Øving 13

Oppgitt (for oppgavene 1 – 3):
$F = GMm/r^2$ $U = -GMm/r$ Jordmassen: $M = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg. Jordradien: $R = 6378$ km.
$G = 6.6742 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Trondheims breddegrad: 63°26' nord (' = minutter = 1/60 grad).

Oppgave 1: Pendelur ved sjøen og på fjellet

a) Hvordan varierer en pendels svingetid T med høyden over havet h?

b) Hvor mye vil et pendelur saktne seg i løpet av ei uke hvis du flytter det fra hytta ved sjøen (der uret går riktig) til hytta på fjellet 630 moh?

Oppgave 2: Satellitt i atmosfæren

En satellitt med masse $m = 5000$ kg går i sirkulær bane i høyde 8000 km over jordoverflaten. Den blir utsatt for atmosfærisk friksjon slik at banehøyden over tid reduseres til 650 km. Anta at banen til enhver tid er sirkulær. Finn for denne baneendringen forandringen i satellittens *a*) hastighet; *b*) kinetiske energi; *c*) potensielle energi; *d*) totale mekaniske energi.

Oppgave 3: Geostasjonær satellitt

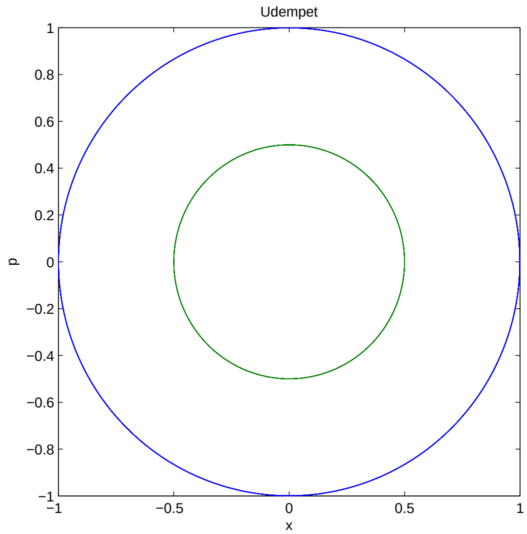
En satellitt som alltid holder seg på samme plass over et fast sted på jorda kalles geostasjonær. Satellittens omløp må da følge jordas omløp. Geostasjonære satellitter brukes bl.a. til radio- og TV-kommunikasjon ("paraboler").

a) I hvilken høyde over jordoverflaten må en geostasjonær satellitt befinne seg?

b) Hva er den største breddegrad på jorda hvor man kan ha fri sikt til satellitten? Husk at en geostasjonær satellitt må ligge rett over ekvator. Anta at horisonten er flat (dvs ingen fjell).

c) Hvilken vinkel over horisonten må en parabol i Trondheim peke for å peke rett mot satellitten?

Oppgave 4: Faseplott for endimensjonal oscillator



Hvis vi tegner opp posisjon x og impuls p for en oscillator i samme diagram, får vi et såkalt *faseplott*. Generelt kaller man rommet med en akse for hver komponent av posisjon og impuls for et *faserom*, på engelsk *phase space*. Et punkt i faserommet representerer da oscillatorens mekaniske *tilstand*, gitt ved posisjon $\boldsymbol{r}$ og impuls $\boldsymbol{p}$, eller, som her, i en dimensjon x og p.
Hvis oscillatorens masse er $m = 1$, fjærkonstanten er $k = 1$ og amplituden er $A = 1$, blir ligningen for tilfellet uten demping

$$\ddot{x} + x = 0,$$

med løsning

$$x(t) = \sin t \quad ; \quad p(t) = \cos t,$$

og kurven for (x, p) blir den blå (dvs den største) sirkelen i figuren til venstre. Den grønne sirkelen (den minste) viser (x, p) med amplitude $A = 1/2$. Figuren er laget i Matlab, med programmet xp_eksempel.m, som er lagt ut under Dokumenter. Etter hvert som tiden går (variabelen `tid` i programmet), følger oscillatoren (evt massen eller partikkelen) den aktuelle kurven i faserommet, her med klokka, slik at ett omløp tar tiden lik en periode T. Her er $T = 2\pi$.

Hvis vi inkluderer en dempingskraft $-b\dot{x}$, blir bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Divisjon med m og innførsel av $\beta \equiv b/2m$ og $\omega_0^2 \equiv k/m$ gir

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Løsningen med *underkritisk* demping, $\beta < \omega_0$, er

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin\omega t,$$

der $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Løsningen med *overkritisk* demping, $\beta > \omega_0$, er

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cosh\alpha t,$$

der $\alpha \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. (I disse to uttrykkene for $x(t)$ kan vi tenke oss at vi allerede har brukt en initialbetingelse til å fastlegge den ene integrasjonskonstanten.)

Oppgaven: Sett massen $m = 1$, regn ut oscillatorens impuls $p = m\dot{x} \to \dot{x}$, og legg til de nødvendige linjene i Matlab-programmet som lager faseplottene for de to tilfellene underkritisk og overkritisk demping. Velg selv tallverdier for A, β og ω_0. For tilfellet med underkritisk demping kan du gjerne plotte kurven for to ulike verdier av amplituden A.

Noen svar:
$1b$: Ca et minutt. $2a$: 2266 m/s $2c$: -145 GJ
$3a$: 35868 km $3b$: 81°19' $3c$: 18°20'