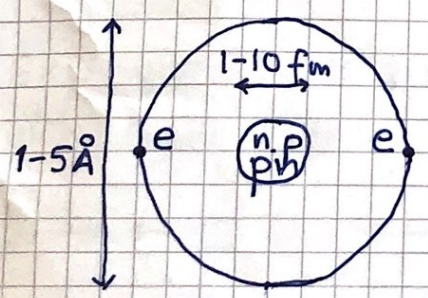
ELEKROMAGNETISME

OS2	5 - 15	openstax.org
YF	21 - 31	Young & Freedman
LHL	19 - 27	Lillestøl, Hunderi & Lien

Elektrostatikk [OS2 5-8 ; YF 21-24 ; LHL 19-20]

Elektrisk Ladning [OS2 5.1 ; YF 21.1 ; LHL 19.1]

Materie består av atomer. Et atom består av en atomkjerne og ett eller flere elektroner. En atomkjerne består av ett eller flere protoner og eventuelt nøytroner.
Klassisk atommodell (N. Bohr 1913, NP1922):



$1\ fm = 10^{-15}\ m$

$1\ Å = 10^{-10}\ m$ (ångstrøm)

Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
Elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
Proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
Nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

Ladning er kvantisert i enheter av
e = elementærladningen $\equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19}\ C$
Symbol for ladning: q, Q
Enhet: $[q] = C$ (coulomb)

Nøytralt atom med <u>atomnummer</u> Z har Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Z\cdot e + Z\cdot(-e) = 0$

Ioner: Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

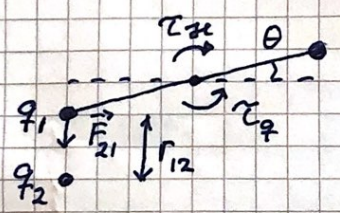
Eks: Cl^-, Na^+, CO_3^{2-}, NH_4^+

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner

Eks: ^{13}N, ^{14}N, ^{15}N har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z=7$)

Coulombs lov [OS2 5.3; YF 21.3; LHL 19.3]

Coulomb, 1785:

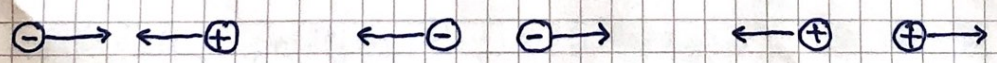


Torsjonspendel sett ovenfra.

Likevekt når $\tau_q = \tau_\kappa$

$\tau_q = F_{21}\cdot\frac{1}{2}L\cdot\cos\theta$; $\tau_\kappa = \kappa\theta$

Exp. gav $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$, med tiltrekning mellom ulike typer ladning og frastøtning mellom like typer:



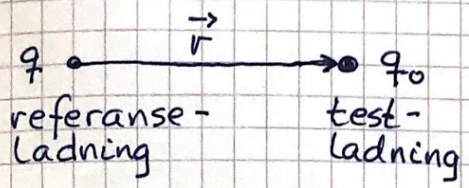
Coulombs lov:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{21}}$$

Vakuumpermittiviteten: $\varepsilon_0 \approx 8.85\cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ Nm^2/C^2$$

Elektrisk felt [OS2 5.4–5.5; YF 21.3–21.5; LHL 19.3–19.5]



Kraft fra q på q_0:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Elektrisk felt $\overset{\text{def}}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \qquad \text{Enhet: } [E] = N/C$$

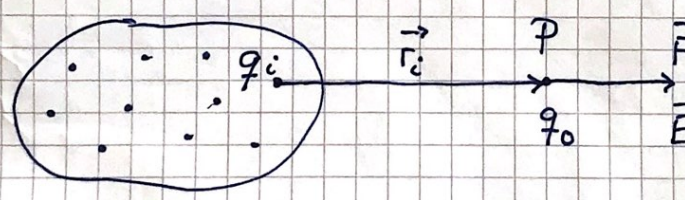
En punktladning q omgir seg med et el. felt

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Bort fra $q > 0$: $\oplus \longrightarrow \vec{E}$

Inn mot $q < 0$: $\ominus \longleftarrow \vec{E}$

El. felt fra flere ladninger:



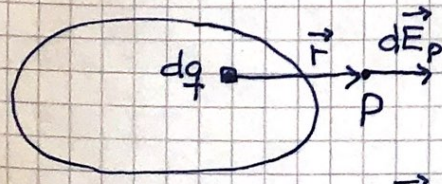
$$\vec{F}_i = q_i q_0 \hat{r}_i / 4\pi\varepsilon_0 r_i^2$$

$$\vec{E}_i = \vec{F}_i / q_0 = q_i \hat{r}_i / 4\pi\varepsilon_0 r_i^2$$

El. felt i posisjon P fra ladningene $\{q_1 q_2 \cdots q_i \cdots\}$:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$$

Med kontinuerlig ladningsfordeling: $q_i \to dq$; $\sum_i \to \int$

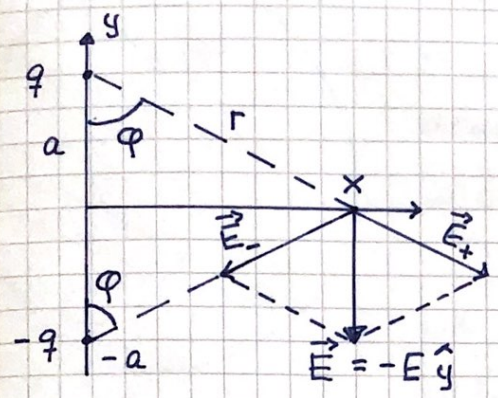


$$d\vec{E}_P = dq\,\hat{r}/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

$$\vec{E}_P = \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Enkel elektrisk dipol

Punktladninger $\pm q$ i $y = \pm a$. Finn $\vec{E}$ på x-aksen.



$$E = 2E_+ \cos\varphi \qquad (E_- = E_+)$$

$$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}$$

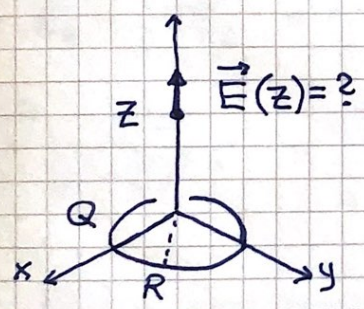
$$E_+ = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

Langt unna, $x \approx r \gg a$: $E(r) \sim 1/r^3$

Dvs, E går raskere mot null enn $E \sim 1/r^2$ fra punktladning.

Eks 2: Jevnt ladet ring



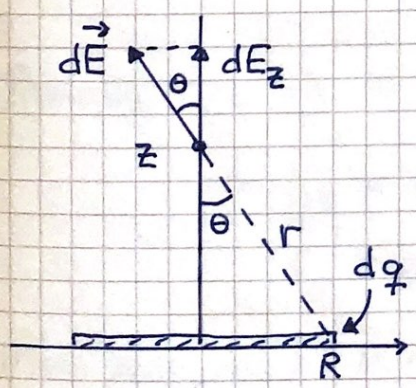
Symmetri $\Rightarrow \vec{E} = E_z \hat{z}$

Bidrag til E_z fra dq:

$$dE_z = dE \cdot \cos\theta$$

$$dE = dq/4\pi\varepsilon_0 r^2 \; ; \quad \cos\theta = z/r$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$



$$\Rightarrow E_z = \int dE_z$$

$$= \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \int dq$$

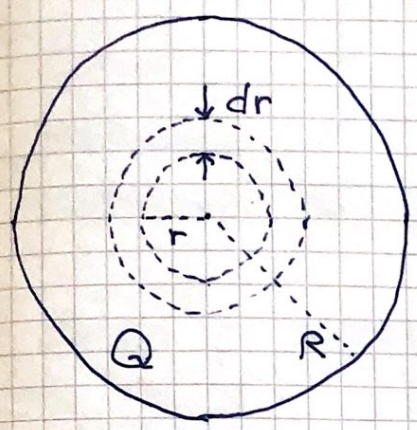
$$= \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

Rimelig svar: $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$;

$$E_z(z \gg R) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

OK!

Eks 3: Jevnt ladet skive



Kan betraktes som mange tynne ringer med radius r, bredde dr, areal $dA = 2\pi r \cdot dr$, og dermed ladning $dq = (Q/A)dA$

$$= (Q/\pi R^2) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Da kjenner vi denne tynne ringens bidrag til feltet på symmetriaksen fra Eks 2 på forrige side.

Med skiva i xy-planet og z-aksen ut av planet:

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \Big|_0^R \left[-(r^2+z^2)^{-1/2}\right] = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

Rimelig: $z \gg R \Rightarrow \frac{z}{z(1+R^2/z^2)^{1/2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}$

$\Rightarrow E_z \approx Q/4\pi\varepsilon_0 z^2$, som punktladning Q i origo, OK!

Med stor skive, $R \gg z$: $E_z \approx Q/2\pi\varepsilon_0 R^2 = \sigma/2\varepsilon_0$

der $\sigma = Q/\pi R^2$ er skivas ladning pr flateenhet.

Med andre ord: Feltet er (tilnærmet) <u>konstant</u> i nærheten av ei jevnt ladet skive.

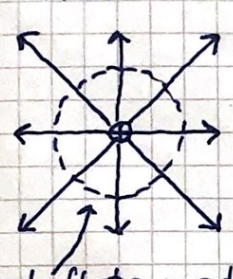
Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6 ; YF 21.6 ; LHL 19.6]

Gir et visuelt bilde av $\vec{E}$ omkring ladningene.

Retning: Feltlinjer $\parallel$ $\vec{E}$

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ er prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning



kuleflate med radius r

Feltlinjetetthet i avstand r:

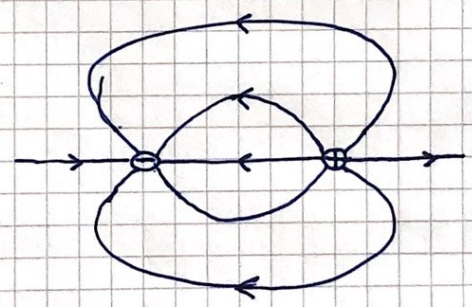
$N/A = N/4\pi r^2 \sim 1/r^2$

El. feltstyrke i avstand r:

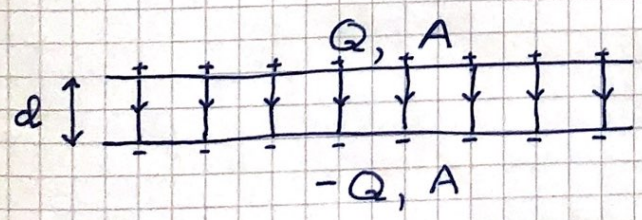
$E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \sim 1/r^2$

OK!

Eks 2: Dipol



Eks 3: Parallellplatekondensator



$\sigma = Q/A$

Antar kort avstand d mellom to plater med ladning $\pm Q$ fordelt på areal A. Da er $\vec{E}$ (tilnærmet) konstant mellom platene, med feltstyrke

$E = 2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$, og $E \approx 0$ utenfor.

(Dette følger av Eks 3 på s. 50.)

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF 21.7; LHL 19.10]

Enkel dipol: $-q \xrightarrow{\vec{d}} q$ Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$; $[p] = C \cdot m$

Flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Kontinuerlig ladningsfordeling: $\vec{p} = \int \vec{r}\, dq$

Nettoladning for dipol: $\sum_i q_i = 0$ evt. $\int dq = 0$

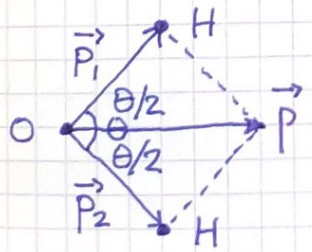
Eks 1: Hva er dipolmomentet til det lineære molekylet CO_2?

Løsn 1: $\overset{-}{O} = \overset{++}{C} = \overset{-}{O}$ $\quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \underline{0}$

$\vec{p}_1 \rightarrow \quad \leftarrow \vec{p}_2$

Eks 2: For H_2O er $d(O-H) = 0.96$ Å, $\theta(H-O-H) = 104.5°$ og fordelingen av elektroner slik at den kan beskrives med punktladninger $+e/3$ på H-atomene og $-2e/3$ på O-atomet. Hva er da dipolmomentet til H_2O?

Løsn 2:



$$p_1 = p_2 = \frac{e}{3} \cdot d$$

$$p = 2p_1 \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} e \cdot d \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

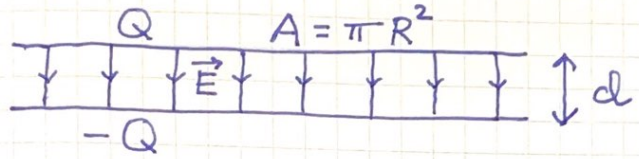
$$= \frac{2}{3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0.96 \cdot 10^{-10}\, m \cdot \cos 52.25°$$

$$\simeq \underline{6.3 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m}$$

Med $e \cdot$ Å som enhet: $p \simeq 0.39\, e$Å

Eks 3: En platekondensator har plater med radius 10 cm i innbyrdes avstand 1.0 mm. Platene har ladning ± 25 nC jevnt fordelt. Bestem ladning pr flateenhet, elektrisk feltstyrke mellom platene, og kondensatorens dipolmoment.

Løsn 3:



$$\sigma = Q/A = 25\cdot 10^{-9}\ C/\pi\cdot(0.10\,m)^2 \approx \underline{8.0\cdot 10^{-7}\ C/m^2}$$

$$E = \sigma/\varepsilon_0 \approx \underline{9.0\cdot 10^{4}\ N/C}$$

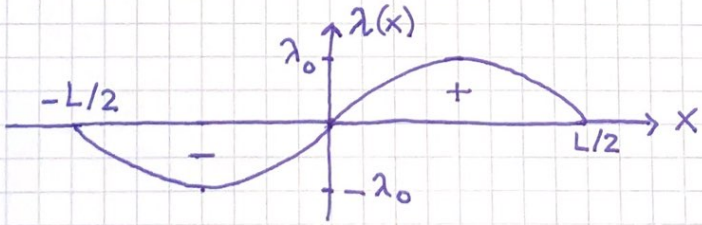
$$p = Q\cdot d = \underline{2.5\cdot 10^{-11}\ C\cdot m}$$

Eks 4: En dipolantenne med lengde L har ved et gitt tidspunkt en ladning pr lengdeenhet

$$\lambda(x) = \lambda_0 \sin(2\pi x/L)$$

med $x=0$ midt på antenna. <u>Anslå</u> antennas dipolmoment!

Løsn 4:



Vi har omtrent ladninger $\pm\frac{1}{2}\lambda_0\cdot\frac{1}{2}L$ i innbyrdes avstand $\frac{1}{2}L$, slik at $p \approx \frac{1}{8}\lambda_0 L^2$.
(Eksakt er $p = \lambda_0 L^2/2\pi$; se s. 63 fra vår 2023)