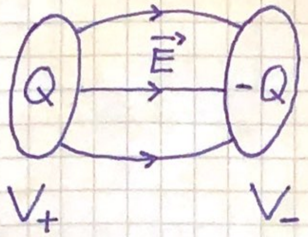
Kondensator. Kapasitans [OS2 8 ; YF 24 ; LHL 20]

To adskilte ledere = en kondensator (capacitor)

Ladning $\pm Q$ på lederne $\Rightarrow$ felt $\vec{E}$



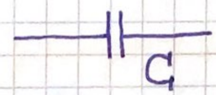
Coulombs lov $\Rightarrow$ E prop. med Q

$\Rightarrow$ potensialforskjellen (spenningen) $V = V_+ - V_-$ prop. med Q

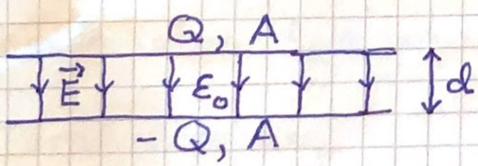
Kondensatorens kapasitans (capacitance):

$$C = Q/V \quad ; \quad [C] = \frac{C}{V} = F \ \text{(farad)}$$

Kretssymbol :



Eks: Platekondensator



$$E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$$

$$V = E \cdot d = Qd/A\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \underline{C = \varepsilon_0 A/d}$$

Med $d = 10^{-3}$ m, $A = \pi \cdot (0.10\text{m})^2$: $\underline{C = 0.28 \text{ nF}}$

Dielektrikum mellom platene øker kapasitansen :

$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E = \sigma/\varepsilon = Q/A\varepsilon_r\varepsilon_0 = V/d$

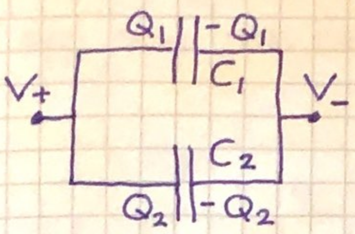
$\Rightarrow \quad C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d$, økt med en faktor ε_r

Enhet for permittivitet :

$$[\varepsilon] = [C \cdot d/A] = F/m$$

Kobling av kapasitanser [OS2 8.2; YF 24.2; LHL 20.2]

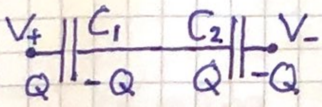
Parallellkobling:



Lik spenning $V = V_+ - V_- = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$ over C_1 og C_2, som lagrer total ladning $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$, slik at total kapasitans blir

$$C = Q/V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



$V = V_+ - V_-$

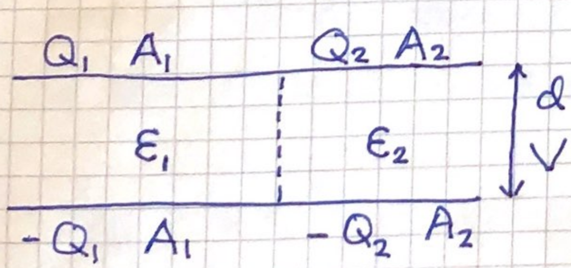
Lik ladning $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$ på C_1 og C_2, og total spenning $V = V_1 + V_2$ betyr at total kapasitans C er gitt ved

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

N kapasitanser i parallell: $C = \sum_{j=1}^{N} C_j$; i serie: $\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{C_j}$

Kondensator fylt med ulike dielektrika:

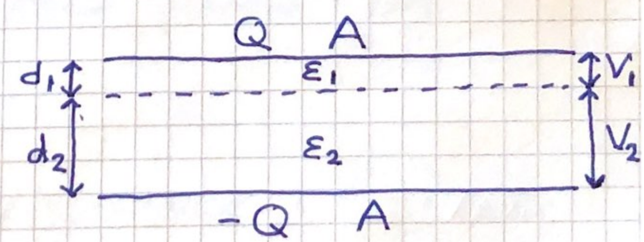
Parallellkobling



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d}$$

Seriekobling

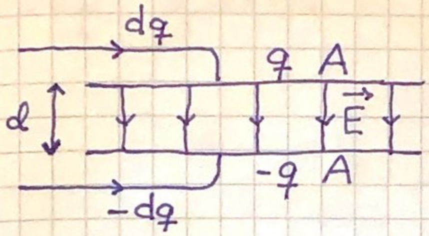


$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}$$

Energi i $\vec{E}$-felt [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

Opplading av en kondensator krever et arbeid, som ender opp som pot. energi lagret i $\vec{E}$-feltet mellom platene.



$v(q) = q/C$ = pot. forskjell mellom platene med ladning $\pm q$; økning til ladning $\pm(q+dq)$ øker den potensielle energien med

$dU = v(q)\,dq = q\,dq/C$

$\Rightarrow$ Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir total pot. energi:

$$U = \int dU = \int_0^Q q\,dq/C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Bruker $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = E \cdot d$ og får

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 A}{d}\,(E \cdot d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

Her er $A \cdot d$ volumet mellom platene, der vi har $E \neq 0$. Dermed:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenhet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

som gjelder generelt.

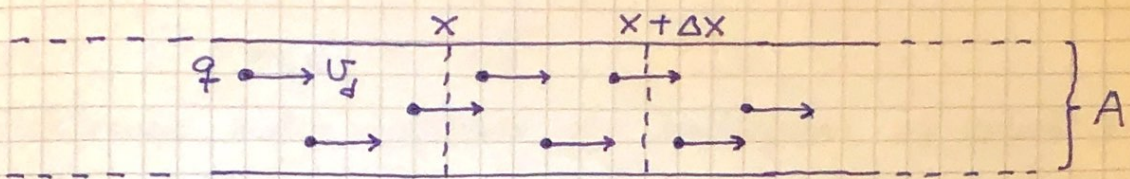
Eks: Beregn energitettheten i feltet mellom platene når $d = 1.0$ mm og $V = 1.0$ kV.

Løsn: $u_E = 0.5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (1000/0.001)^2\ \text{J/m}^3 = \underline{4.4\ \text{J/m}^3}$

Elektrisk strøm [OS2 9,10 ; YF 25,26 ; LHL 21,22]

Strøm og strømtetthet [OS2 9.1, 9.2 ; YF 25.1 ; LHL 21.1]

Ser på leder med tverrsnitt A, med n frie ladninger q pr volumenhet som har midlere driftshastighet v_d langs lederen :



strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengden ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \Delta Q / \Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} dQ/dt \quad ; \quad [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

I løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer <u>alle</u> frie ladninger, dvs ladningsmengden $q n A \Delta x$ i volumet $A \Delta x$, tverrsnittet ved $x + \Delta x$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A = n q v_d \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = n q \vec{v}_d \quad ; \quad [j] = A/m^2$$

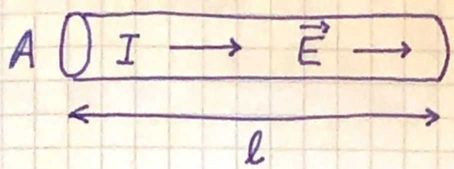
I metall er de frie ladningene elektroner med $q = -e$, slik at $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$

$\longrightarrow$ elektrisk strøm

$\longleftarrow$ elektronstrøm

Ohms lov [OS2 9.2–9.4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

Anta spenning V over leder med lengde ℓ og tverrsnitt A (og som er del av en lukket krets):



$V = E \cdot \ell$; $j = I/A$

N2 : $\vec{F} = m_e \vec{a} = -e\vec{E}$

Elektronene møter motstand pga kollisjoner og oppnår en midlere driftshastighet $\vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau$, der τ er midlere tid mellom kollisjoner. Dermed:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_d = -ne \cdot (-e\vec{E}/m_e) \cdot \tau = \sigma \cdot \vec{E}$$

med $\sigma = ne^2\tau/m_e$ = materialets elektriske ledningsevne (= konduktivitet). Dette er P. Drudes modell (ca 1900) for Ohms lov, på mikroskopisk form. Med $j = I/A$ og $E = V/\ell$ får vi Ohms lov på makroskopisk form:

$$V = R \cdot I \; ; \; R = \ell/\sigma A = \text{lederens motstand (resistans)}$$

Lederens konduktans: $G = R^{-1} \Rightarrow I = G \cdot V$; $G = \sigma A/\ell$

Materialets resistivitet: $\rho = \sigma^{-1} \Rightarrow \vec{j} = \vec{E}/\rho$

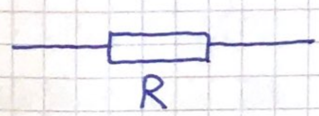
Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm)

$[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

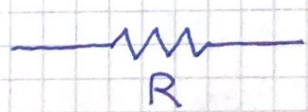
$[\rho] = \Omega\, m$

$[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$

Kretssymbol:



(evt



)

Eks: Anslå ledningsevnen til kobber.

Løsn: Siden $\sigma = ne^2\tau/m_e$, trenger vi estimater for n og τ. Kobber har molar masse 63 g/mol og massetetthet ca 9 g/cm³, og vi antar 1 fritt elektron pr atom

$$\Rightarrow n \approx \frac{9\cdot 10^6\ \mathrm{g/m^3}}{63\ \mathrm{g/mol}} \cdot 6\cdot 10^{23}\ \text{elektroner/mol} \approx 10^{29}\ \frac{\text{elektroner}}{\mathrm{m^3}}$$

Midlere tid mellom kollisjoner: $\tau = d/v_T$

Midlere lengde mellom kollisjoner: $d \approx 1$ nm

Midlere elektronfart: Kinetisk energi pr partikkel i elektrongassen er prop. med absolutt temperatur T,

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad ; \quad k_B = 1.38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = \text{Boltzmanns konstant}$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_BT/m_e} \approx 10^5\ \mathrm{m/s} \quad \text{ved romtemp. (ca 300 K)}$$

Dermed: $\tau \approx 10^{-9}\ \mathrm{m} / 10^5\ \mathrm{m/s} = 10^{-14}\ \mathrm{s}$

slik at $n\cdot\tau \approx 10^{15}\ \mathrm{s/m^3}$.

Videre er $e^2/m_e = 2.8\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C^2/kg}$ slik at ledningsevnen til kobber er ca $\sigma \approx 3\cdot 10^7$ S/m.

Eksperimentelt er $\sigma \approx 6\cdot 10^7$ S/m.

Hvis $A = 2.5\ \mathrm{mm^2}$ og $I = 1.0$ A blir driftshastigheten

$$v_d = j/ne = \underline{I/neA} \approx 2.5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m/s}$$

$\rho(T)$ [OS 29.3; YF 25.2; LHL 21.2, 21.5]

Metall: Økt $T \Rightarrow$ kortere tid τ mellom kollisjoner $\Rightarrow \rho$ øker

Exp: $\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$; $\alpha \approx 0.004\ \mathrm{K^{-1}}$

$\rho_0 = \rho(T_0)$ ved referansetemp. f.eks 293 K (20 °C)

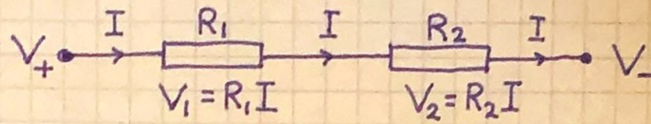
Halvleder (Si, Ge, GaAs, ...): Isolator, $n \approx 0$ ved $T = 0$ K.

Økt $T \Rightarrow n$ øker $\Rightarrow \rho$ avtar

Anvendelser: Diode, transistor, solcelle osv

Kobling av motstander [OS2 10.2; YF 26.1; LHL 21.3]

Seriekobling:

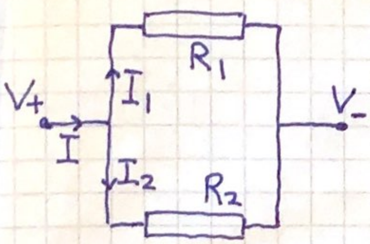


Lik strøm I gjennom motstander i serie

Total spenning: $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2) I$

$$\Rightarrow \quad R = V/I = R_1 + R_2$$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2:

$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$

Total strøm: $I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R}$

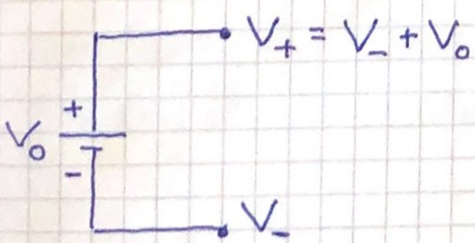
$$\Rightarrow \quad R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

Med N i serie: $R = \sum_{j=1}^{N} R_j$; i parallell: $R^{-1} = \sum_{j=1}^{N} R_j^{-1}$

DC-kretser [OS2 10 (9); YF 26 (25); LHL 22]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning $V_+ - V_- = V_0$ mellom polene.

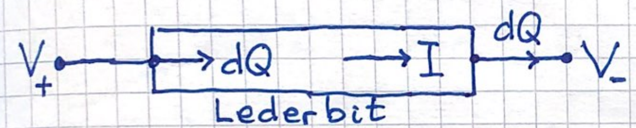
Eks: Kjemisk batteri. Solcelle.
Mobillader.

Kirchhoffs regler [OS2 10.3; YF 26.2; LHL 22.3]

- K1: Pga ladningsbevarelse er netto strøm inn mot og ut av et knutepunkt like store, $\sum_j I_j = 0$.
  Fortegn: $I_j > 0$ inn, $I_j < 0$ ut (eller omvendt)

- K2: Pga energibevarelse er summen av potensial-endringer rundt en lukket sløyfe null, $\sum_j V_j = 0$.
  Fortegn: $V_j > 0$ for potensialøkning (eller omvendt)

Elektrisk effekt [OS2 9.5; YF 25.5; LHL 22.2]



$V = V_+ - V_-$

Effekt inn: $P_{inn} = dU_{inn}/dt = V_+ dQ/dt = V_+ I$

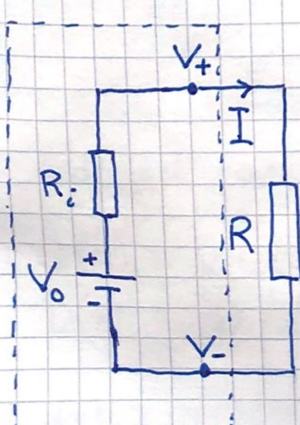
— " — ut: $P_{ut} = dU_{ut}/dt = V_- dQ/dt = V_- I$

Effekttap i lederbiten: $\underline{P} = P_{inn} - P_{ut} = (V_+ - V_-) \cdot I \underline{= V \cdot I}$

Hvis ohmsk motstand: $V = RI \Rightarrow P = VI = RI^2 = V^2/R$

Eksempler:

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde



K2: $V_0 - R_i I - RI = 0$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

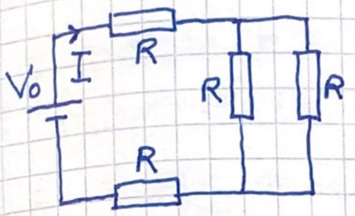
R_i = indre motstand i reell spenningskilde

$R_i = 0$ i ideell spenningskilde

Polspenning:

$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < 0$ når $R_i > 0$ (og $I > 0$)

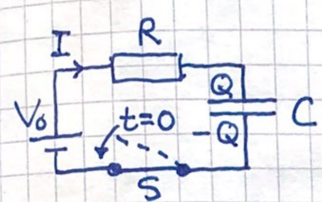
Eks 2: Hva er total motstand?



$$R_{tot} = R + (R^{-1} + R^{-1})^{-1} + R = \underline{\underline{5R/2}}$$

$$(\Rightarrow I = 2V_0/5R)$$

Eks 3: RC-krets [OS2 10.5; YF 26.4; LHL 22.4]



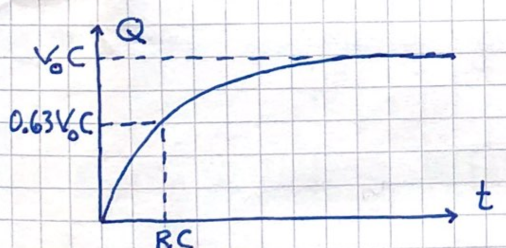
Bestem $Q(t)$ og $I(t)$ når bryteren S lukkes ved $t=0$ og $Q(t=0)=0$, for (a) $R = 100\,\Omega$, $C = 100\,nF$; (b) $R = 1\,M\Omega$, $C = 1\,\mu F$

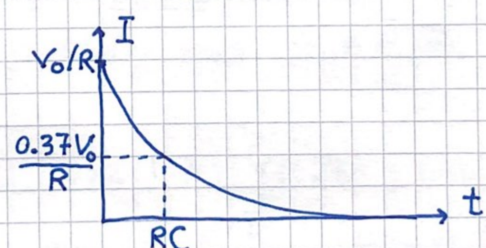
$$K2 \Rightarrow V_0 - RI - Q/C = 0 \quad ; \quad I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow RC\, dQ/dt = V_0C - Q \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\left\{\frac{Q - V_0C}{-V_0C}\right\} = -t/RC$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0C\left\{1 - e^{-t/RC}\right\} \quad ; \quad I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$





$\tau = RC$ = kretsens <u>tidskonstant</u> = et mål for hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren

$$Q(\tau) = V_0C(1 - e^{-1}) \approx 0.63\,V_0C \quad ; \quad Q(3\tau) \approx 0.95\,V_0C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R}\cdot e^{-1} \approx 0.37\,V_0/R \quad ; \quad I(3\tau) \approx 0.05\,V_0/R$$

(a) $\tau = 100\,\Omega \cdot 10^{-7}\,F = 10^{-5}\,s$

(b) $\tau = 10^{6}\,\Omega \cdot 10^{-6}\,F = 1\,s$