

Løsning: Anta $v(0) = 0$ og konstante u, g.

Multipliser med dt/m og integrer fra $t=0$ til t

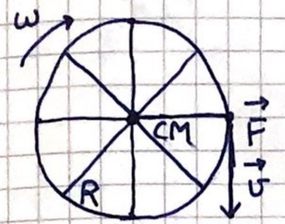
$$\Rightarrow \int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} dm/m - g \cdot t$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln[m(t)/m(0)] - g \cdot t$$

$$= |u| \ln[m(0)/m(t)] - gt \qquad (u < 0,\ m(t) < m(0))$$

Rotasjonsdynamikk [OSI 10 ; YF10 ; LL 6]

Antar først rotasjonsakse med fast orientering. F.eks. et hjul:



Effekt tilført hjulet av ytre kraft $\vec{F}$:

$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = FR\omega$

Kraftens dreiemoment : $\tau = F \cdot R$

Dermed : $P = \tau \cdot \omega$

Men vi har alternativt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right) = I_0 \, \omega \, \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed : $\boxed{\tau = I_0 \, \dot{\omega}}$ N2 for rotasjon om akse (gjennom CM) med fast orientering

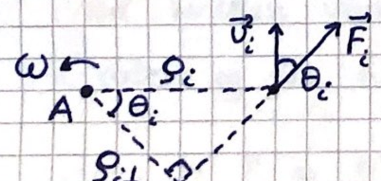
Jf. N2 for translasjon : $F = m\dot{v}$

Dersom flere ytre krefter $\vec{F}_i$:

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos\theta_i = \sum_i F_i \rho_i \omega \cos\theta_i = \tau \cdot \omega$$

med netto ytre dreiemoment mhp rotasjonsaksen

$$\tau = \sum_i F_i \rho_i \cos\theta_i = \sum_i F_i \rho_{i\perp}$$



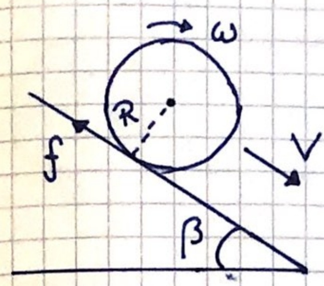
$\rho_{i\perp}$ = avstanden fra rot.aksen til kraftens forlengelseslinje = kraftens arm

Fra $P = \frac{dW}{dt}$ og $P = \tau \cdot \omega = \tau \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ ser vi at

$dW = \tau \, d\varphi$ = arbeid utført av τ ved omløpt vinkel $d\varphi$

Jf. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = arbeid utført av $\vec{F}$ ved translasjon $d\vec{r}$

Eks 1 : Ren rulling på skråplan (s. 24)



$I_0 = cMR^2$; $\omega = \frac{V}{R}$; $\dot{\omega} = \frac{\dot{V}}{R}$

$F_{\parallel} = Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$ (N2, ∥)

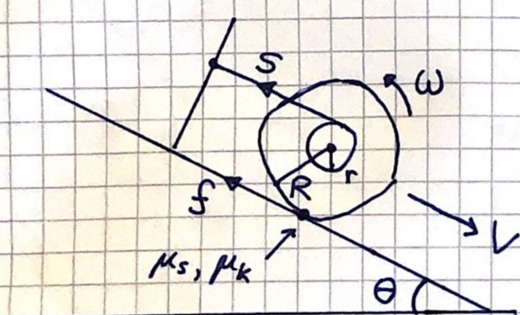
$\tau = f \cdot R$ (da $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ begge har <u>null arm</u> mhp rot.aksen gjennom CM)

N2, om rot. aksen : $\tau = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \dot{V}/R \Rightarrow f = cM\dot{V}$

Setter f inn i N2, ∥ : $Mg\sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \dot{V} = g\sin\beta/(1+c)$

og dermed $f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta$. Som med energibevarelse s. 24 !

Eks 2 : Baklengssnelle på skråplan (Øving)



- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å skure (rotere og gli) nedover skråplanet ?

  Tips: N1 ∥ og N1 rot. om CM ; $f = \mu_s N$ når $\theta = \theta_0$

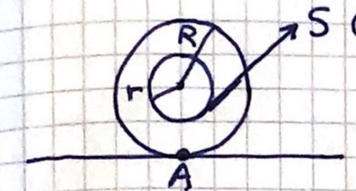
- Hva er S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$?

  Tips : N2 ∥ og N2 rot om CM ; $f = \mu_k N$

  Merk: Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π tar samme tid

  $\Rightarrow V = \omega r$

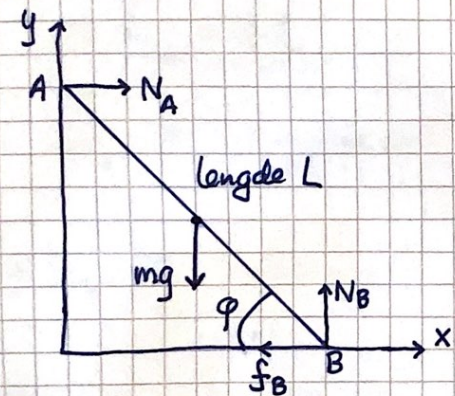
Eks 3: Hvilken vei ruller snella?



- Mg, N og f har null arm mhp A
- Forlengelse av $\vec{S}$ til venstre for A gir rotasjon med klokka
- Forlengelse av $\vec{S}$ til høyre for A gir rotasjon mot klokka

- Forlengelse av $\vec{S}$ gjennom A gir $\tau_A = 0$ $\Rightarrow$ Snella står i ro!

Eks 4: Er stigen bratt nok?



Anta $f_A = 0$, og μ = statisk friksjons-koeff. i B. Da glir stigen når

$$f_B = f_{max} = \mu N_B$$

Vi bruker N1 i x- og y-retning samt N1 mhp rotasjon om akse i B, $\perp$ xy-planet.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow f_B = N_A \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N_B = mg \end{aligned}\right\}$$

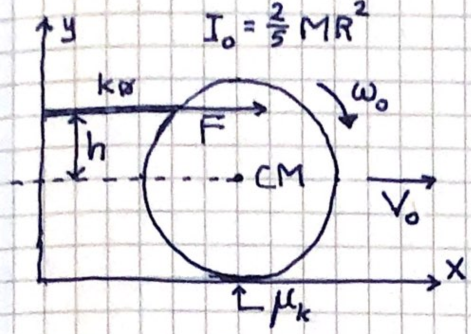
Kombinert med $f_B = \mu N_B$ finner vi nå $\underline{N_A = \mu mg}$

$$\Sigma \tau_B = 0 \Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi = N_A \cdot L \cdot \sin\varphi = \mu mgL \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\tan\varphi_{min} = \frac{1}{2\mu}}$$

Med f. eks. $\mu = 0.25$: $\varphi_{min} = \arctan 2 \simeq 63°$

Eks 5: Snooker [LL 6.7 og øving] [OSI 11.1]



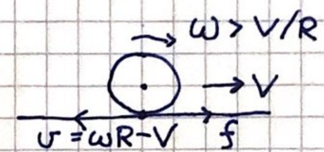
Kortvarig horisontalt støt med køen i kulas sentrale vertikale plan i høyde h over aksen gjennom CM. Hvilken verdi h_0 gir ren rulling umiddelbart?

Løsn: N2 $\Rightarrow F \cdot \Delta t = MV_0$ (Neglisjerer friksjon i støtet)

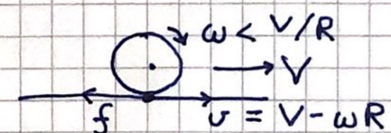
N2, rot. om CM $\Rightarrow F h_0 \Delta t = I_0 \Delta\omega = \frac{2}{5}MR^2 \cdot V_0/R$

$\Rightarrow \underline{\underline{h_0 = \frac{2}{5}R}}$

$h > h_0 \Rightarrow$ "toppspinn" :

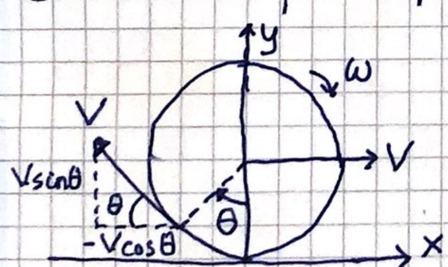


$h < h_0 \Rightarrow$ "underskru" :



Gir sluring i starten, men pga f vil ω nærme seg V/R og gi ren rulling etter hvert.

Banen til punkt på periferien ved ren rulling:

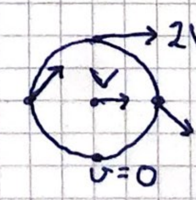


$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R\dot{\theta}$

Fra figuren:

$v_x = V - V\cos\theta$

$v_y = V\sin\theta$



Banen: $x(\theta) = R(\theta - \sin\theta)$; $y(\theta) = R(1-\cos\theta)$