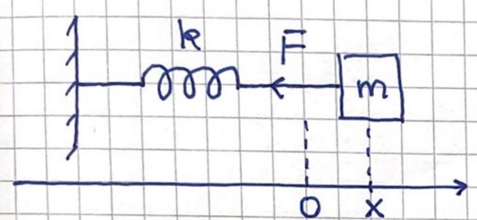
Svingninger [OS1 15 ; YF 14 ; LL9]

Periodisk oppførsel omkring likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler

(Senere: Ladning og strøm i elektriske kretser.)

Harmonisk oscillator [OS1 15.1 ; YF 14.2; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt $(F = 0)$

$x > 0$: strukket fjær $(F < 0)$

$x < 0$: sammenpresset fjær $(F > 0)$

Hookes lov : $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten ; $[k] = N/m$

N2 : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = k/m$

Løsning: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

evt $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$

Aktuelle størrelser (jf. sirkelbevegelse):

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet (Hz)

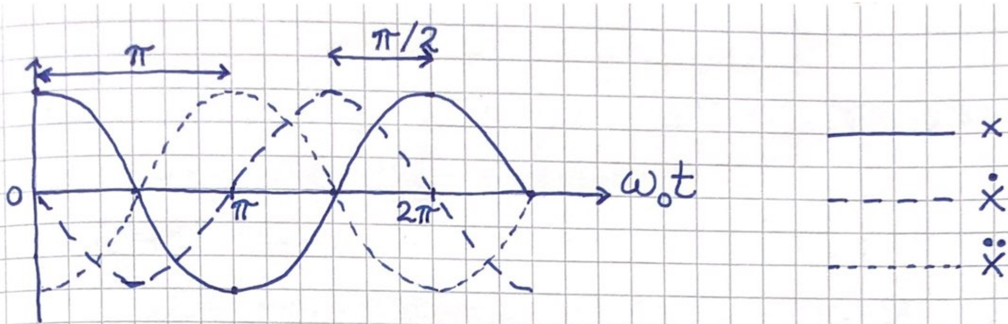
φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

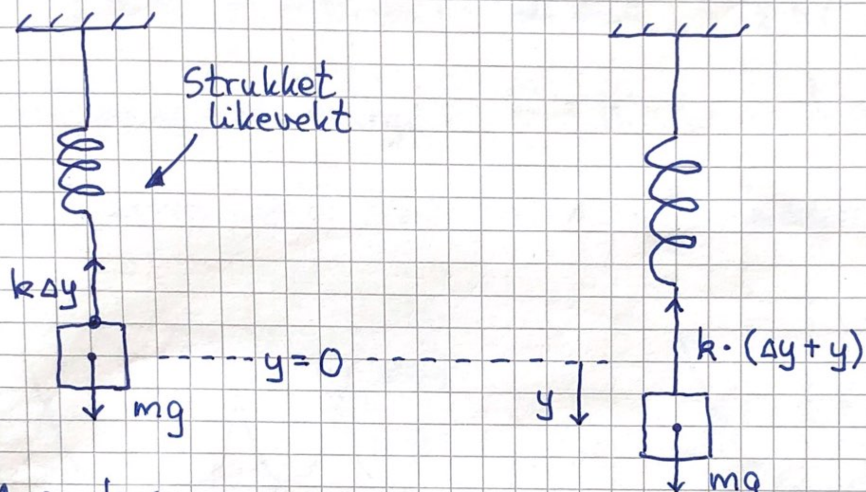
Konstantene A og φ (evt B og C) fastlegges med to startbetingelser, f. eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

Anta $\varphi = 0$. Da er $x(t) = A\cos\omega_0 t$; $\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t$

og $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$



Eks: Hvordan svinger massen i fjæra i tyngdefeltet?



N1 : $k\,\Delta y = mg$

$\Rightarrow \Delta y = mg/k$

N2: $mg - k\cdot(\Delta y + y) = m\ddot{y}$

$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt med uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$: $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2; YF 14.3; LL 9.4]

Anta $\varphi = 0$, dvs $x(t) = A\cos\omega_0 t$.

Potensiell energi:

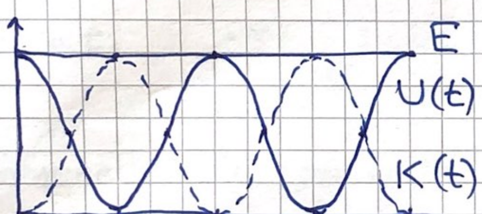
$$U = -\int_0^x F(x)dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$$

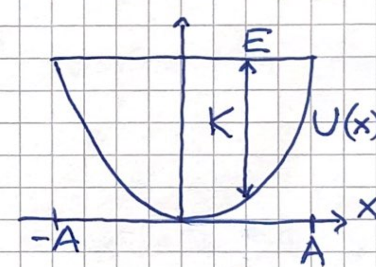
Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega_0 t$$

Total mekanisk energi: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$, uavh. av t

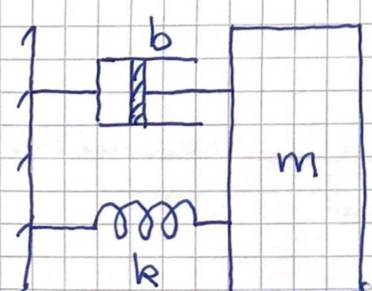
$\Rightarrow$ Fjærkraften $F(x) = -kx$ er konservativ.





Dempet fri svingning [OS1 15.5; YF 14.7; LL 9.7]

Anta friksjon proporsjonal med farten: $f = -b\dot{x}$



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\gamma = b/2m$; $\omega_0^2 = k/m$

Pga friksjon må $x \to 0$ når $t \to \infty$.

Pga formen på diffligningen må løsningen være på formen $\exp(-\alpha t)$, så vi prøver denne!

Innsetting gir: $[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2]\, e^{-\alpha t} = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\Rightarrow x(t) = (A + B\cdot t)\exp(-\gamma t)$

Dette er svakeste demping som ikke gir svingninger.
Ønskelig i støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0$

$x(t) = A\exp(-\alpha_1 t) + B\exp(-\alpha_2 t)$; $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

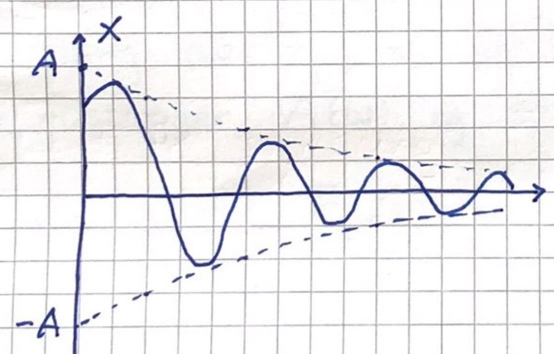
Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0$

$\alpha = \gamma \pm \sqrt{(-1)\cdot(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \gamma \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t}(\cos\omega t \pm i \sin\omega t)$$

Generell reell løsning: $x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$

Dvs harmonisk svingning med avtagende amplitude $Ae^{-\gamma t}$.



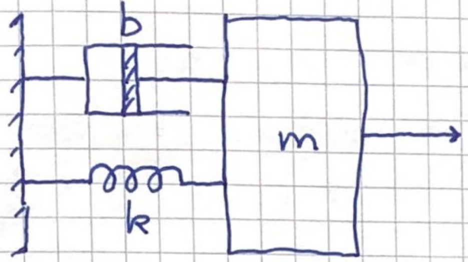
- - - - - $\pm Ae^{-\gamma t}$
(omhylningskurver)

Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ avgjør hvor lenge svingebevegelsen varer

Svak demping: $\gamma \ll \omega_0$

Da er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Tvungen svingning. Resonans [OS1 15.6; YF 14.8; LL 9.9]



Antar harmonisk ytre kraft:
$F(t) = F_0 \cos \omega t$

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Den homogene løsningen oppfyller den homogene ligningen

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at $x_h(t)$ er prop. med $\exp(-\gamma t)$ og kan neglisjeres etter et innsvingningsforløp med varighet ca $3\tau = 3/\gamma$.

Fokuserer derfor på partikulærløsningen $x_p(t)$ og "gjetter"

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir to ligninger som fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Hvis dempingen er svak ($\gamma \ll \omega_0$) og $\omega \approx \omega_0$, kan amplituden A bli svært stor.

La oss regne ut midlere tilført effekt når $\omega = \omega_0$.
Da er $\varphi(\omega_0) = \arctan 0 = 0$ og
$\dot{x} = \omega_0 A(\omega_0) \cos \omega_0 t$ med $A(\omega_0) = F_0 / (m \cdot 2\gamma \omega_0)$.

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle = \frac{F_0^2 \omega_0}{m \cdot 2\gamma\omega_0} \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

Her er $2\gamma = b/m$ og $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$ slik at $\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2b}$.

Dette tilsvarer midlere effekttap pga friksjon,

$$\langle P_f \rangle = \langle -b\dot{x} \cdot \dot{x} \rangle = -F_0^2/2b$$

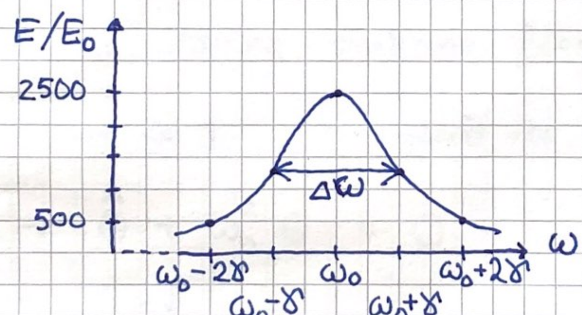
Dvs, stasjonære forhold, med oscillatorenergi s.f.av ω:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = F_0^2/2k$$

Eks: Anta $\omega_0 = 100\gamma$ (svak demping) og skisser resonanskurven $E(\omega)$. Bestem halvverdibredden og oscillatorens Q-faktor.

Løsning: $E(\omega_0) = 2500\, E_0$, $E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250\, E_0$,

$E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500\, E_0$



Resonanskurvens halvverdibredde: $\underline{\Delta\omega = 2\gamma = b/m}$

FWHM: Full Width at Half Maximum

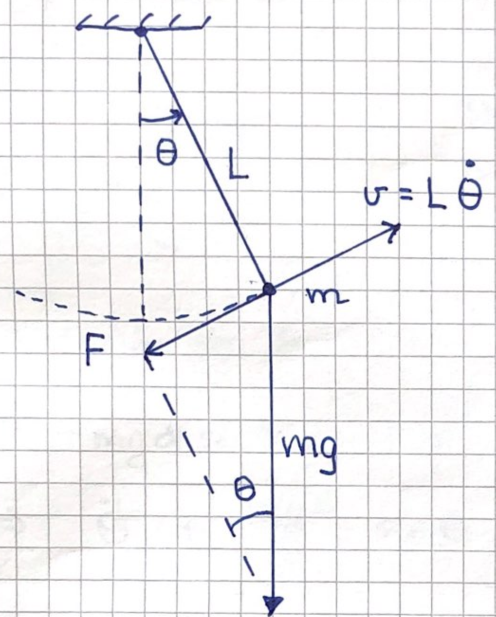
Oscillatorens Q-faktor ("quality factor"): $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Med svak demping, $\gamma \ll \omega_0$, er $Q \gg 1$.

Her er $\Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/50$, dvs $\underline{Q = 50}$.

Pendler [OS1 15.4 ; YF 14.4–14.6 ; LL 9.6]

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs stang.



N2 ∥ sirkelbanen:

$$F = ma$$

med

$$F = -mg\sin\theta$$

$$a = L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving omkring likevekt:

$$|\theta| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$$

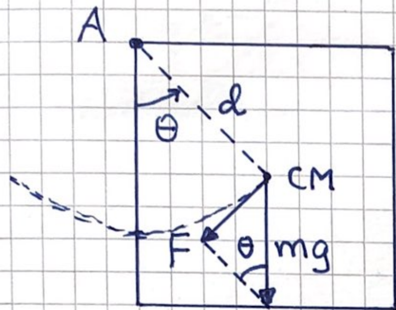
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Foucault-pendelen i Realfagbygget har lengde 25 m. Bestem perioden.

Løsn: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \approx \underline{10\text{ s}}$

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A i avstand d fra CM.



Masse m

Treghetsmoment I mhp A

Dreiemoment mhp A:

$\tau = -F \cdot d = -mgd \cdot \sin\theta$

N2, rotasjon om A: $\tau = I\ddot{\theta}$

$\Rightarrow -mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$

Anta små utsving omkring likevekt: $\sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = mgd/I$

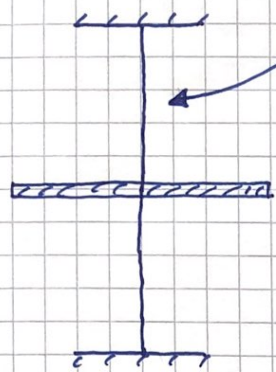
Eks: Kvadratisk plate (som over) med sidekanter $L = 20$ cm og aksen A i et hjørne. Masse m.

a) Vis at $I_0 = \frac{1}{6}mL^2$. (Akse gjennom CM, parallell med A)

b) Vis at $I_A = \frac{2}{3}mL^2$

c) Vis at perioden er $T = 0.87$ s

Torsjonspendel:



Når stanga roteres en vinkel θ bort fra likevekt, virker torsjonstråden med et dreiemoment på stanga, med retning tilbake mot likevekt, og prop. med vinkelen θ, dvs $\tau = -\kappa\,\theta$.
Trådens torsjonsstivhet κ har enhet N·m.

(sett langs torsjonstråden)

N2, rotasjon om trådens akse:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -\kappa\,\theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \; ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0$$

Eks: $M = 50\,g$, $L = 11\,cm$, $T = 0.80\,s$
Bestem κ.

Løsn: $\kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx 0.003\ \text{Nm}$