(31.08.11) Størrelser og enheter. SI-systemet [YF 1]

- Fysisk størrelse: Målbar (som regel!) størrelse for fysisk fenomen.

Eks: Lengde, $\underset{\text{symbol}}{\ell} = \underset{\text{måltall}}{17.3}\ \underset{\text{enhet, inkl. dekadisk prefiks (k)}}{\text{km}}$

Vanlig notasjon: $[\ell] = \text{m}$

"enheten til lengde er meter"

- SI-enheter:

Grunnenheter (7 stk):

Navn	Symbol (f.eks.)	Enhet	
lengde	$\ell, s, \ldots$	m	De viktige i MekFys.
masse	$m, M, \ldots$	kg	
tid	$t, \ldots$	s	
elektrisk strømstyrke	I	A	(ElMag)
temperatur	T	K	(Termisk)
stoffmengde	n	mol	(Kjemi, MekFys...)
Lysstyrke	I	cd	(Sjelden!)

Sammensatte enheter:

hastighet (fart)	v	$\text{m/s} = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	
akselerasjon	a	$\text{m/s}^2 = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	
kraft	F	$\text{kg m/s}^2 \overset{\text{def}}{=} \text{N}$	= av-ledete enheter
trykk	p	$\text{N/m}^2 \overset{\text{def}}{=} \text{Pa}$	
energi	$W, E, \ldots$	$\text{N m} \overset{\text{def}}{=} \text{J}$	

Dekadiske prefikser:

Navn	Symbol	Tallfaktor
femto	f	10^{-15}
piko	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
mikro	μ	10^{-6}
milli	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
desi	d	10^{-1}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}

Omregning til og fra SI-enheter; eksempler:

- Hvor fort er 10 m/s angitt i km/h? (1 h = 1 time)

$$10\ \text{m/s} = 10 \cdot \underbrace{(10^{-3}\ \text{km/m})}_{=1} \cdot \underbrace{(3600\ \text{s/h})}_{=1}\ \text{m/s} = 36\ \text{km/h}$$

- Hva er energimengden 1 kWh (evt 1 kWt) i SI-enheter?

$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}$ (effekt; energi pr tidsenhet)

$$1\ \text{kWt} = 1 \cdot 1000\ \text{J/s} \cdot 3600\ \text{s} = 3.6 \cdot 10^{6}\ \text{J} = 3.6\ \text{MJ}$$

Kinematikk [YF 2 og 3, LL1]

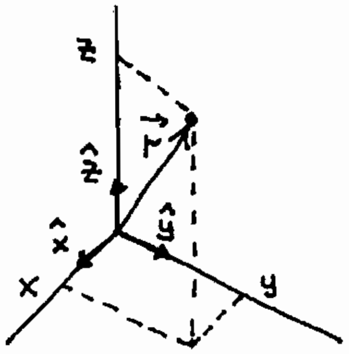
= beskrivelsen av bevegelse

[Senere: Dynamikk – Hva forårsaker bevegelsen? Krefter, Newtons lover.]

Ser først på punktpartikler; kan betraktes som modell / tilnærming for virkelige legemer.

[Senere: Stive legemers dynamikk. Rotasjon etc.]

Posisjon:



$$\vec r(t) = x(t)\,\hat x + y(t)\,\hat y + z(t)\,\hat z$$

= posisjon angitt i fast (dvs: tidsuavhengig) kartesisk koordinatsystem (høyrehendt)

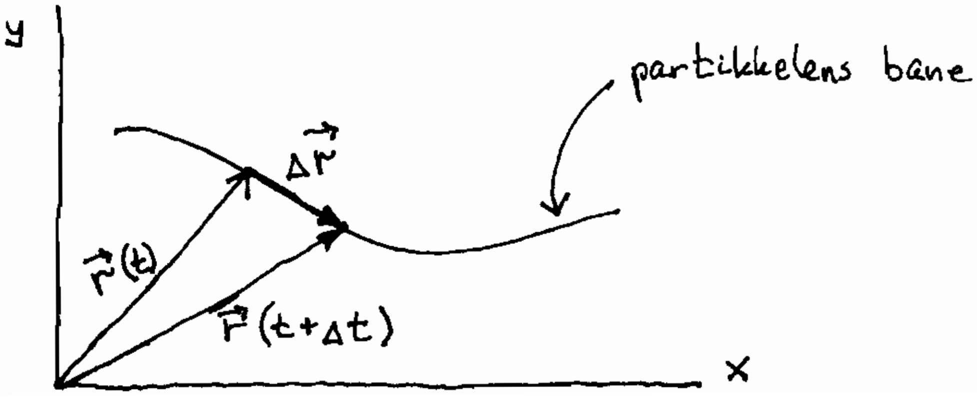
$\hat x, \hat y, \hat z$ = enhetsvektorer i hhv (positiv) x; y; z-retning

$|\hat x| = |\hat y| = |\hat z| = 1$; $[\hat x] = [\hat y] = [\hat z] = 1$ (dvs dimensjonsløs)

Alternativ notasjon:

$\hat x = \hat\imath = \vec e_x = \vec u_x$; $\hat y = \hat\jmath = \dots$; $\hat z = \hat k = \dots$

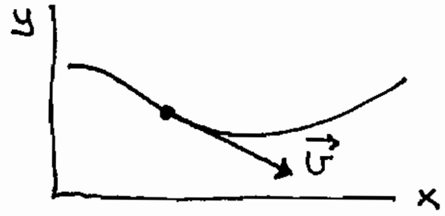
Bevegelse i (f.eks) xy-planet [enklere å tegne i 2D enn 3D]:



Hastighet = forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}$$

(Vanlig notasjon: $\frac{d}{dt}(\dots) = \dot{(\dots)}$, $\frac{d^2}{dt^2}(\dots) = \ddot{(\dots)}$ etc)



$\vec v$ er rettet tangentielt til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet :

$$\vec a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec v}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt} = \dot{\vec v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec r}{dt}\right) = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \ddot{\vec r}$$

På komponentform (her: kartesiske komponenter) :

$$\begin{array}{ccccccc} \vec v & = & v_x\,\hat x & + & v_y\,\hat y & + & v_z\,\hat z \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \frac{d\vec r}{dt} & = & \frac{dx}{dt}\,\hat x & + & \frac{dy}{dt}\,\hat y & + & \frac{dz}{dt}\,\hat z \end{array}$$

Tilsvarende: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot x$ etc.

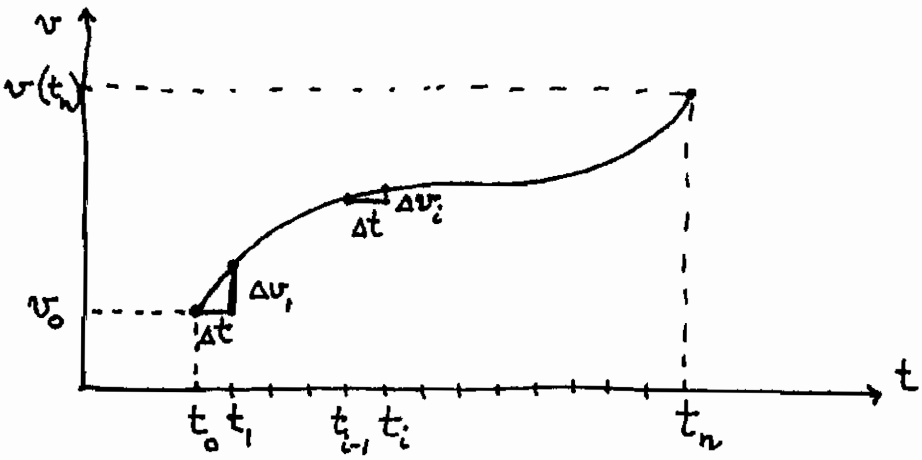
Vi finner altså $\vec a$ og $\vec v$ fra hhv $\vec v$ og $\vec r$ ved derivasjon (mhp tida t).

Omvendt kan vi finne $\vec v$ og $\vec r$ fra hhv $\vec a$ og $\vec v$ ved integrasjon (mhp t).

Ser for enkelhets skyld på 1D, dvs bevegelse langs rett linje, f.eks x-aksen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \implies \Delta v = a \cdot \Delta t$$

Anta $v = v_0$ ved $t = t_0$:



$$\implies v(t_n) = v_0 + \Delta v_1 + \dots + \Delta v_i + \dots + \Delta v_n$$

$$= v_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i$$

$$\approx v_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \Delta t$$

Når vi nå lar $\Delta t \to 0$, vil $\sum \to \int$ og $\Delta t \to dt$

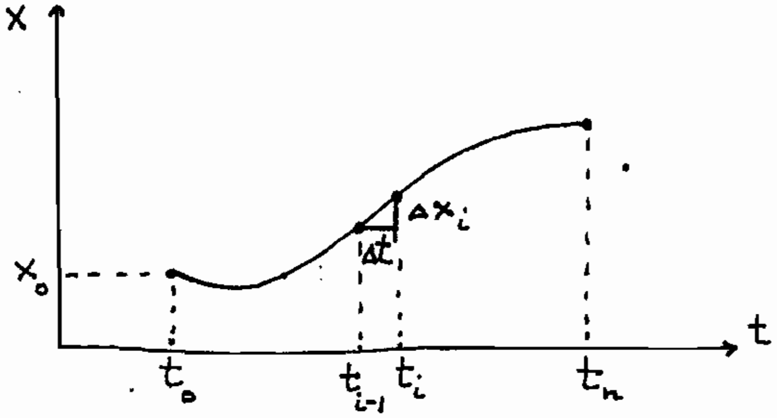
$$\implies v(t_n) = v_0 + \int_{t_0}^{t_n} a(t)\,dt$$

$$\implies v(t_n) - v_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t_n)} dv = \int_{t_0}^{t_n} a(t)\,dt$$

Tilsvarende:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \implies \Delta x = v \cdot \Delta t$$

Anta $x = x_0$ ved $t = t_0$:



$$\Rightarrow x(t_n) = x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n$$
$$= x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$
$$\approx x_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \Delta t$$
$$\xrightarrow{\Delta t \to 0} x_0 + \int_{t_0}^{t_n} v(t)\, dt$$

$$\Rightarrow x(t_n) - x_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t_n)} dx = \int_{t_0}^{t_n} v(t)\, dt$$

Hit 31.08.11

05.09.11

Kinematikk (forts.)

Oppsummering fra sist, inkl. generalisering til 3D av integral-sammenhengene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (v_x = \dot{x} \text{ etc.})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (a_x = \ddot{x} \text{ etc})$$

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \qquad \left(\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \text{ etc} \right)$$

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt \qquad \left(\int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \text{ etc} \right)$$

* * *

Viktig spesialtilfelle: $\underline{\vec{a} = \text{konstant}}$

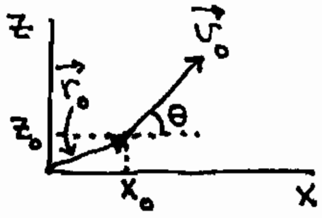
Anta $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ (gitte initialbetingelser)

Da er: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot(t-t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2$$

Eks: Kast i tyngdefeltet, $\vec{a} = -g\hat{z}$.

Ved $t_0 = 0$:



$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t \cos\theta$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir <u>banen</u>:

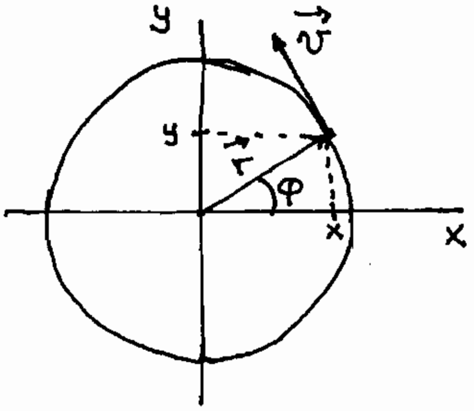
$$z(x) = z_0 + [x(t) - x_0]\tan\theta - \frac{g}{2}\frac{[x(t)-x_0]^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

=PARABEL

Annet viktig spesialtilfelle:

Sirkelbevegelse [YF 3.4, LL 1.7, eks 1.6]

Anta først konstant $v = |\vec{v}|$ (uniform sirkelbev.) og bev. i xy-planet:



Ser fra figur:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

med $r = |\vec{r}| = $ konst.

Uunnværlig størrelse:

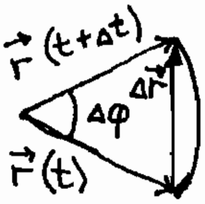
Vinkelhastighet (≡ vinkelfrekvens) = vinkelendring pr tidsenhet

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}}$$

$[\omega] = s^{-1}$

(evt. rad/s)

Vinkel = buelengde delt på radius: $\boxed{\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}}$

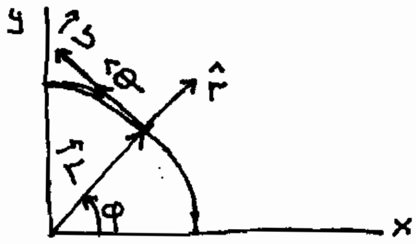


Δs = sirkelbueelement

Når $\Delta t \to 0$, vil også $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$,
og $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r\Delta\varphi$

Dermed: $\underline{v} = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\dot{\varphi} = \underline{r\omega}$

Hva med $\vec{v}$, inkl. retningen? $\Delta\vec{r}$ og $\vec{v}$ har samme retning, og $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$. Altså er $\vec{v}$ tangentiell til sirkelbanen:



$$\Rightarrow \quad \vec{v} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

($\hat{\varphi}$ = enhetsvektor i "φ-retning", dvs retning som øker φ uten å endre r)

Når v, og dermed ω, er konstant, øker φ lineært med t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega\,dt \xrightarrow[\text{ved } t=0]{\text{anta } \varphi=0} \varphi(t) = \omega t$$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = r\cos\omega t\cdot\hat{x} + r\sin\omega t\cdot\hat{y}$$

Kartesiske komponenter av $\vec{v}$:

$$\dot{x}(t) = -r\omega\sin\omega t, \qquad \dot{y}(t) = r\omega\cos\omega t$$

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse

$$\ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x(t)$$
$$\ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y(t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} = -\omega^2\left[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}\right] = -\omega^2\vec{r}(t)$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)}$$

Sentripetalaks.
(retning inn mot sentrum)

Da $v = \omega r$: $a = |\vec{a}| = \omega^2 r = v^2/r$ (mer kjent?)

Kan også skrive: $\vec{a} = -\omega^2 r \, \hat{r}(t) = -(v^2/r)\, \hat{r}(t)$

[Merk at $\hat{r}$ og $\hat{\varphi}$ avhenger av stedet (x,y) og dermed av tida t, i motsetning til $\hat{x}$ og $\hat{y}$ som ligger fast i et fast kartesisk koordinatsystem.]

Noen flere nyttige størrelser:

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, $[\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = tid pr omdreining, $[T] = s$

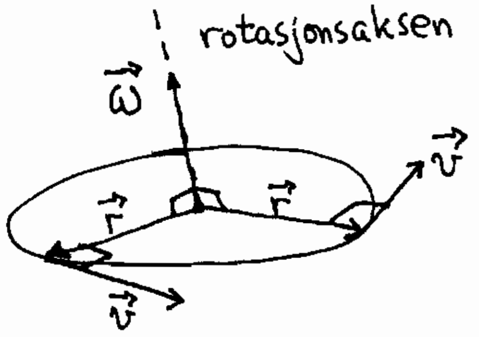
Frekvens: f = antall omdreininger pr tidsenhet, $[f] = \text{Hz}\ (= s^{-1})$

Dette gir diverse sammenhenger, f.eks:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

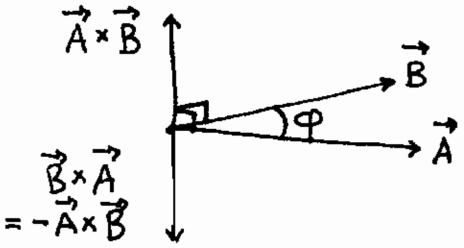
Vinkelhastighet som vektor



Ved å la $\vec{\omega}$ peke langs rotasjonsaksen kan vi skrive

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Kryssprodukt:



$|\vec A \times \vec B| = A \cdot B \cdot \sin\varphi$

Retning med høyrehåndsregel.

For sirkelbevegelsen ser vi at $\vec\omega \perp \vec r$ (og $\vec\omega \perp \vec v$)

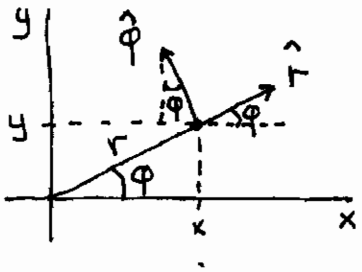
$\Rightarrow |\vec\omega \times \vec r| = \omega \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega r = v$; OK!

Hvis $\vec\omega$ opp : $\vec\omega \times \vec r$ tangentielt mot klokka } se fig. s 11
Hvis $\vec\omega$ ned : ———"——— med —"—

Merk: $\hat x \times \hat y = \hat z, \quad \hat y \times \hat z = \hat x, \quad \hat z \times \hat x = \hat y$

$\hat x \times \hat x = \hat y \times \hat y = \hat z \times \hat z = 0$

Litt (mer) om polarkoordinater:



Ser fra figur: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,
$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\varphi = x/y$

Ser også: $\hat r = \hat x \cos\varphi + \hat y \sin\varphi$, $\hat\varphi = -\hat x \sin\varphi + \hat y \cos\varphi$

[Øving 2: Trening med $\hat r, \hat\varphi, \dot{\hat r}, \dot{\hat\varphi}$ når $\varphi = \omega t$, dvs sirkelbev.]

Merk: $\hat r \cdot \hat\varphi = 0$, $\hat r \cdot \hat r = \hat\varphi \cdot \hat\varphi = 1$,
$\hat r \times \hat\varphi = \hat z$, $\hat z \times \hat r = \hat\varphi$ etc.

Hit 05.09.11

07.09.11

Newtons Lover [YF 4, LL2]

- Empiriske lover, dvs basert på eksperimenter
- For litt historikk, se YF 4-intro, LL1 - Essay (Impetus)

Newtons 1. lov (N1): $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Når netto ytre kraft $\vec{F}$ er null, forblir legemet i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

Newtons 2. lov (N2): $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Når det virker en netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme, får legemet en akselerasjon proporsjonal med nettokraften. m = legemets masse.

Generalisering av N2 dersom massen ikke er konstant:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad [= m\vec{a} \text{ hvis } m \text{ er konst.}]$$

Eks: Rakett som forbrenner drivstoff.
[Kommer tilbake til dette senere.]

Newtons 3. lov (N3): $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Når A virker på B med kraften $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraften $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$, dvs motsatt rettet og like stor i absoluttverdi.

—— • ——

- $[F] = \text{kg m/s}^2 \equiv \text{N}$ (newton)
- Krefter virker alltid mellom to legemer / partikler (jf N3!), vi sier at legemene vekselvirker med hverandre. (Eng: "interact")

Fundamentale vekselvirkninger (v.v.) [YF 5.5, LL 2.1]

Gravitasjons v.v. [FY3452]

Tiltrekkende kraft mellom to legemer pga masse.
Lang rekkevidde. Meget svak.

Elektromagnetiske v.v. [FY1003/TFY4155, TFY4240, ...]

Tiltr. eller frastøtende kraft pga elektrisk ladning.
Lang rekkevidde (som grav.). Mye sterkere enn gravitasjon.

Svake v.v. [FY3402]

Kort rekkevidde. Årsak til β-decay (en form for radioaktiv stråling): $\underset{(\text{nøytron})}{n} \rightarrow \underset{(\text{proton})}{p} + \underset{(\text{elektron})}{e} + \underset{(\text{antinøytrino})}{\bar{\nu}}$

Sterke v.v. [FY3466]

Kort rekkevidde. Holder kjernepartikler sammen i atomkjernen.
Mye sterkere enn el.magn. krefter på avstander $\sim 10^{-15}$ m.

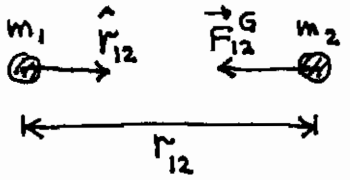
60- og 70-åra: Felles teori for el.magn. og svake v.v.:
Elektrosvak v.v. Verifisert eksperimentelt.

Senere: GUT (Grand Unified Theory)
Strengteori
TOE (Theory of everything)
⋮
Ikke verifisert eksperimentelt.

I MekFys er bare gravitasjon og elektromagn. krefter relevante.

Newtons gravitasjons lov:

$$\vec{F}_{12}^{G} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

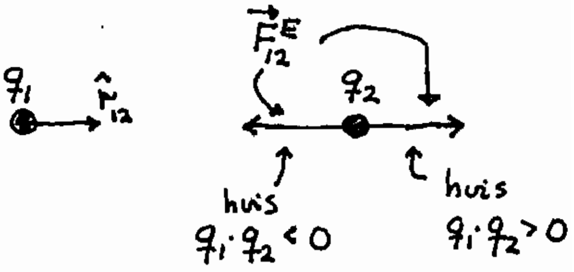


$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2 = gravitasjonskonstanten

[G måles i labøkt nr 4]

Coulombs lov:

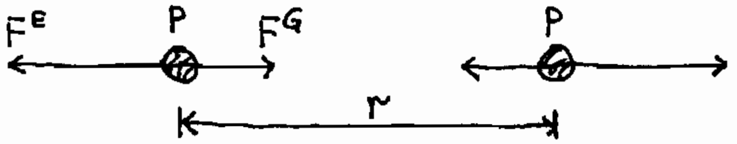
$$\vec{F}_{12}^{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$



$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2 , $[q] = C$ = coulomb

(ε_0 = vakuumpermittiviteten; mer i FY1003/TFY4155)

Eks: For to protoner, hva er $|F^G/F^E|$?



$m_p \approx u \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg , $q_p = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$$\Rightarrow |F^G/F^E| \approx \frac{G u^2}{e^2/4\pi\varepsilon_0} \approx \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (1.67 \cdot 10^{-27})^2}{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9} \sim \underline{10^{-36}}$$

$\Rightarrow$ Dagliglivet kun styrt av F^E ?!

Nei! Atomer har Z protoner og Z elektroner

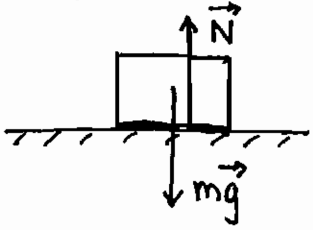
$\Rightarrow q_{Atom} = Ze - Ze = 0$

$\Rightarrow$ elektriske krefter er i stor grad "nøytralisert" pga at tiltr. og frastøt. krefter kansellerer

$\Rightarrow$ gravitasjon ("tyngdekrefter") styrer dagliglivet sammen med el.magn. krefter

Elektrostatiske krefter i MekFys, eksempler:

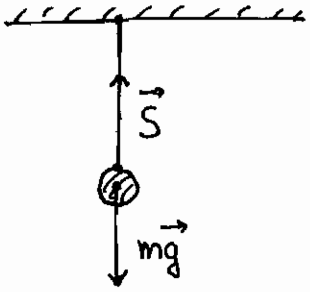
- Trykk-krefter



Kloss i ro $\Rightarrow$ $N = mg$ (pga N1)

Normalkraft N skyldes frastøt. coulombkrefter mellom kloss og underlag.

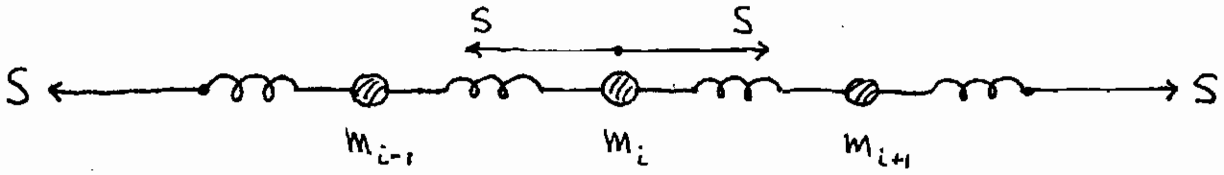
- Strekk-krefter



Kule i ro $\Rightarrow$ $S = mg$ (pga N1)

Snorkraft S skyldes tiltrekkende coulombkrefter mellom snor og kule.

Inne i strukket snor, stang eller fjær (modell):

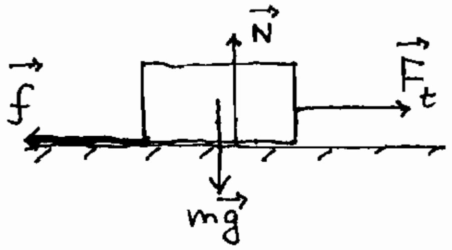


- m_i i ro $\Rightarrow$ snorkraft S like stor i begge retninger

Hvis $M_{snor} \cdot g \ll S$, har vi tilnærmet masseløs snor.

Da må S være like stor langs hele snora. Ofte nyttig!

Friksjonskrefter



$\vec{F}_t$ = ytre trekk-kraft

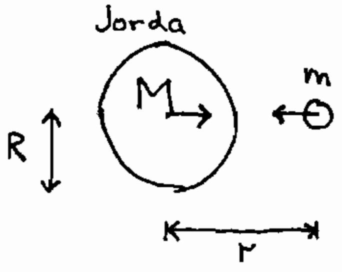
$\vec{f}$ = friksjonskraft

Hvis kloss er i ro: $f = F_t$ (N1)

Hvis kloss akselererer: $f < F_t$

Alle disse (trykk-, strekk-, friksjonskrefter) er <u>kontaktkrefter</u>. Sammen med tyngdekraften styrer de mye av hverdagen omkring oss.

Masse og tyngde [YF 4.4, LL 2.5]



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Masse m <u>på</u> jordoverflaten trekkes mot jorda med <u>tyngdekraften</u> (M = jordmassen, R = jordradien)

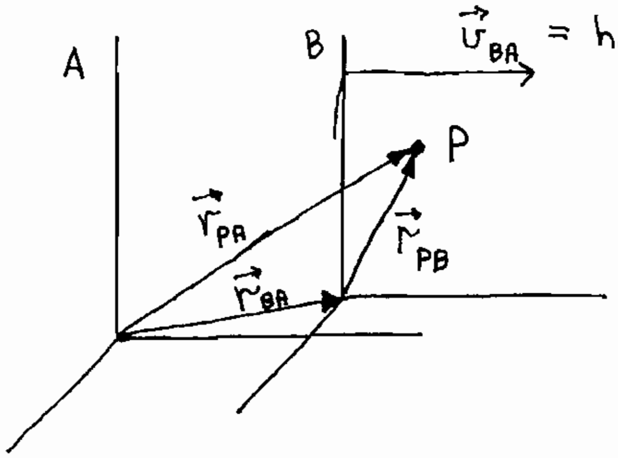
$F = mg$, $g = \frac{GM}{R^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ = tyngdeaks.

Hvis mg er eneste kraft: Fritt fall

$\Rightarrow mg = ma$ (N2)

$\Rightarrow a = g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$

Newtons lover og bevegelse i ulike referansesystem
[YF 3.5 + 4.2, LL 1.9 + 2.7]



$\vec{v}_{BA}$ = hastighet til B målt i A

A: Labsystem (i ro)

B: system i bevegelse

P: objekt

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

Vi ser at kun hvis $\vec{a}_{BA} = 0$, dvs $\vec{v}_{BA}$ = konst., vil observatører i A og B måle samme akselerasjon for objektet P, $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$. Da er A og B inertialsystemer relativt hverandre. Hvis N1 gjelder i A, vil da N1 også gjelde i B. Videre, hvis en netto ytre kraft $\vec{F}$ virker på P, vil samme ligning, $\vec{F} = m\vec{a}$, med $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} = \vec{a}$, beskrive den observerte bevegelsen til P for observatørene i både A og B. Dette er i samsvar med relativitetsprinsippet, som slår fast at fysikkens lover må ha samme form i alle inertialsystemer.

Jorda roterer omkring sin egen akse (og omkring sola).
⇒ Jordoverflaten er bare tilnærmet inertialsystem.
I roterende ref. system oppleves krefter som skyldes rotasjonen: sentrifugalkraft og corioliskraft.

hit 07.09.11 [Kanskje mer om det senere!]

12.09.11

Kort rep. fra sist:

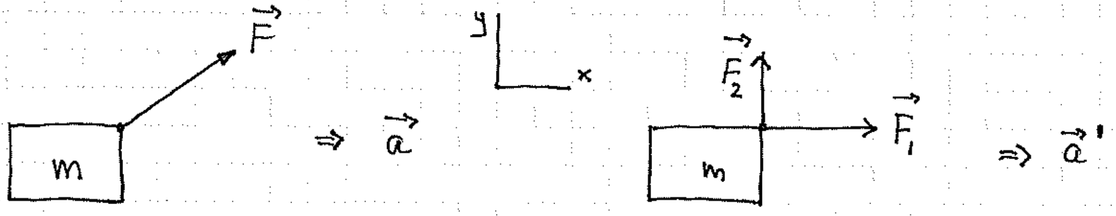
N1 : $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

* * *

Superposisjonsprinsippet (SPP) [YF 4.1]



Hvis $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ er $\vec{a}' = \vec{a}$

Kanskje opplagt, i hvert fall nyttig!

Kan regne ut $x(t)$ fra $\vec{F}_1$ og $y(t)$ fra $\vec{F}_2$ <u>separat</u>.

Ofte en betydelig forenkling.

Anvendelser av Newtons Lover [YF 5, LL 3]

Strategi:

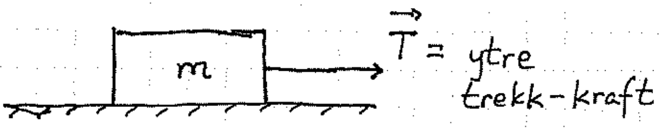
- Identifiser alle <u>ytre</u> krefter $\vec{F}_i$ som virker på legemet/-ene.
  (Tyngde $m\vec{g}$, Snordrag $\vec{S}$, Friksjon $\vec{f}$, Normalkraft $\vec{N}$, ...)
- Tegn figur(er): <u>Kraftdiagram</u> (Free Body Diagram, Frilegemediag.)
  [YF 4.6, LL 3.2]
  - * Legemets omgivelser representeres av krefter på legemet
  - * Tegn <u>alle</u> ytre krefter <u>en gang</u>
  - * Pil starter der $\vec{F}_i$ angriper
  - * Pilenes lengde prop. med $|\vec{F}_i|$

- Velg passende koordinatsystem
- Bruk $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$ (N2) evt $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (N1)

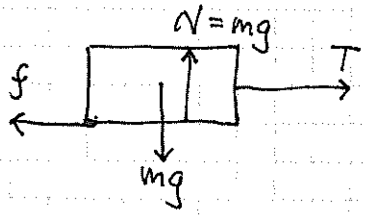
Friksjon [YF 5.3, LL 3.1]

- Kontaktkrefter rettet <u>mot</u> (potensiell) relativ bevegelse
- Ønsket (svinge, bremse bil) eller uønsket (dårlig glid på ski, energitap i motor (⇒ varme) ...) !

Tørr friksjon



⇒ Kraft-diagram:



Statisk friksjon: (kloss i ro)

N1 ⇒ $f = T$ $\quad (\vec{f} = -\vec{T})$

Erfaringsmessig (siden da Vinci ca 1500 !):

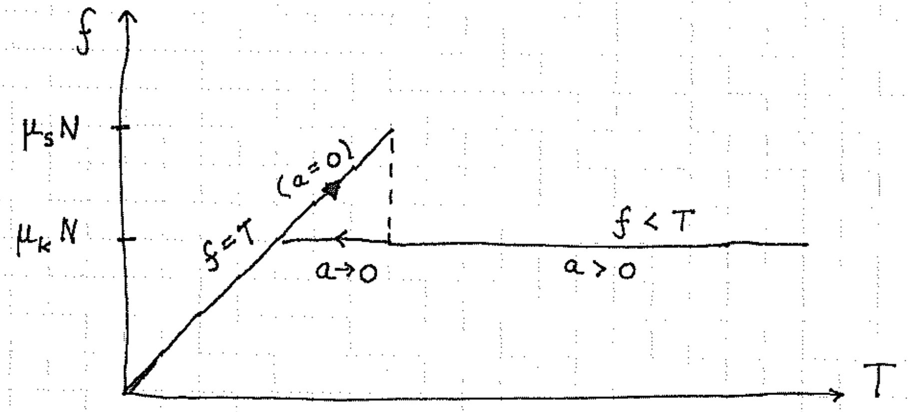
$$f \leq \mu_s \cdot N \overset{\text{(her)}}{=} \mu_s mg$$

Kinetisk friksjon:

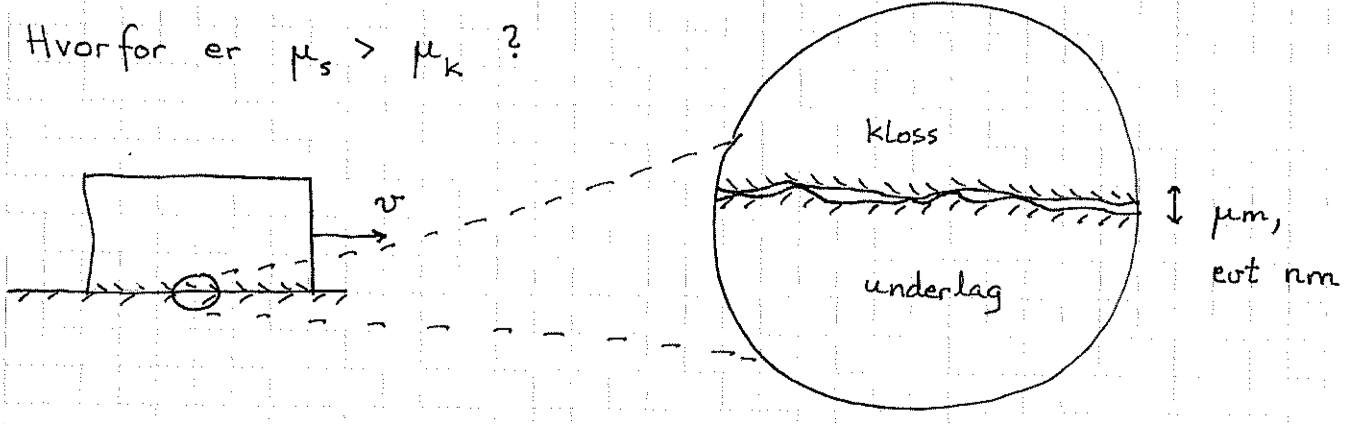
$$f = \mu_k \cdot N$$

$\mu_k < \mu_s$ (alltid, såvidt meg bekjent)

$[\mu_k] = [\mu_s] = 1$



Hvorfor er $\mu_s > \mu_k$?



$v = 0$ ⇒ godt grep mellom flatene [på molekylnivå: bindinger]

$v > 0$ ⇒ dårligere grep, tendens til å flyte oppå [bindinger brytes og dannes, som krever energi ⇒ friksjonsarbeid, varme]

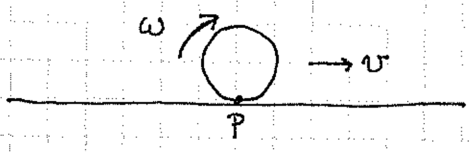
⇒ $\mu_s > \mu_k$

Tallverdier :

Materialer	μ_s	μ_k
tre mot tre	0.25-0.50	0.2
ski mot snø	0.1	0.05
gummi mot tørr asfalt	1.0	0.8
—— " —— våt —"—	0.30	0.25

} sånn omtrent

Rulling:



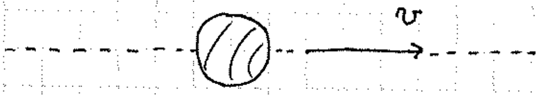
Hvis ren rulling:

Kontaktpunkt P i ro

$\Rightarrow$ praktisk talt null friksjonsarbeid

Friksjon i gasser og væsker (fluider) [YF 5.3]

Anta rotasjonssymmetrisk legeme omkring $\vec{v}$-aksen:



- For tilstrekkelig liten v:

  "Pen", laminær strømning rundt legemet, $\vec{f}_l = -k\vec{v} = -kv\hat{v}$

  Kan utledes fra Newtons lover

  Eks: Kule. $f_l = 6\pi\eta R v$

  R = kulas radius, η ("eta") = fluidets viskositet

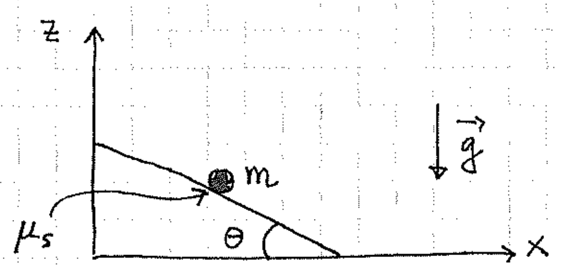
  [Mer i TEP4105 Fluidmekanikk]

- Stor v:

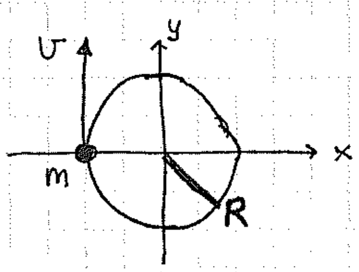
  Turbulent strømning, $\vec{f}_t = -Dv^2\hat{v}$ ("drag")

  Tommelfingerregel

Eks 1: Dosert sving [YF 5.4, LL 3.4]



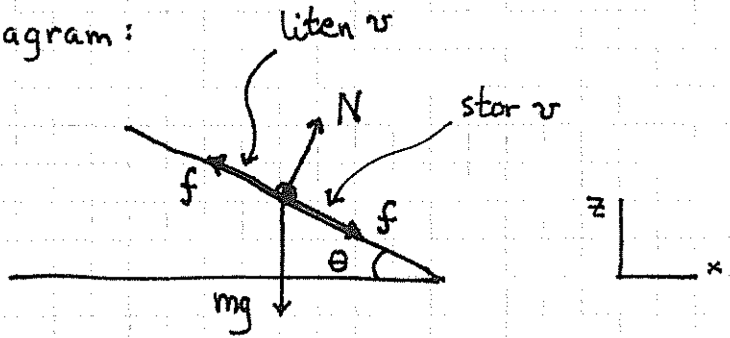
θ = doseringsvinkel



R = krumningsradius

Finn $v_{min} < v < v_{max}$ slik at bilen ikke sklir inn/ut!

Kraftdiagram:



$$f_{max} = \mu_s N$$

uniform sirkelbevegelse : $a = v^2/R$

[Merk: Kan her ikke sette N lik $mg \cdot \cos\theta$!
Vi har akselerasjon ⊥ skråplanet !]

Dermed: $\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = (mv^2/R)\,\hat{x}$

i x-retn: $N\sin\theta \pm \mu_s N\cos\theta = mv^2/R$ (1)

i z-retn: $N\cos\theta \mp \mu_s N\sin\theta = mg$ (2)

(Med $f = \mu_s N$ gir dette v_{max} (øvre fortegn) og v_{min} (nedre fortegn).)

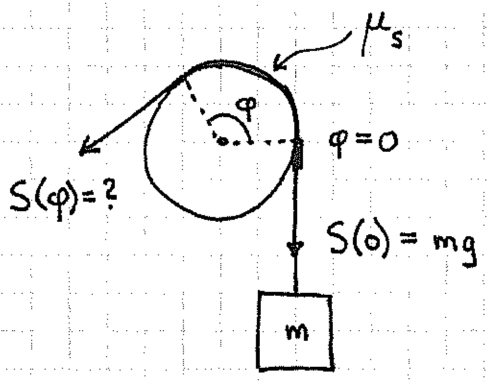
(1)/(2) ⇒ $$v_{\substack{max\\min}} = \sqrt{gR\,\frac{\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta}{\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta}} = \underline{\underline{\sqrt{gR\,\frac{\tan\theta \pm \mu_s}{1 \mp \mu_s\tan\theta}}}}$$

Hit
12.09.11

[Analyse av resultatet : 19.09.11]

14.09.11

Eks 2: Tau rundt sylinder

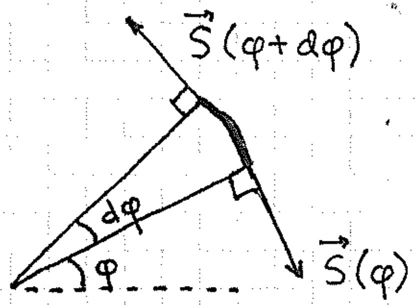


Demo:

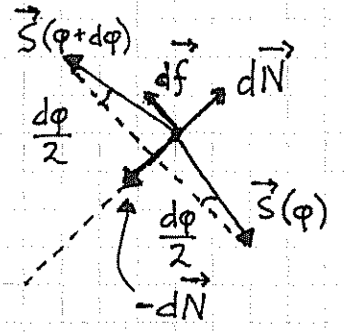
- PVC-rør
- Basthyssing
- Blylodd (ca 335 g)
- Fjærvekter

Strategi:

- Krefter? Figur! N1! .....
- Tenk smått! Tenk differensielt!

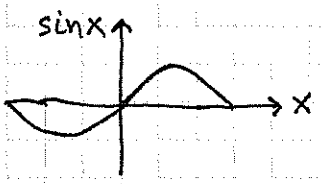


- se på liten taubit mellom φ og $\varphi + d\varphi$
- $\vec{S}(\varphi + d\varphi) + \vec{S}(\varphi) \neq 0$ og balanseres av (liten) normalkraft $d\vec{N}$ fra sylinderen på taubiten og (liten) friksjonskraft $d\vec{f}$ tangentielt



- $d\vec{f}$ rettet mot klokka når friksjonen hjelper oss å holde loddet i ro, og $df = \mu_s dN$ er max friksjonskraft på taubit

- Fra figur: $dN = S(\varphi) \sin \frac{d\varphi}{2} + S(\varphi + d\varphi) \sin \frac{d\varphi}{2}$



Ser at $\underline{\sin x \approx x}$ for små x.

$$\Rightarrow dN \approx \frac{d\varphi}{2}\left\{ S(\varphi) + \underbrace{S(\varphi + d\varphi)}_{\approx S(\varphi)} \right\} \approx S(\varphi)\, d\varphi$$

- Kraftbalanse tangentielt:

$$\underbrace{S(\varphi+d\varphi)-S(\varphi)}_{dS} \pm \underbrace{df}_{\mu_s S\,d\varphi} = 0$$

$+ :$ $d\vec{f}$ mot klokka

$- :$ $d\vec{f}$ med —"—

$$\Rightarrow \quad dS = \mp \mu_s S\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^{\varphi} \mu_s\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = \mp \mu_s \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S(\varphi) = S(0)\,e^{\mp \mu_s \varphi}}}$$

Hit
14.09.11

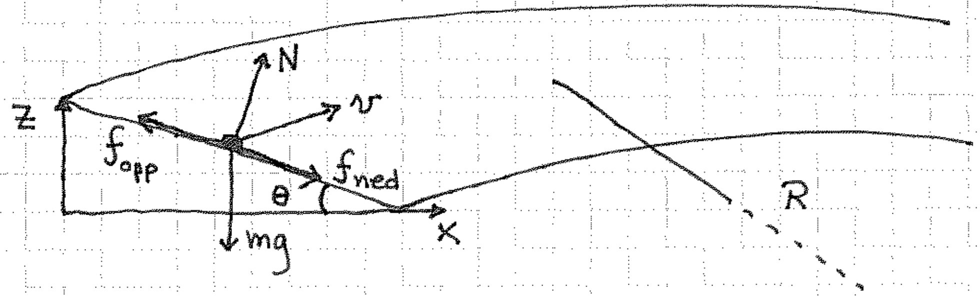
Motivasjonsforedrag nr 1 14.09.11:

Espen R. Jakobsen, IMF : Aksjer, opsjoner og matematikk

$\boxed{19.09.11}$

Eks 1 fra 12.09.11, dosert sving (s. 23):

- utregning av N og f
- plotting i Matlab

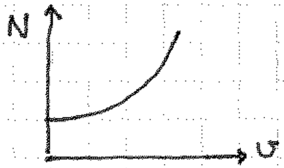


$$N\sin\theta \pm f\cos\theta = mv^2/R \qquad (x)$$

$$N\cos\theta \mp f\sin\theta = mg \qquad (z)$$

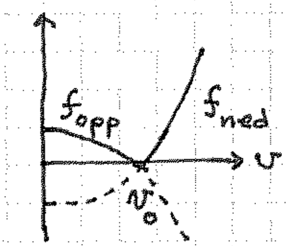
$(x)\cdot\sin\theta + (z)\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow N = \frac{m\sin\theta}{R}v^2 + mg\cos\theta$$



$(x)\cdot\cos\theta - (z)\cdot\sin\theta$

$$\Rightarrow f = \pm\frac{m\cos\theta}{R}v^2 \mp mg\sin\theta$$

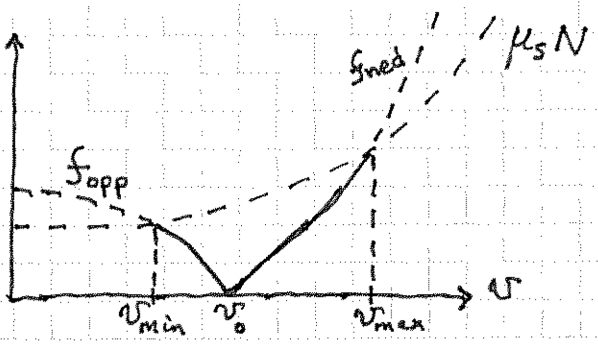


Fra 12.09.11:

$$f_{max} = \mu_s N$$

$$\Rightarrow v_{min} < v < v_{max}$$

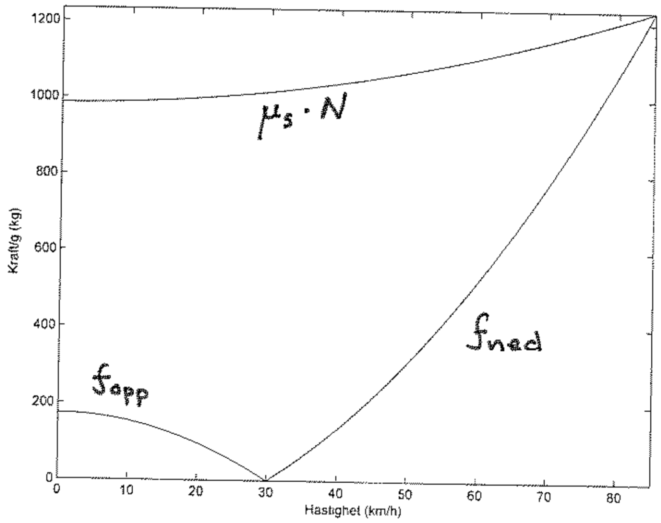
$$v_{\substack{max\\min}} = \left\{ gR\,\frac{\tan\theta \pm \mu_s}{1 \mp \mu_s\tan\theta} \right\}^{1/2}$$



$$v_0 = \sqrt{gR\tan\theta}$$

Tallverdier brukt i Matlab-programmet sving_dosert.m
(Lagt ut på hjemmesida): $g = 9.81\ m/s^2$, $R = 40\ m$, $m = 1000\ kg$, $\theta = 10°$.
$v_0 = 30$ km/h

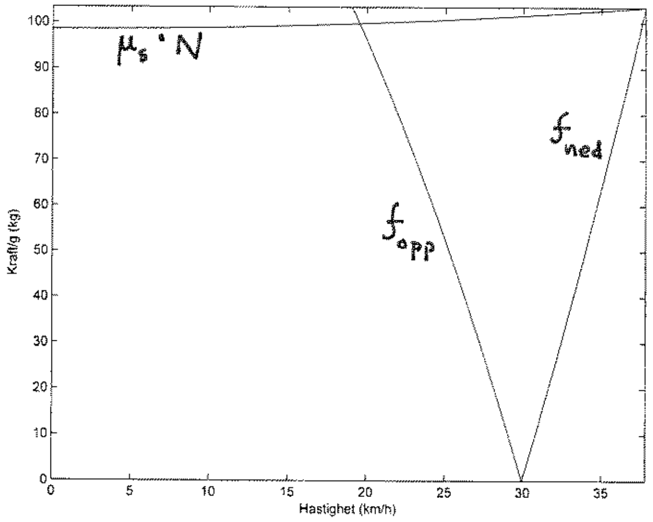
Tørr asfalt, $\mu_s = 1.0$:



$v_{min} = 0$ (kan stå i ro uten å gli nedover)

$v_{max} = 85$ km/h

Iset veibane, $\mu_s = 0.1$:



$v_{min} = 20$ km/h

$v_{max} = 38$ km/h

Hit 19.09.11

Motivasjonsforedrag nr 2 19.09.11:
Tore Lindmo, IFY: Medisinsk avbildning - en kombinasjon av fysikk og matematikk.

$\boxed{21.09.11}$

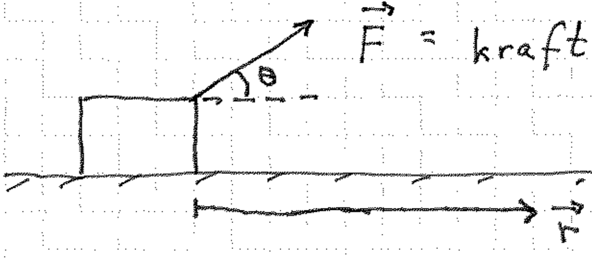
Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

$\underbrace{\text{N1,2,3}}_{=\text{ fundament}} \Longrightarrow \underbrace{\text{bevaringslover}}_{\text{"ingen" ny fysikk!}}$ (energi, impuls, dreieimpuls)

Men svært nyttig! Gir <u>innsikt</u>, og <u>snarveier</u> til å løse mange problemer.

—— · ——

Arbeid [YF 6.1-3, LL 4.1]



$\vec{F}$ = kraft på legeme

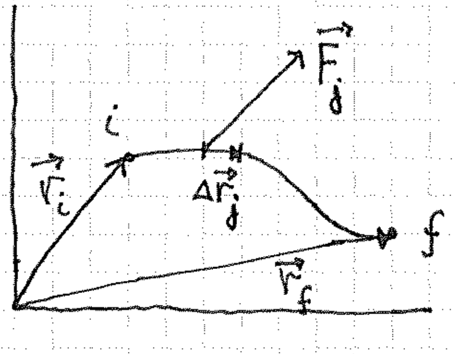
$\vec{r}$ = forflytning av legeme

Arbeid utført av $\vec{F}$ på legeme: (W for "work")

$$W \overset{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot \vec{r} = F\, r\, \cos\theta$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} \overset{\text{def}}{=} \text{J} \quad \text{(joule)}$$

Hvis $\vec{F}$ varierer langs veien og/eller veien ikke er rett linje:



i = "<u>i</u>nitial state", start-tilstand

f = "<u>f</u>inal state", slutt-tilstand

Tilhørende tidspunkt, posisjon, hastighet:

i : t_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$

f : t_f, $\vec{r}_f$, $\vec{v}_f$

Arbeid utført ved forflytning $\Delta\vec{r}_j$: $\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j$

⇒ Totalt arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$W = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{|\Delta\vec{r}_j| \to 0} \underbrace{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{"veiintegral"}} \qquad (\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}))$$

Utgangspunkt for å beregne W med datamaskin, dvs <u>numerisk løsning</u>.

Altså : $\boxed{W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$

Kinetisk energi [YF 6.2, LL 4.2]

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{v}\, dt \;; \qquad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \big(\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{= v^2}\big)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi : $\boxed{K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2}$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Dvs: Arbeid utført på legeme av ytre nettokraft

= Endringen i legemets kinetiske energi,

Effekt [YF 6.4, LL 4.1]

Effekt $\overset{\text{def}}{=}$ arbeid pr tidsenhet :

$$\boxed{P \overset{\text{def}}{=} \frac{dW}{dt}}$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \underline{\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$$[P] = J/s = Nm/s \overset{\text{def}}{=} W \quad (\text{watt})$$

Ofte brukte enheter for energi:

1 eV (elektronvolt) = $1.6\cdot 10^{-19}$ J

1 kWt (kilowatt-time) = 3.6 MJ

Hit
21.09.11

* * *

Motivasjonsforedrag nr 3 21.09.11:

Åsmund Ervik, 5.kl. Teknisk fysikk

Anders Hoff, 5.kl. Industriell matematikk

Espen Brønstad, 5.kl. Biofysikk og medisinsk teknologi

Faglig bruk av IKT i studiet – programmering, simulering, visualisering – både nyttig og artig!

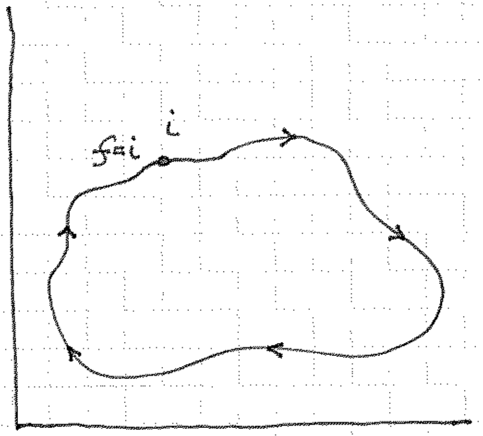
26.09.11

Konservative krefter. Potensiell energi. Energibevarelse [YF 7.1-7.4, LL 4.3-4.5]

Konservativt mekanisk system $\overset{\text{def}}{=}$ system uten energilekkasje (dissipasjon) fra mekanisk energi til andre energiformer.

Eks. på dissipasjon: Friksjon. Da går mek. energi over til varme, lyd etc.

Kons. kraft $\vec{F}$:



i ("initial") = legemets mek. tilstand initielt, bestemt ved $\vec{r}_i$ og $\vec{v}_i$. Hvis kons. kraft $\vec{F}$ påvirker legemet på rundturen, fra i til slutt-tilst. f=i ("final"), er $\vec{r}_f = \vec{r}_i$, $\vec{v}_f = \vec{v}_i$, $K_f = K_i$, og dermed utført arbeid $W = 0$.

Dvs:

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f = \vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Gjelder for kons. kraft $\vec{F}$

↑ betyr (vei-)integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$\boxed{U(\vec{r}) \overset{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Her er $\vec{r}_0$ en vilkårlig valgt "referanseposisjon", $\vec{F}$ er en kons. kraft, og vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$

Forventer nå at $-\vec{F}$ er en slags derivert av U !

Litt matematikk!

Gradient. Partiellderivert.

$U = U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ = skalar funksjon av x, y og z

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$$

= den partiellderiverte av U med hensyn på x

Tilsvarende for $\partial U/\partial y$ og $\partial U/\partial z$. (Skriv ned selv!)

Eks: Hvis $U(x,y,z) = 2xy + \sin(x/z)$, så er

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y + \frac{1}{z}\cos(x/z)$$

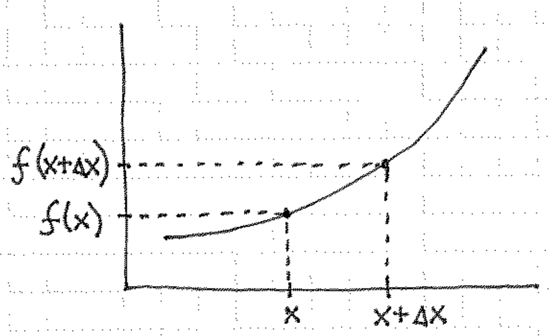
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}\cos(x/z)$$

Liten forflytning, fra $\vec{r}$ til $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, gir liten endring i U:

$$\Delta U = U(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r}) \approx \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z$$

Som er en generalisering av velkjente saker for funksjoner av en variabel:



$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$\approx \frac{df}{dx}\Delta x$$

Hvis liten $\Delta\vec{r} \longrightarrow$ infinitesimal $d\vec{r}$, fås

$$dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$= \text{totalt differensial}$$

Ser at vi kan skrive

$$dU = \left\{\hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right\} \cdot \left\{\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right\}$$

Hit 26.09.11

(siden $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$ mens $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$)

Motivasjonsforedrag nr 4 26.09.11:

Kristian Gjøsteen, IMF: Nettpoker, kryptografi og tallteori.

28.09.11

Vi definerer symbolet ∇ (nabla):

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$ ("derivasjonsoperator")

Videre er

$$d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$$ ("veielement")

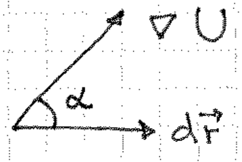
Dermed:

$$\underbrace{dU}_{\text{skalar}} = \underbrace{\nabla U}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{vektor}}$$

∇U = gradienten til U $= \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}$

Fra def. av skalarprod:

$$dU = |\nabla U| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



$\Rightarrow$ vi har maksimal dU når vi velger $d\vec{r}$ i samme retning som ∇U (dvs $\alpha = 0$ og $\cos\alpha = 1$)

$\Rightarrow$ ∇U peker i den retning som U øker raskest

(og: $-\nabla U$ ——— " ——— avtar —"—)

Dessuten er $|\nabla U| = \dfrac{dU_{max}}{|d\vec{r}|}$.

Tilbake til fysikken!

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (\text{med } U(\vec{r}_0) = 0)$$

Siden $U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dU$, er $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Sammenligning med det generelle uttrykket $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$ gir:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

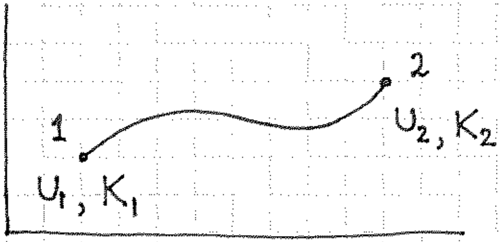
kons. kraft

U = pot. energi ("potensial")

Komponenter: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

Siden $U(\vec{r})$ og $U(\vec{r})$ + konst. gir samme $\vec{F}$, og dermed samme fysikk, kan vi fritt velge $U = 0$ hvor vi vil.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.3, LL 4.5]



$$U_1 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

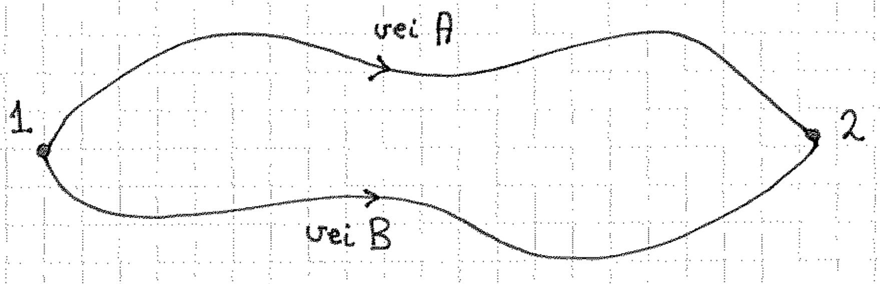
Fra før: $K_2 - K_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Dermed: $U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

Dvs: $\boxed{\text{Total mek. energi } E = K + U \text{ er konstant for kons. system.}}$

$$\boxed{\text{Kons. kraft } \vec{F} \text{ utfører arbeid } W \text{ som er uavhengig av veien.}}$$

Bevis:



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

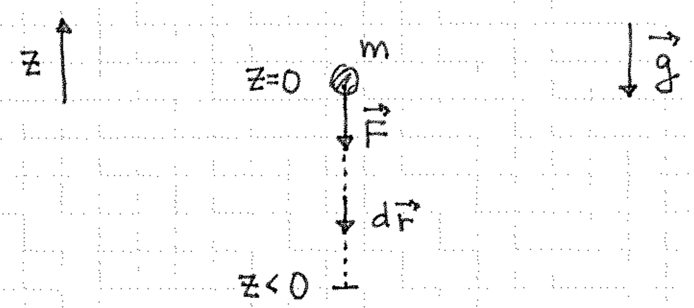
$$\Rightarrow \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_A + \underbrace{\left\{ \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B}_{= \left\{ - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_A = \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B$$

<u>qed</u>

Tid for noen eksempler!

Eks 1: Tyngdefeltet



$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$$

$d\vec{r} = \hat{z}\,dz$ [Merk: Fortegn ivaretas via integrasjonsgrensene. Dvs, dz kan være positiv eller negativ.]

$$U(z) = -\int_{0}^{z} (-mg\,\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{mgz} \qquad \text{(OK!)}$$

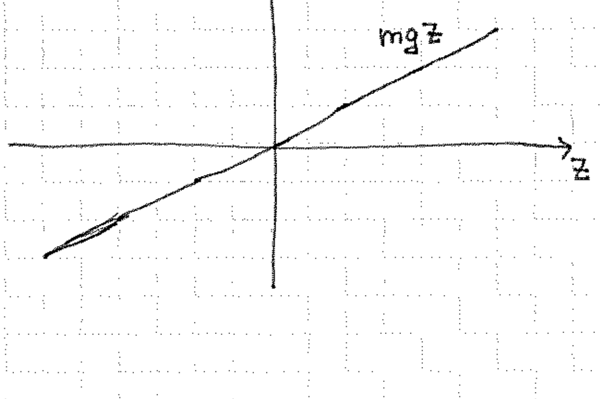
velger $U(0)=0$

Anta $v=0$ i $z=0$ $\Rightarrow E_0 = K_0 + U_0 = 0$ (tot. energi)

I $z<0$: $U(z) = mgz$, $K = W = \int_0^z F\,dz = -mgz$

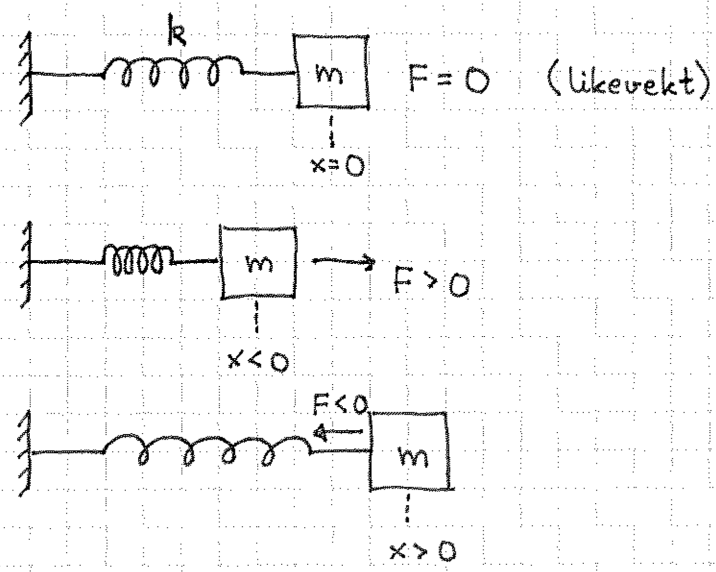
$$\Rightarrow E = K + U = -mgz + mgz = 0 = E_0$$

OK, energibevarelse!



$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$
$$= -\hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}(mgz)$$
$$= -mg\,\hat{z} \qquad \text{(OK!)}$$

Eks 2: Ideell fjær. Hookes lov



Hookes lov: $\vec{F} = -kx\,\hat{x}$

(k = fjærkonstanten, $[k] = N/m$)

Velg $U = 0$ for $x = 0$

$$\Rightarrow \quad U(x) = -\int_0^x (-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \underline{\tfrac{1}{2}kx^2}$$

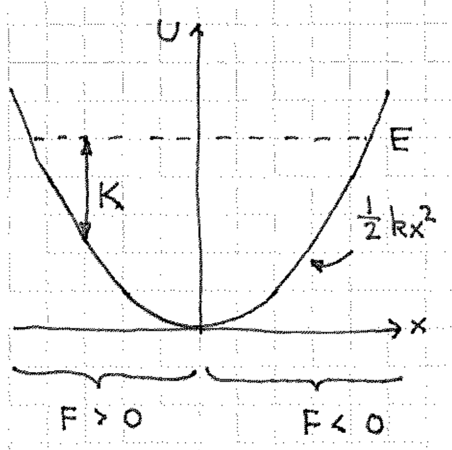
Anta $v = v_0$ når $t = 0$, og $x(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad E_0 = K_0 + U_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Når $x \neq 0$: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, $\quad K = K_0 + W = \frac{1}{2}mv_0^2 + \int_0^x (-kx)\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad E = K + U = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = E_0 \qquad (\text{OK!})$$

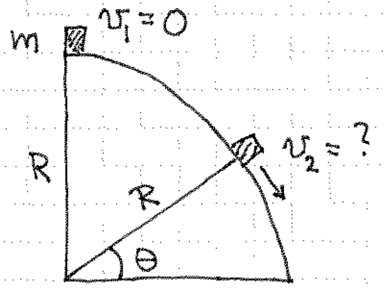


$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U$$

$$= -\hat{x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$= -kx\,\hat{x} \qquad (\text{OK})$$

Eks 3: Halvkule uten friksjon



$\Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$

$\Rightarrow 0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR\sin\theta$

$\Rightarrow v_2 = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$

$\theta = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR}$, OK, men hva hvis $\vec{N} \to 0$?!

Ikke-kons. krefter

(f.eks. friksjon)

Mek. energi $\xrightarrow{\text{dissipasjon}}$ varme, lyd, lys,...

$\Delta E = W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$

↖ da $\vec{f}$ er rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$

Friksjonsarbeidet W_f <u>avhenger av veien</u> fra 1 til 2

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ er <u>ikke</u> kons.

$\Rightarrow$ har <u>ikke</u> et tilhørende potensial

Hit 28.09.11

03.10.11

Impuls. Kollisjoner. Partikkelsystemer [YF 8, LL5]

For partikkel/legeme med konstant masse m:

$$\text{N2:} \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{m=\text{konst.}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\boxed{\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{impuls}}$$

Alternative navn på $\vec{p}$: bevegelsesmengde (LL), massefart, driv

På engelsk (YF) : (linear) momentum

Dermed blir N2 : $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ $[p] = \text{kg}\cdot\text{m/s}$

Impulsbevarelse:

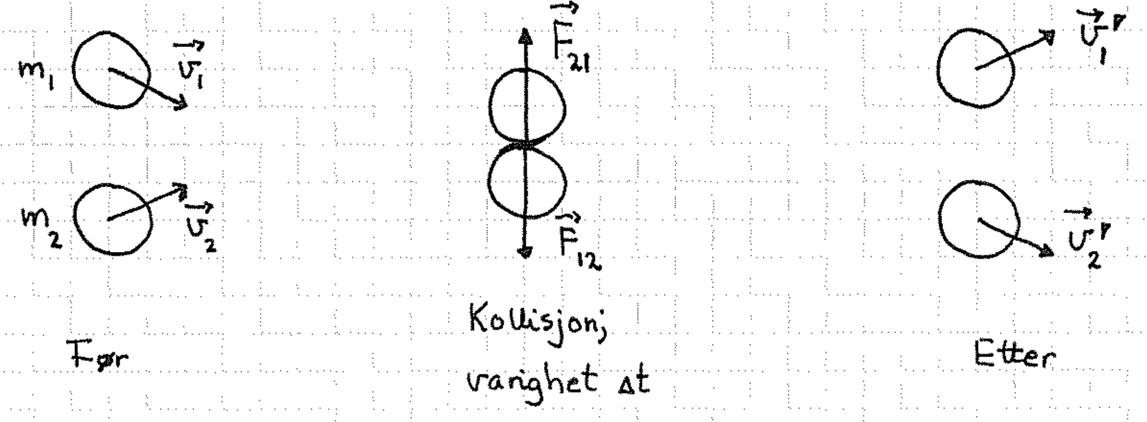
$$\boxed{\text{Hvis } \Sigma \text{ ytre krefter} = 0 \text{, er legemets impuls } \vec{p} \text{ bevart}}$$

Meget nyttig resultat!

Vi har mange prosesser / kollisjoner der mekanisk energi ikke er bevart, $\Delta E \neq 0$, men så lenge $\vec{F} = \vec{F}_{ytre} = 0$, er alltid $\Delta\vec{p} = 0$.

Kollisjoner $[\overset{YF}{8.3 - 8.4}$, LL 5.3$]$

= kortvarige støt mellom to legemer



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \overset{N2}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

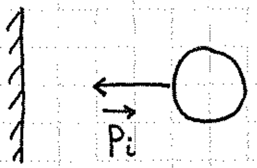
Kommentarer:

- $\vec{F}_{12}(t)$ er typisk <u>ukjent</u>, men det påvirker ikke systemets totale impuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, som er konstant
- Så lenge $\vec{F}_{ytre} = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = 0$, er $\vec{P}$ konstant
- Hvis $\vec{F}_{ytre} \neq 0$, er $\vec{P} \approx$ konst. dersom

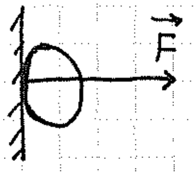
  $F_{ytre} \ll F_{indre}$ i løpet av kollisjonen

Kraftstøt [YF 8.1, LL 5.2]

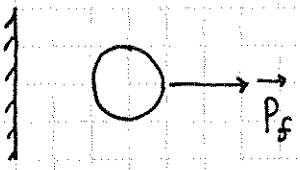
Se på kollisjon av ball mot vegg:



Før (i)



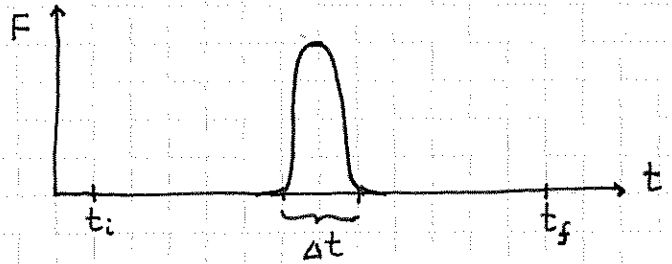
Kollisjon,
varighet Δt

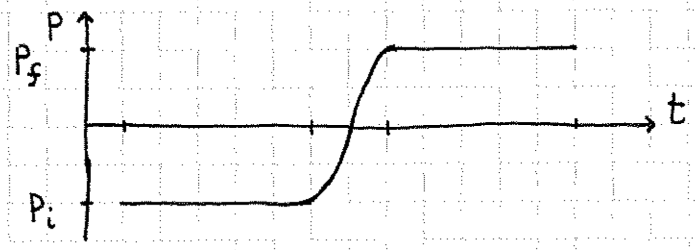


Etter (f)

Fra N2: $d\vec{p} = \vec{F}\cdot dt$ = ballens impulsendring i løpet av dt

$$\Rightarrow \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt = \int_{\Delta t} \vec{F}\cdot dt$$





Kraftstøtet $\vec{J}$ er: $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt$ (Engelsk: impulse)

$$\Rightarrow \underline{\vec{J}} = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \underline{\Delta\vec{p}} \qquad \text{(Impulsloven)}$$

Kommentarer:

- $\vec{F}(t)$ som regel ukjent
- Kjennskap til $\Delta\vec{p}$ og estimat for Δt $\Rightarrow$ kan anslå $\langle\vec{F}\rangle$

Eks: Tennisball, $v \sim 50\,m/s$, $m \sim 57g$, $\Delta t \sim 0.01\,s$ for støt mot racket. Finn gjennomsnittlig kraft i støtet, $\langle F \rangle$, og vurder om det er OK å se bort fra $G = mg$ i ~~støtet~~. (slaget)

Løsning:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0.057\,kg \cdot 2 \cdot 50\,m/s}{0.01\,s} = \underline{570\,N}$$

$$G = mg = 0.057\,kg \cdot 9.8\,m/s^2 \approx 0.56\,N$$

$\Rightarrow \langle F \rangle / G \sim 1000 \Rightarrow$ OK å neglisjere G i slaget.

Ulike typer kollisjoner [YF 8.3, LL 5.3]

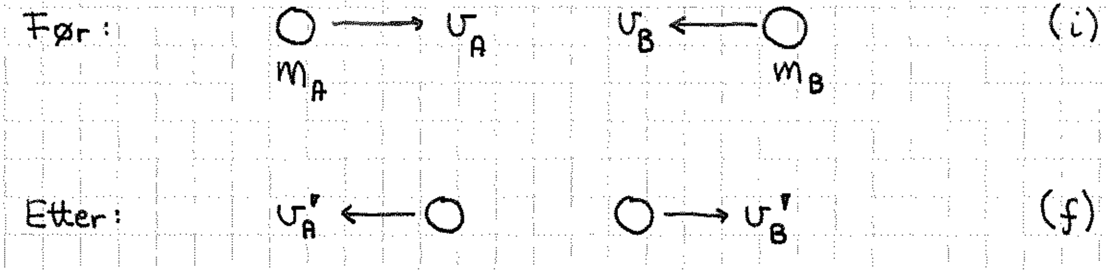
- Elastisk kollisjon: $\Delta E = 0$ $(\Delta K = 0)$
- Uelastisk —"— : $\Delta K < 0$
- Fullstendig uel. —"— : Kolliderende legemer henger sammen etter kollisjonen. Felles hastighet etter koll. Maksimal $|\Delta K|$.

Tap i kinetisk energi, ΔK, resulterer i (varige) deformasjoner, lyd, varme etc.

Merk: Så lenge $\vec{F}_{ytre} = 0$ (eller kan neglisjeres under kollisjonen), er $\underline{\Delta \vec{p} = 0 \text{ for alle typer kollisjoner}}$.

Alle indre krefter opptrer i par (N3), $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, og bidrar ikke til noen endring i systemets totale impuls.

Eks: Sentralt støt [YF 8.2-8.4, LL 5.3]



Vansett type støt er $\Delta p = 0$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{m_A v_A + m_B v_B}_{p_i} = \underbrace{m_A v_A' + m_B v_B'}_{p_f}$$

[Dvs: $v_B < 0$ og $v_A' < 0$ i figuren]

Hvis støtet er <u>elastisk</u>, er $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Løses typisk ved å samle ledd med m_A og m_B på hver sin side og ta " $\Delta K = 0$ " / " $\Delta p = 0$ " :

$$m_A (v_A - v_A') = m_B (v_B' - v_B) \qquad (\Delta p = 0)$$

$$m_A (v_A^2 - v_A'^2) = m_B (v_B'^2 - v_B^2)$$

dvs $m_A (v_A + v_A')(v_A - v_A') = m_B (v_B' + v_B)(v_B' - v_B)$ $\Big\} (\Delta K = 0)$

$$\Rightarrow \quad v_A + v_A' = v_B + v_B'$$

$$\Rightarrow \quad v_A' - v_B' = v_B - v_A = -(v_A - v_B)$$

$\Rightarrow$ partiklenes relativhastighet skifter fortegn i kollisjonen

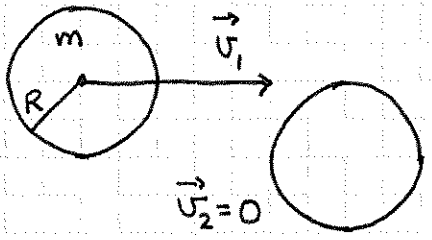
Kan videre bestemme v_A' og v_B' uten problemer.

Hvis støtet er <u>fullstendig uelastisk</u>, er

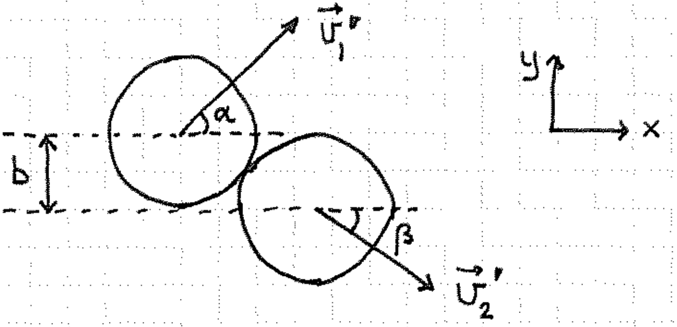
$$v_A' = v_B' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(Enkleste tilfelle!)}$$

Hvis støtet er <u>delvis uelastisk</u>, har vi kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for de 2 ukjente (v_A' og v_B'). Løsning betinger dermed en ekstra opplysning, f.eks. kjent v_A', v_B', ΔK, ...

Eks: Ikke-sentralt elastisk støt mellom to like kuler / pucker
[YF Ex 8.6 + 8.12, LL 5.3]



Før



Etter

$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$, $\vec{v}_2 = 0$, R = kuleradius

b = støtparameter ("impact parameter"); inngår ikke i regningene nedenfor, men <u>viktig størrelse</u> i diskusjon av mer generelle kollisjoner (<u>spredningsteori</u>)

[Merk at <u>hvis</u> det ikke er friksjon i støtet, peker $\vec{F}_{12}$ og $\vec{F}_{21}$ langs linjen mellom kulenes sentrum, og $\vec{v}_2'$ får retning gitt ved $\sin\beta = b/2R$. Da kan problemet løses fullstendig. Men generelt har vi friksjon mellom kulene.]

Vi har 4 ukjente skalare størrelser,

v_{1x}', v_{1y}', v_{2x}', v_{2y}' ; evt v_1', v_2', α, β

men bare 3 skalare ligninger,

$\Delta p_x = 0$, $\Delta p_y = 0$, $\Delta K = 0$

[La oss anta at kulene *ikke* *glir* relativt hverandre, slik at det ikke utføres noe friksjonsarbeid!]

så ikke alle ukjente kan fastlegges. Men vi kan finne ut en god del!

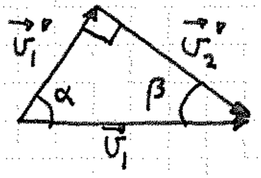
$$\Delta p_x = 0 \Rightarrow v_1 = v_1' \cos\alpha + v_2' \cos\beta$$
$$\Delta p_y = 0 \Rightarrow 0 = v_1' \sin\alpha - v_2' \sin\beta$$

(kan forkorte felles faktor m i alle ledd)

eller i en smekk: $\Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_2{}'$

$$\Delta K = 0 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

Geometrisk:



$\Rightarrow$ $\underline{\alpha + \beta = \pi/2}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_x = 0 \Rightarrow v_2' \cos\beta &= v_1 - v_1' \cos\alpha \\ \Delta p_y = 0 \Rightarrow v_2' \sin\beta &= v_1' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{Kvadrér og addér!} \Rightarrow v_2'^2 = v_1^2 - 2v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2$$

Som innsatt i $\Delta K = 0$ gir $v_1'(v_1' - v_1 \cos\alpha) = 0$, som har 2 mulige løsn:

a) $v_1' = 0$. Da er $v_2' = v_1$, dvs kule 1 og 2 bytter hastighet

b) $v_1' = v_1 \cos\alpha = v_1 \sin(\pi/2 - \alpha) = v_1 \sin\beta$, som innsatt i $\Delta p_y = 0$ gir

$v_2' \sin\beta = v_1 \sin\beta \sin\alpha \Rightarrow v_2' = v_1 \sin\alpha$

Da er det lett å se at vi har energibevarelse:

$$\left.\begin{aligned} K_1' &= \tfrac{1}{2} m v_1'^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \cos^2\alpha \\ K_2' &= \tfrac{1}{2} m v_2'^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{K'} = K_1' + K_2' = \tfrac{1}{2} m v_1^2 = K_1 = \underline{K}$$

OK!

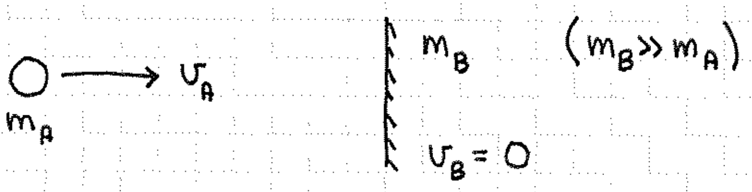
Hit
03.10.11

Eks: Ball som støter elastisk mot vegg

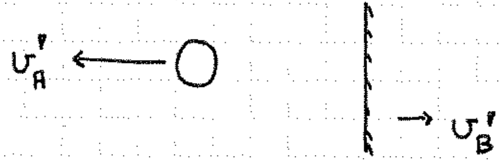
På s. 42 ble dette eksemplet diskutert i lys av at veggen påvirker ballen med et kraftstøt $\vec{J} = \int_{\Delta t} \vec{F} \cdot dt$ slik at ballens impuls endres med beløpet $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J}$.

La oss nå i stedet inkludere veggen (og det som veggen er festet til, huset, og dermed hele jorda...!) som en del av systemet og se på impuls- og energibevarelse.

Før:
(i)



Etter:
(f)



$$\Delta p = 0 \Rightarrow m_A v_A = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Gjør som på s 44 $\Rightarrow$ $v_A + v_A' = v_B'$; settes inn for v_B' i $\Delta p = 0$

$$\Rightarrow m_A v_A = m_A v_A' + m_B (v_A + v_A')$$

$\Rightarrow$ $v_A' = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A$; som innsatt for v_A' i $v_A + v_A' = v_B'$ gir

$$v_B' = \frac{2 m_A}{m_A + m_B} v_A$$

De ulike impulsene og kinetiske energiene blir:

$p_A^i = m_A v_A$, $p_A^f = m_A v_A (m_A - m_B)/(m_A + m_B)$

$p_B^i = 0$, $p_B^f = 2 m_A v_A m_B / (m_A + m_B)$

$$K_A^i = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad , \quad K_A^f = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)^2$$

$$K_B^i = 0 \quad , \quad K_B^f = \frac{1}{2} m_B v_A^2 \left(\frac{2 m_A}{m_A + m_B}\right)^2$$

Vi ser nå at vi har impulsbevarelse:

$$p^f = p_A^f + p_B^f = m_A v_A \frac{m_A - m_B + 2 m_B}{m_A + m_B} = m_A v_A = p^i$$

Vi har også energibevarelse:

$$K^f = K_A^f + K_B^f = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \underbrace{\frac{(m_A - m_B)^2 + 4 m_A m_B}{(m_A + m_B)^2}}_{=1} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = K^i$$

Nå lar vi m_B bli mye større enn m_A, mer presist $m_B \to \infty$.

Da blir:

$$p_A^f \to m_A v_A \cdot \frac{(-m_B)}{m_B} = -m_A v_A$$

$$p_B^f \to m_A v_A \cdot \frac{2 m_B}{m_B} = 2 m_A v_A$$

$$K_A^f \to \frac{1}{2} m_A v_A^2 \cdot \left(\frac{-m_B}{m_B}\right)^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$K_B^f \to \frac{1}{2} m_A v_A^2 \cdot \frac{4 m_A m_B}{m_B^2} \xrightarrow{m_B \to \infty} 0$$

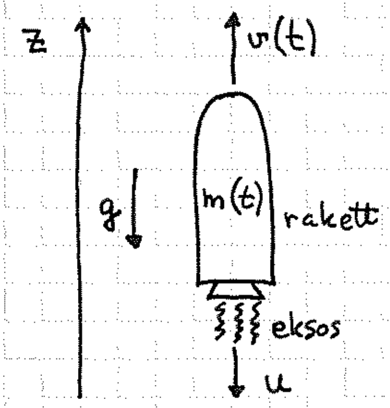
Konklusjon: Veggen får en endelig impuls $p_B^f = 2 m_A v_A$ som følge av kollisjonen med ballen.

Veggens kinetiske energi K_B^f, derimot, blir lik null i grensen $m_B \to \infty$.

Veggens hastighet $v_B' \to 0$ siden $v_A' \to -v_A$.

Merk: Vi kan skrive $\underline{K_B^f} = \frac{1}{2} m_B (p_B^f / m_B)^2 = \underline{(p_B^f)^2 / 2 m_B}$, og da ser vi uten videre at $K_B^f = 0$ dersom p_B^f er endelig og $m_B \to \infty$.

Eks: Variabel masse. Rakettprinsipp. [YF 8.6, LL 5.4]



Anta $v(0)=0$, $m(0)=m_0$, $-dm/dt$ er forbrent drivstoff pr tidsenhet ($dm<0$), og u er eksosens hastighet relativt raketten (anta $u>0$).

Bruk N2 til å finne ligning for $v(t)$.

Løsning:

$p(t)=m(t)v(t)$ = impulsen til "restraketten" (dvs: rakett + gjenværende drivstoff) ved tid t

N2: $F_{ytre}(t)=\frac{dp}{dt}$ med $F_{ytre}=-m(t)g$

$\Rightarrow$ Vi må finne $dp=p(t+dt)-p(t)$

$$p(t+dt)=\underbrace{[m(t)+dm]}_{m(t+dt)}\cdot\underbrace{[v(t)+dv]}_{v(t+dt)}+\underbrace{(-dm)}_{\substack{\text{forbrent}\\\text{drivstoff}\\\text{i løpet av }dt}}\cdot\underbrace{(v(t)-u)}_{\substack{\text{eksosens hastighet}\\\text{relativt jorda}}}$$

$$=m(t)v(t)+m(t)\,dv+dm\cdot v(t)-dm\cdot v(t)+dm\cdot u$$

($+\,dm\cdot dv$, men dette bidraget er "dobbelt infinitesimalt" og kan neglisjeres; jf. det du gjør når du f.eks. deriverer x^2)

Dermed:

$dp=p(t+dt)-p(t)=m(t)\,dv+u\,dm$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{dp}{dt}=m(t)\frac{dv}{dt}+u\frac{dm}{dt}}$$

Siden $F_{ytre}=dp/dt$, kan vi skrive dette på formen

$$\boxed{F_{ytre}+F_{skyv}=m(t)\frac{dv}{dt}}\qquad\text{med }F_{skyv}=-u\frac{dm}{dt}>0$$

[Konkret $m(t)$ + tallverdier i øving!]

Hit
05.10.11

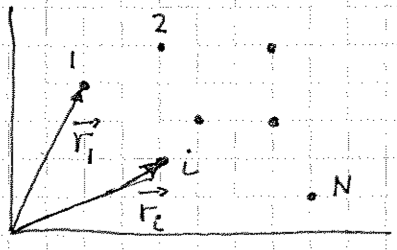
Motivasjonsforedrag nr 5 05.10.11:

Bjørn Petter Jelle, Sintef/NTNU:

Fysikk og nanoteknologi i husets fire vegger.

10.10.11

Tyngdepunkt [YF 8.5, LL 5.6 + 5.8]



System med N partikler, 1, 2, ⋯, N

med masse $m_1, m_2, \dots, m_N$

i posisjon $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

$$\boxed{\vec{R}_{CM} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}$$

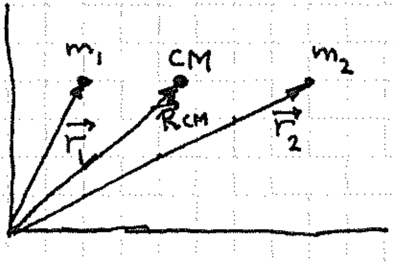
Tyngdepunkt (= massemiddelpunkt = massesenter; "center of mass")
(YF: $\vec{r}_{CM}$, LL: $\vec{R}$)

(Hvis g varierer fra øverst til nederst i systemet, blir tyngdepunktet litt forskjellig fra massesenteret.)

Siden $\sum_i m_i = M$ = total masse, har vi

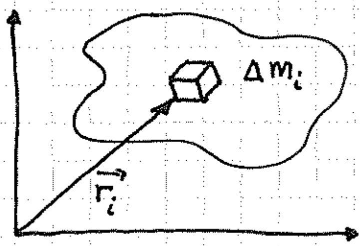
$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

Eks: N = 2



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) & ; m_1 = m_2 \\ \approx \vec{r}_1 & ; m_1 \gg m_2 \\ \approx \vec{r}_2 & ; m_2 \gg m_1 \end{cases}$$

Kontinuerlig massefordeling [LL 6.1]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int dm\, \vec{r}}{\int dm}$$

der integralene går "over legemet".

$$\int_{\text{legemet}} dm = M = \text{legemets masse}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{legemet}} \vec{r}\, dm}$$

Kan ha 3-, 2- og 1-dimensjonale legemer (f.eks kloss, skive, stang):

3D : $dm = \rho \cdot dV$, ρ = masse pr volumenhet, $[\rho] = kg/m^3$

2D : $dm = \sigma \cdot dA$, σ = —"— flateenhet, $[\sigma] = kg/m^2$

1D : $dm = \lambda \cdot d\ell$, λ = —"— lengdeenhet, $[\lambda] = kg/m$

dV = volumelement ($dV = dx \cdot dy \cdot dz$ i kartesiske koord.)

dA = flateelement ($dA = dx \cdot dy$ —— " ——)

$d\ell$ = Lengdeelement ($d\ell = dx$ —— " ——)
(linjeelement)

Formen på legemet (typen <u>symmetri</u>) er avgjørende for hva slags koordinater som er hensiktsmessig.

N2 for system med flere partikler. Tyngdepunktbevegelse. [YF 8.5, LL 5.8]

N2 for partikkel i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,\text{ytre}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

der $\vec{F}_{ji}$ = kraft fra partikkel j på partikkel i, slik at

$\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total (indre) kraft på part. i fra alle andre part. i systemet

Bruker nå def. av $\vec{R}_{CM}$ (fra s 50), tar $\frac{d^2}{dt^2}$ på begge sider og ganger med M. Dermed:

$$M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \overset{N2}{=} \sum_i \left\{ \vec{F}_{i,\text{ytre}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{N1} \\
&+ \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{N2} \\
&+ \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{N3} \\
&+ \\
&\dots \\
&+ \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + \dots + \vec{F}_{N-1,N} \\
&= \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{\substack{=0 \\ \text{(pga N3!)}}} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = \underline{0}
\end{aligned}$$

Kortversjonen av dette:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \{ \underbrace{\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}}_{=0} \} = 0$$

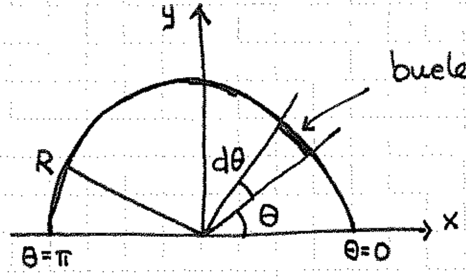
Dermed: $\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{\text{ytre}}}$ der $\vec{F}_{\text{ytre}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{ytre}}$

Altså: Tyngdepunktet, $\vec{R}_{CM}$, til et system med flere partikler (f.eks. et stivt legeme) beveger seg som om hele massen, M, er samlet i $\vec{R}_{CM}$ og blir utsatt for summen av alle ytre krefter, $\vec{F}_{ytre}$, som virker på systemet.

Dermed: Systemets <u>totale bevegelse</u> blir bevegelsen til CM, gitt ved $M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$, pluss eventuell <u>bevegelse relativt CM</u>, slik som <u>rotasjon</u> og <u>vibrasjon</u>.

<u>Eksempler på bestemmelse av $\vec{R}_{CM}$:</u>

1D-eks: Halvsirkel, radius R, masse λ pr lengdeenhet



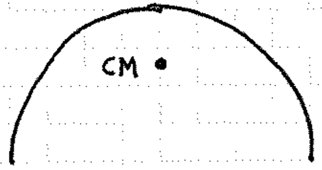
buelengde $dl = R\,d\theta$, masse $dm = \lambda\,dl = \lambda R\,d\theta$,
posisjon $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$

$\vec{R}_{CM} = X_{CM}\,\hat{x} + Y_{CM}\,\hat{y}$; ser at $X_{CM} = 0$ av symmetrigrunner

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_{\theta=0}^{\pi} R\sin\theta\,\lambda R\,d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\underbrace{\Big|_0^{\pi}(-\cos\theta)}_{=1+1=2} = \frac{2\lambda R^2}{M}$$

$$M = \frac{1}{2}(\lambda\cdot 2\pi R) = \lambda\pi R$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R \approx 0{,}64\,R}$$



Hit 10.10.11

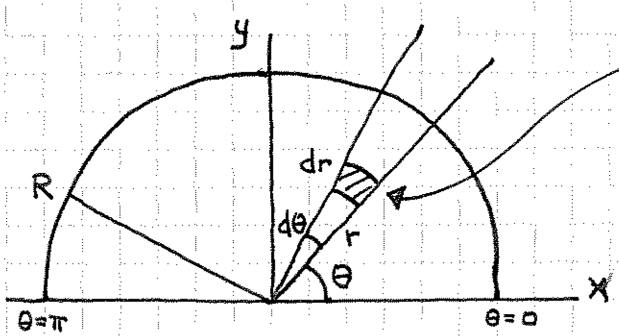
Motivasjonsforedrag nr 6 10.10.11:

Thomas Langø, Sintef:

Avbildning og navigasjon i kikkhullskirurgi

12.10.11

2D-eks: Halvsirkelplate, masse σ pr flateenhet



flateelement $dA = dr \cdot r d\theta$,

masse $dm = \sigma\, dA = \sigma\, dr\, r\, d\theta$,

posisjon $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

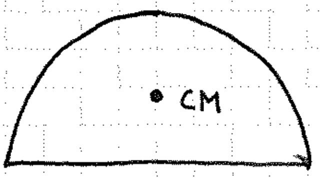
Igjen: ser at $X_{CM} = 0$ av symmetrigrunner

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta\ \sigma\, dr\, r\, d\theta$$

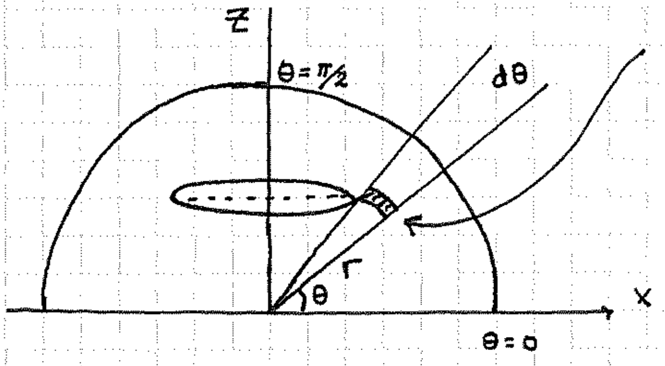
$$= \frac{\sigma}{M}\underbrace{\int_0^R r^2\, dr}_{\frac{1}{3}R^3}\ \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}_{2} = \frac{2\sigma R^3}{3M}$$

$$M = \frac{1}{2}\cdot(\sigma\cdot\pi R^2)$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{CM} = \frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R}$$



3D-eks: Halvkule, masse ρ pr volumenhet



flateelement $dA = dr \cdot r\,d\theta$, roteres omkring z-aksen, gir volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$

$= dA \cdot 2\pi \cdot r\cos\theta$,

med $z = r\sin\theta$ felles for hele "ringen"

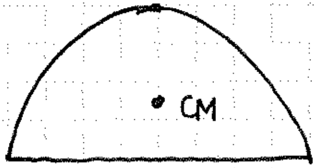
Av symmetrigrunner er $X_{CM} = Y_{CM} = 0$.

$$Z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm = \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/2} r\sin\theta \cdot \rho \cdot dr\,r\,d\theta \cdot 2\pi r\cos\theta$$

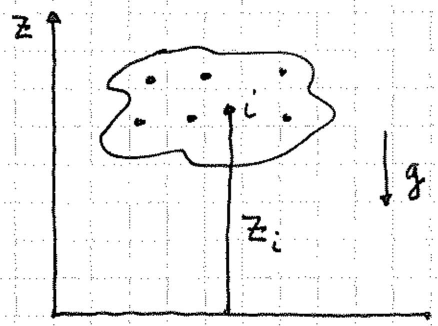
(Merk: Må her integrere θ fra 0 til π/2 for å dekke "kvartskiva" i "1. kvadrant". Når denne roteres om z-aksen, dekkes volumet til halvkula.)

$$M = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\rho\pi R^3$$

$$Z_{CM} = \frac{3}{2\rho\pi R^3}\underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{=\frac{1}{4}R^4}\;\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta}_{=\frac{1}{2}\Big|_0^{\pi/2}\sin^2\theta = 1/2} = \underline{\frac{3}{8}R = 0.375\,R}$$



Eks: Tyngdens potensielle energi for partikkelsystem



Velger $U = 0$ ved $z = 0$

$U_i = m_i g z_i$ = pot. energi for masse m_i

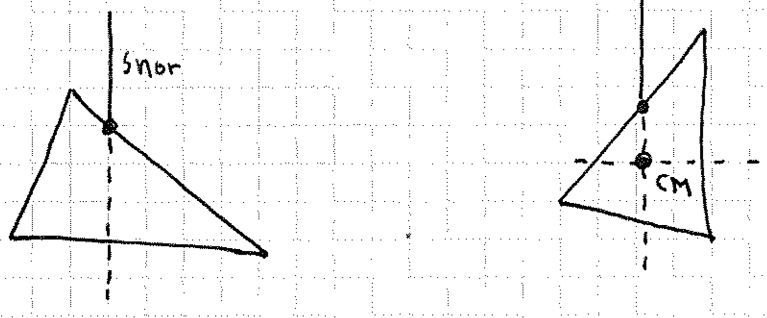
$\Rightarrow U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i$

$= g \cdot M \cdot z_{CM}$

Dvs: som om hele massen $M = \sum_i m_i$ er samlet

i $z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$

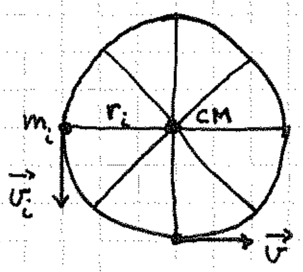
Eks: Eksperimentell bestemmelse av CM



Rotasjon [YF 9+10, LL 5.5+5.9, 6]

Innledning:

- roterende sykkelhjul



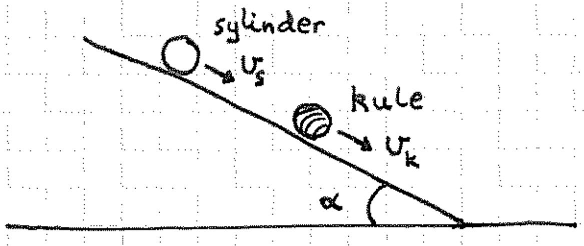
CM i ro, men rotasjonsenergi $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$\omega = v_i / r_i$ = vinkelhastighet (kjent!)

Hva med impuls knyttet til rotasjon?

Dreieimpuls! (Evt: spinn)

- rulling på skråplan



Hvilke krefter virker?

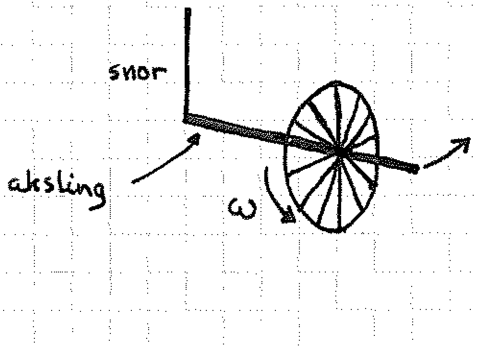
N2 og rotasjon; rotasjonsdynamikk

Hvor angriper kreftene?

Dreiemoment = "arm × kraft"

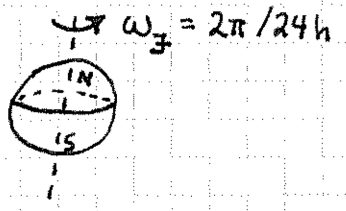
Hvorfor er $v_k > v_s$? Hvorfor rulling? Friksjonens rolle.

- komplisert dynamikk



presesjon; gyroskop

- dynamikk i roterende koordinatsystem



Foucaults pendel

Corioliskrefter ⇒ avbøyning (mot høyre på nordlige halvkule)

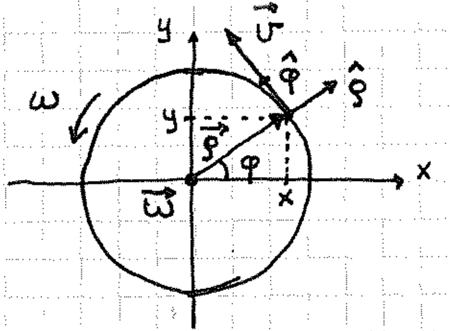
Hit 12.10.11

Vi skal stort sett diskutere stive legemer $\overset{\text{def}}{=}$ system med punktmasser i fast innbyrdes avstand. [Senere: også vibrasjon]

17.10.11

Sirkelbevegelse, rask repetisjon [YF 9.1-9.3, LL 1.8]

Anta rotasjon omkring $\hat{z}$.



$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \arctan(y/x) = \arccos(x/\rho) = \arcsin(y/\rho)$

$\vec{v} = d\vec{s}/dt = (\rho\, d\varphi/dt)\,\hat{\varphi} = \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ = vinkelhastighet

$\vec{\omega}$ langs rotasjonsaksen, fortegn ifølge høyrehåndsregel

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ (i figur: $\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z}$, $\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$)

$T = 2\pi/\omega$ = periode, $f = 1/T = \omega/2\pi$ = frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ = vinkelakselerasjon

$v = |\vec{v}| = \omega\rho$ = banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho$ = baneakselerasjon

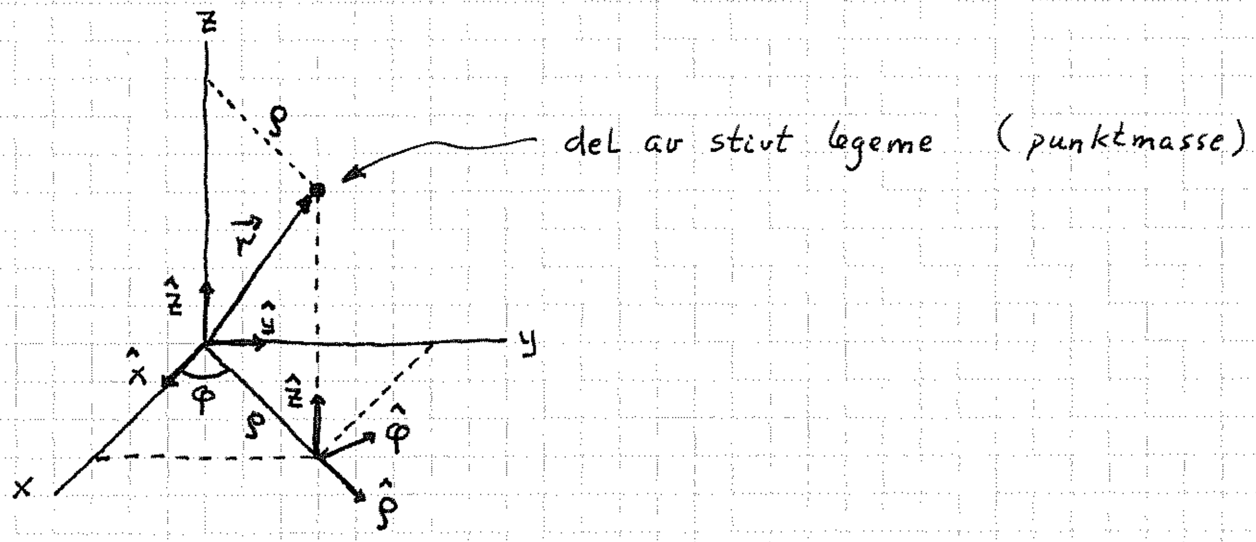
$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho$ = sentripetalaks.

$\vec{a}_{\perp} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ (se øving)

$\vec{a} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho}$ = total akselerasjon

Rotasjon om gitt akse, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, gjør det naturlig med <u>sylinderkoordinater</u>.

Sylinderkoordinater



Kartesiske koord.: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Sylinderkoord.: $\vec{r} = \varrho\hat{\varrho} + z\hat{z}$

Merk: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ er <u>faste</u> enhetsvektorer,

men $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}(\varphi)$ og $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$

Relasjoner: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = z$

$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$

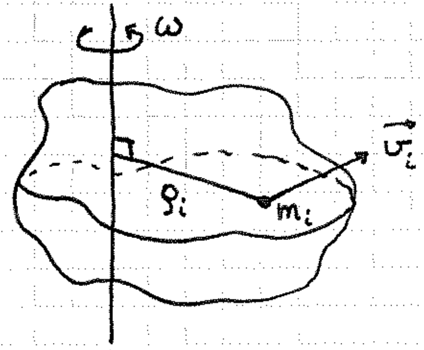
$r = \sqrt{\varrho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

For stivt legeme:

- alle m_i samme ω og α
- $v = \omega\varrho$ øker med ϱ
- $a_\perp = \omega^2\varrho$ —— " ——
- $a_\parallel = \alpha\varrho$ —— " ——

Rotasjonsenergi [YF 9.4, LL 6.4]

Anta rotasjon om fast akse (f.eks. gjennom $\vec{R}_{CM}$, men ikke nødvendigvis):



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad v_i = \omega \varrho_i$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_i m_i \varrho_i^2 \right\} \omega^2$$

$\Rightarrow \sum_i m_i \varrho_i^2$ trer fram som en sentral størrelse!

Treghetsmoment [YF 9.4, LL 6.3]

"moment of inertia"

$$\boxed{I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \varrho_i^2} = \text{legemets treghetsmoment om gitt akse,}$$

ϱ_i = m_i sin avstand fra rotasjonsaksen

Dvs: I avhenger av valgt akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_{\text{legemet}} \varrho^2 \, dm}$$

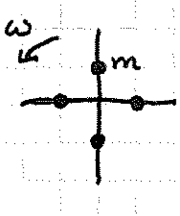
ϱ = dm sin avst. fra aksen

$dm = \lambda \, dl$ (1D), $\sigma \, dA$ (2D), $\varrho \, dV$ (3D)

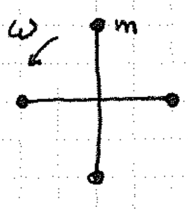
Hit 17.10.11 Dermed: $\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$ (jf $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$)

Motivasjonsforedrag nr 7 17.10.11: Andreas Wahl, "Universet på 42 minutter - fysikkstudent spesial"

19.10.11 Eks fra real-/teknostart:



liten ϱ
$\Downarrow$
liten K_{rot}



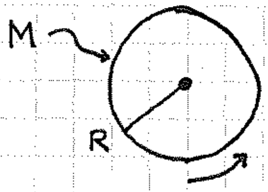
stor ϱ
$\Downarrow$
stor K_{rot}

Dvs: K_{rot} avhenger av massens fordeling!

Eksempler på beregning av $I_0 = \int \varrho^2 \, dm$

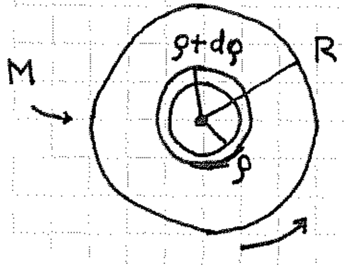
= treghetsmoment om symmetriakse gjennom CM

Eks 1: Tynn ring (f.eks sykkelhjul, $m_{eiker} \ll m_{felg} \approx M$)



$$I_0 = \int_{ring} \varrho^2 \, dm = R^2 \int_{ring} dm = \underline{MR^2}$$

Eks 2: Tynn skive, radius R



$$dm = \sigma \, dA = \sigma \, 2\pi\varrho \, d\varrho \quad , \quad \sigma = M/\pi R^2$$

[Evt: dm = total masse · arealandel

$= M \cdot (dA/A) = M \cdot (2\pi\varrho d\varrho / \pi R^2)$]

$$\Rightarrow I_0 = \int_{skive} \varrho^2 dm = \int_0^R \varrho^2 M \frac{2\pi\varrho \, d\varrho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R \varrho^3 d\varrho}_{\frac{1}{4}R^4} = \underline{\frac{1}{2}MR^2}$$

Eks 1a: Tynn sylinder ⇒ som eks 1 ⇒ $I_0 = MR^2$

Eks 2a: Kompakt —"— ⇒ som eks 2 ⇒ $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$

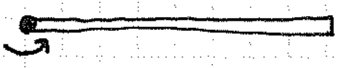
Eks 3: Tynt kuleskall : $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$

Eks 4: Kompakt kule : $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

Eks 5: Tynn rett stang, lengde L : $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$

Eks 6: Om akse gjennom stangas ende : $I = \frac{1}{3}ML^2$

} øving!



Treghetsradius R_a

$I_0 = MR_a^2$; dvs som om hele massen M ligger i avstand R_a fra aksen (LL bruker Γ for treghetsradius)

Eks: Ring: $R_a = R$; Skive: $R_a = R/\sqrt{2}$; Kuleskall: $R_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$;
Tynn stang: $R_a = L/\sqrt{12}$

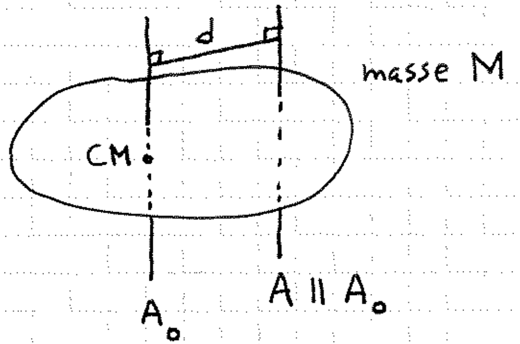
Enhet for treghetsmoment

$$[I] = [m \cdot r^2] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Steiners sats [YF 9.5, LL 6.3]

(Jakob Steiner, sveitsisk matematiker)

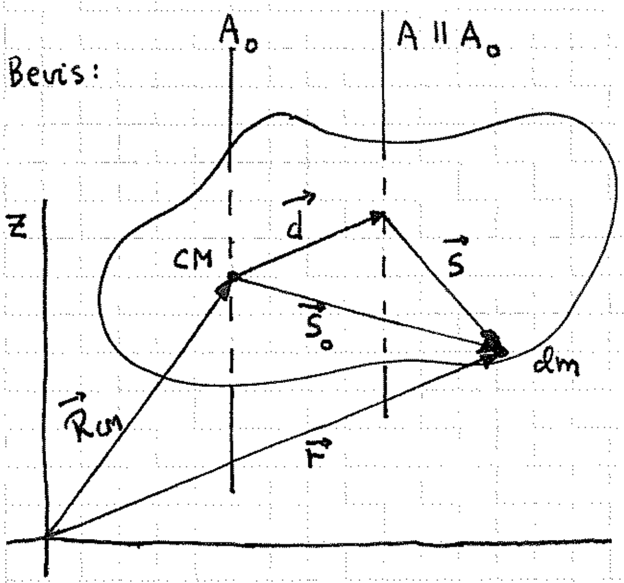
Evt: parallellakseteoremet



I_0 = treghetsmoment om A_0
I = ——— " ——— $A \parallel A_0$
d = avstand mellom A_0 og A

Da er $\boxed{I = I_0 + Md^2}$

Bevis:



Relasjoner mellom vektorer:

$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0$

$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$

$\vec{s}_0 = \vec{\rho}_0 + \vec{z}_0$

$\vec{s} = \vec{\rho} + \vec{z}$

$\vec{z} = \vec{z}_0 \qquad (\vec{d} \perp \hat{z})$

$\Rightarrow \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 = \vec{s} - \vec{s}_0 = -\vec{d}$

$\Rightarrow \vec{\rho} = \vec{\rho}_0 - \vec{d}$

Treghetsmoment om A blir da:

$$I = \int \rho^2\, dm = \underbrace{\int \rho_0^2\, dm}_{= I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d}\cdot\int\vec{\rho}_0\, dm$$

Siste ledd:

$$\vec{d}\cdot\int\vec{\rho}_0\, dm = \vec{d}\cdot\int(\vec{s}_0 - \vec{z}_0)\, dm \overset{\vec{d}\cdot\vec{z}_0 = 0}{=} \vec{d}\cdot\int\vec{s}_0\, dm$$

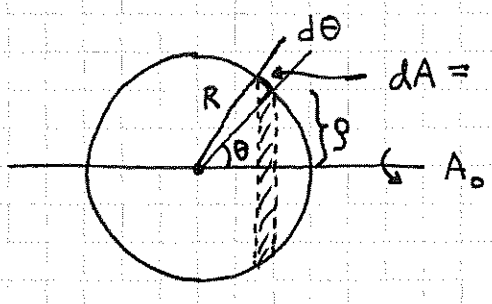
$$= \vec{d}\cdot\int(\vec{r} - \vec{R}_{CM})\, dm = \vec{d}\cdot\underbrace{\int\vec{r}\, dm}_{= M\cdot\vec{R}_{CM}} - \vec{d}\cdot\vec{R}_{CM}\underbrace{\int dm}_{= M} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad I = I_0 + Md^2$$ <u>qed</u>

NB! Beviset for Steiners sats ble <u>feil</u> på tavla. Beklager! Men <u>her</u> er det ok!

Et par tips til øving 8:

I_0 for tynt kuleskall:



$dA = R\, d\theta \cdot 2\pi\rho$ = areal av tynn ring med bredde $R\, d\theta$ og radius ρ

I_0 for kompakt kule:

Kompakt kule = sum av mange tynne kuleskall med radius r, tykkelse dr, og dermed volum $dV = 4\pi r^2\, dr$ og masse $dm = M\cdot dV/V$, der V = kulevolumet

Kinetisk energi for stive legemer [YF 10.3, LL 6.6]

Fra s. 60: $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ når legemet roterer om fast akse.

Mer generell bevegelse vil være translasjon + rotasjon, f.eks hjul som ruller. Total kinetisk energi er da

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

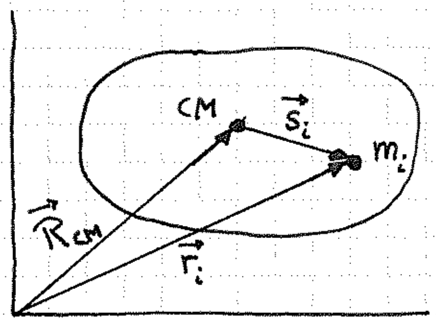
Her er M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til legemets tyngdepunkt

I_0 = treghetsmomentet om en akse gjennom CM

ω = vinkelhastigheten for legemets bevegelse relativt CM

Bevis:



$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\underset{\overset{\|}{\vec{V}}}{\dot{\vec{R}}_{CM}} + \underset{\overset{\|}{\vec{u}_i}}{\dot{\vec{s}}_i}) \cdot (\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (V^2 + u_i^2 + 2 \vec{V} \cdot \vec{u}_i)$$

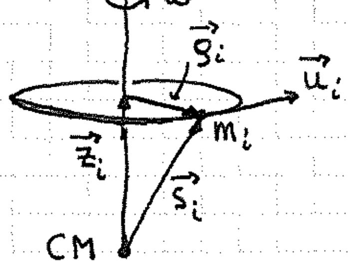
Siste ledd: $\sum_i m_i \vec{V} \cdot \vec{u}_i = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{s}_i = 0$, siden

$\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$

Første ledd: $\frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 = \frac{1}{2} M V^2$

Andre ledd (bevegelsen relativt CM):

For stivt legeme, ren rotasjon om akse gjennom CM (bevises ikke her!)



$$\vec{u}_i = \dot{\vec{s}}_i = \underset{\overset{\|}{0}}{\dot{\vec{z}}_i} + \dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{\rho}}_i = \rho_i \omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{= I_0} \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

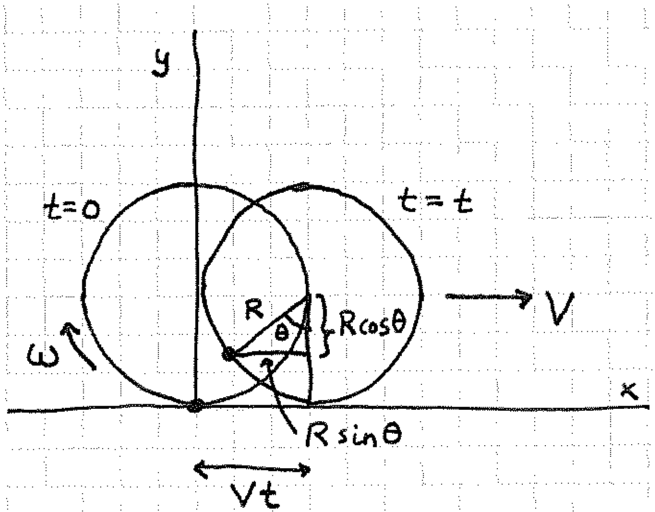
qed

Hit 19.10.11

24.10.11

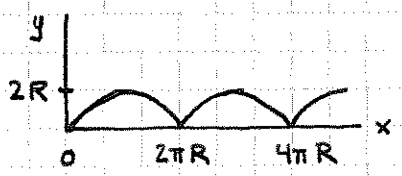
Rulling [YF 10.3, LL 6.7]

Ved ren rulling følger punkt på periferien en sykloide:



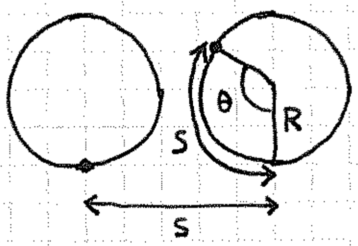
$$x(t) = Vt - R\sin\theta = Vt - R\sin\omega t$$

$$y(t) = R - R\cos\theta = R(1-\cos\omega t)$$



[Demo: Sykkelfelg m/kritt på tavla.]

$$\dot{x} = V - R\omega\cos\omega t, \qquad \dot{y} = R\omega\sin\omega t$$

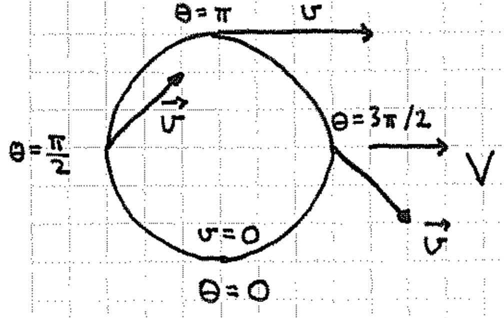


$$s = R\theta$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \\ A &= \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha \end{aligned}\right\} \text{rullebetingelser}$$

Dermed:

$$\vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$$



$$\vec{v}(\pi/2) = V\hat{x} + V\hat{y}$$

$$\vec{v}(\pi) = 2V\hat{x}$$

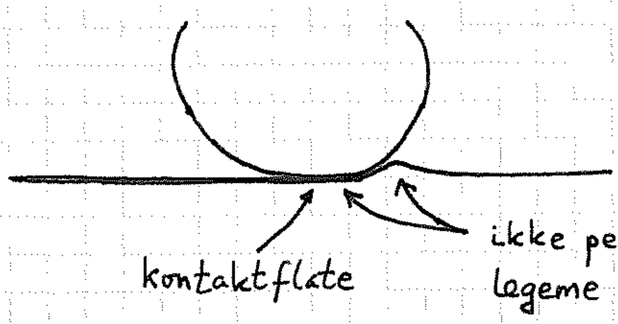
$$\vec{v}(3\pi/2) = V\hat{x} - V\hat{y}$$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

$\omega = \frac{V}{R}$, $I_0 = c \cdot MR^2$ (ring: $c = 1$, skive: $c = \frac{1}{2}$, kule: $c = \frac{2}{5}$)

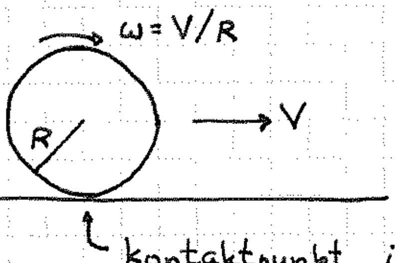
$$\Rightarrow \underline{K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2}$$

Friksjon ved rulling:



$\Rightarrow \mu_r > 0$

perfekt stivt
legeme og
underlag:

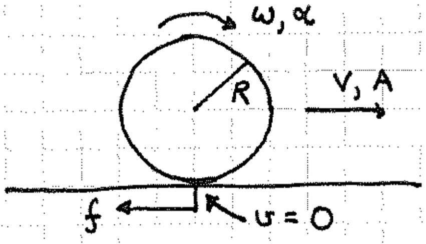


kontakt<u>punkt</u> i ro $\Rightarrow W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mu_r = 0}$

Men (<u>statisk</u>) friksjon μ_s <u>sørger for</u> $\overset{\text{(ren)}}{}$ rulling, og μ_s må være <u>stor nok</u> for å gi <u>ren</u> rulling.

Ren rulling:

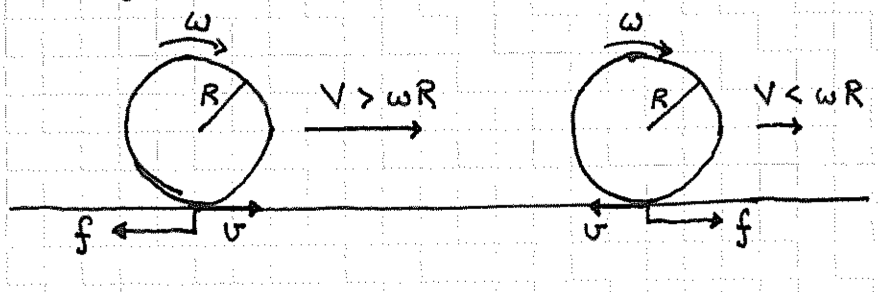


$V = \omega R$

$A = \alpha R$

$f \leq \mu_s N$

Sluring:

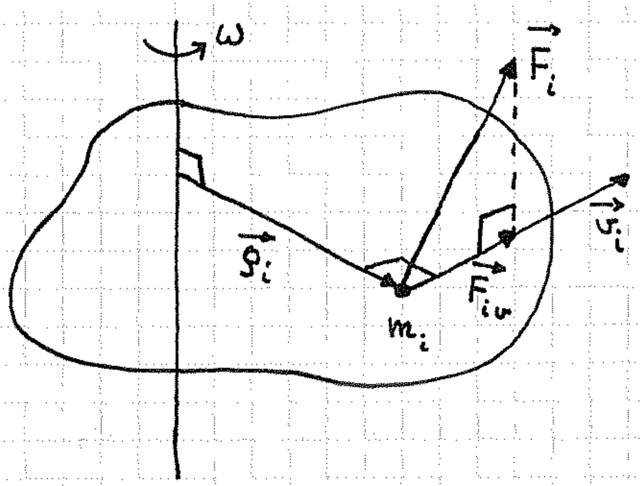


$f = \mu_k N$

Som før er f rettet <u>mot</u> (potensiell) relativ bevegelse i kontaktpunktet.

Rotasjonsdynamikk

Starter "enkelt" og ser på rotasjon av stivt legeme om fast akse:



$\vec{v}_i = \rho_i \omega \hat{\varphi}_i$ = hastigheten til m_i

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}_i$ = avstand fra aksen til m_i

$\vec{F}_i$ = netto ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{iv}$ = komponenten av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

Total effekt P tilført legemet:

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv}\, \rho_i \omega = \omega \sum_i F_{iv}\, \rho_i$$

Gir endring i kinetisk energi $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ (I = treghetsmoment):

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed:

$$\sum_i F_{iv}\, \rho_i = I \dot{\omega}$$

Dreiemoment (= Kraftmoment):

$\tau_i = F_{iv}\, \rho_i$ = kraftens dreiemoment om rotasjonsaksen

der F_{iv} = kraftens komponent langs $\vec{v}_i$

ρ_i = kraftens arm

$\tau = \sum_i \tau_i$ = totalt dreiemoment om rot. aksen

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$ N2 for rotasjon om fast akse

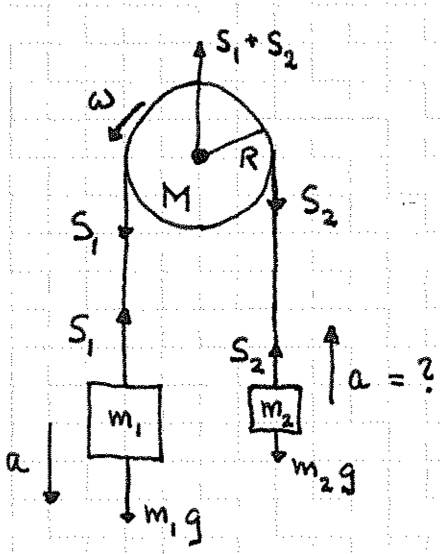
Jf $F = M \dot{v}$, N2 for translasjon (1D)

$$\frac{dW}{dt} = \omega \cdot \tau \,, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau \, d\varphi}$$ = arbeid utført av τ ved rotasjon $d\varphi$

Jf $dW = F \, ds$ = arbeid utført av F ved forflytning ds (1D)

Eks 1: Atwoods maskin (øving 8, oppg 3) [Demo!]



N2 for m_1: $m_1 g - S_1 = m_1 a$

—"— m_2: $S_2 - m_2 g = m_2 a$

⇒ To ligninger, tre ukjente (S_1, S_2, a)!

Lign. nr 3: N2 for skivas rotasjon

$$\tau = I_0 \dot{\omega} \; ; \quad I_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

Snora glir ikke $\Rightarrow v = \omega R \Rightarrow a = \dot{\omega} R$

Netto dreiemoment på skiva (fra snora): $\tau = S_1 \cdot R - S_2 \cdot R$

$$\Rightarrow (S_1 - S_2) R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R a \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{2} M a$$

N2 for $m_1 \Rightarrow S_1 = m_1 g - m_1 a$

N2 for $m_2 \Rightarrow S_2 = m_2 g + m_2 a$

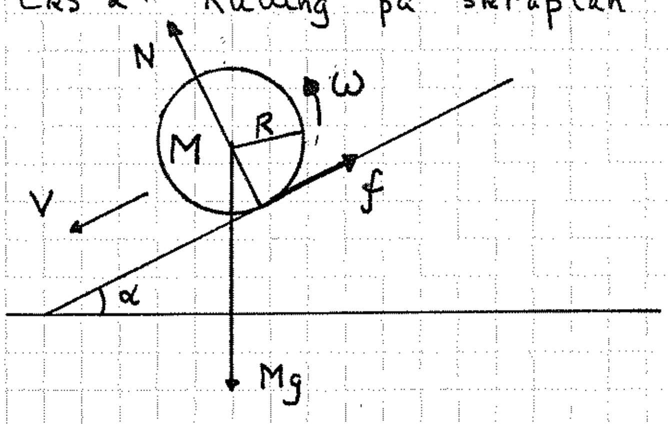
$$\Rightarrow m_1 g - m_1 a - (m_2 g + m_2 a) = \frac{1}{2} M a$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2 + M/2) a$$

Hit 24.10.11

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g}}$$ (som vi fant med energibetraktning i øving 8!)

26.10.11 Eks 2: Rulling på skråplan



Ingen bevegelse ⊥ skråplanet

$\Rightarrow a_\perp = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\alpha$

N2 langs skråplanet: $Mg\sin\alpha - f = M\dot{V}$ (tyngepunkt-bevegelsen)

(1 lign., 2 ukjente: f og $\dot{V}$)

N2 for rot. om akse gjennom CM:

$$\tau = f\cdot R = I_0\dot{\omega} \overset{\text{ren}}{\underset{\text{rulling}}{=}} I_0\dot{V}/R \Rightarrow f = I_0\dot{V}/R^2$$

$$\Rightarrow Mg\sin\alpha - I_0\dot{V}/R^2 = M\dot{V}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \underline{\underline{\frac{g\sin\alpha}{1 + I_0/MR^2}}}$$

$$f = \frac{I_0}{R^2}\dot{V} = \underline{\underline{\frac{Mg\sin\alpha}{1 + MR^2/I_0}}}$$

$$f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\alpha$$

$\Rightarrow \mu_s$ må minst være $\mu_s^{min} = \frac{\tan\alpha}{1 + MR^2/I_0}$ for å få ren rulling

	I_0/MR^2	$\dot{V}$	μ_s^{min}
Kule	2/5	$\frac{5}{7}g\sin\alpha$	$\frac{2}{7}\tan\alpha$
Skive	1/2	$\frac{2}{3}g\sin\alpha$	$\frac{1}{3}\tan\alpha$
Ring	1	$\frac{1}{2}g\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\tan\alpha$

[Demo:

Kappløp på skråplan.]

Mekanisk likevekt [YF 11.1-11.3, LL 7.1]

N1, translasjon:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \text{konst.}$$

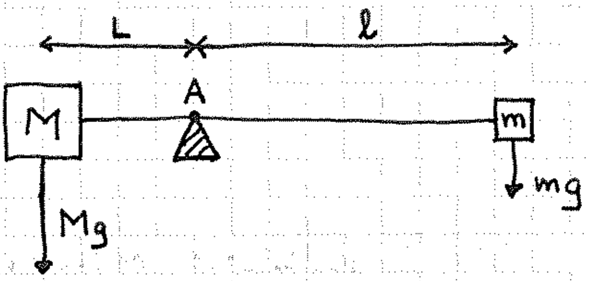
N1, rotasjon om fast akse:

$$\tau = \sum_i \tau_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \text{konst.}$$

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for mekanisk likevekt.

Statisk likevekt: $V = 0$, $\omega = 0$

Eks 1: Vektstang ("Vippehuske") ("Spett")



$m_{\text{stang}} \ll m, M$

Likevekt mhp rotasjon om A: $Mg \cdot L - mg \cdot \ell = 0$

$$\Rightarrow M \cdot L = m \cdot \ell$$

(N1, translasjon ⇒ normalkraft $N = Mg + mg$, rettet oppover, fra ▲ på stanga i A)

Konvensjonelt fortegnsvalg for τ:

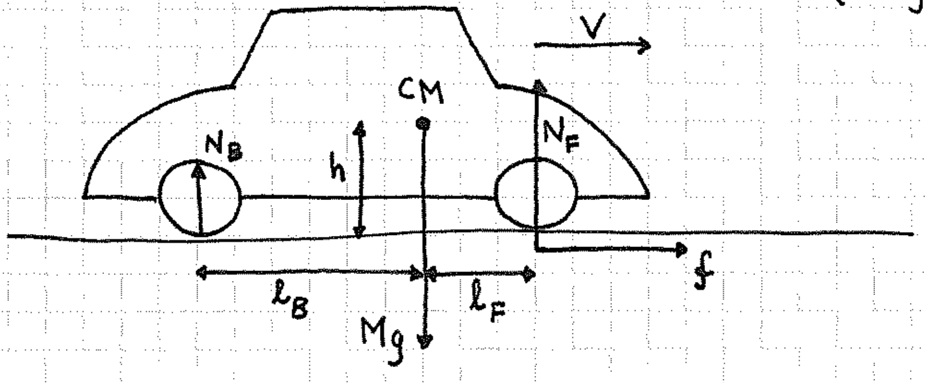
$\tau > 0 \Rightarrow$ rotasjon mot klokka ($\Rightarrow + MgL$)

$\tau < 0 \Rightarrow$ –"– med –"– ($\Rightarrow - mg\ell$)

[Pass på at fortegnene på V og ω blir konsistente.]

Eks 2: Bil som akselererer

Dvs: rotasjonslikevekt ($\tau = 0$) men ikke translasjonslikevekt (⇒ "dynamisk likevekt")



Motoren ⇒ dreiemoment på aksling foran (anta forhjulstrekk)

⇒ forhjul roterer med klokka og skyver veibanen bakover ($-f$)

$\overset{N3}{\Rightarrow}$ veibanen skyver forhjul og bil framover (f)

N2 vertikalt: $N_B + N_F - Mg = 0$

N2 horisontalt: $f = M\dot{V}$

N2 for rotasjon om akse gjennom CM:

$$\tau = N_F \ell_F + f \cdot h - N_B \ell_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{V} = \frac{N_B \ell_B - N_F \ell_F}{Mh}}$$

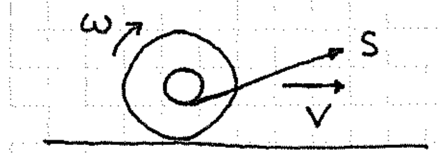
$\dot{V} = 0 \Rightarrow N_B \ell_B = N_F \ell_F$ (OK; "vektstang")

$\dot{V} > 0 \Rightarrow N_B \ell_B > N_F \ell_F$, økt "vekt" på bakhjulene

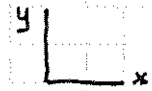
$\dot{V} < 0 \Rightarrow N_B \ell_B < N_F \ell_F$, økt "vekt" på forhjulene

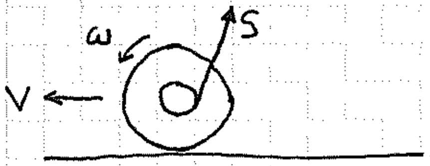
Velkjent:

Eks 3: Snelle, Jojo [Demo!]

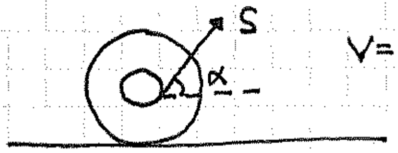


$\Sigma F_x > 0, \ \Sigma \tau_i < 0 \quad (\Sigma F_y = 0)$



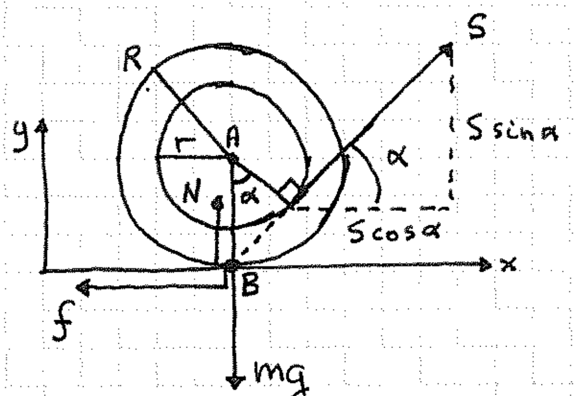


$\Sigma F_x < 0, \ \Sigma \tau_i > 0 \quad (\Sigma F_y = 0)$



$V = 0, \ \omega = 0 \qquad \Sigma F_x = 0, \ \Sigma \tau_i = 0, \ \Sigma F_y = 0$

$\boxed{\alpha = ?}$



Krefter på snella:

S = snordrag

f = friksjon

mg = tyngde

N = normalkraft

$0 = \Sigma F_x = S\cos\alpha - f \Rightarrow \underline{f = S\cos\alpha}$

$0 = \Sigma F_y = S\sin\alpha + N - mg \Rightarrow \underline{N = mg - S\sin\alpha}$

$0 = \Sigma \tau_A = S \cdot r - f \cdot R \Rightarrow Sr = fR = SR\cos\alpha$

$\Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha = r/R}}$

$\left.\begin{array}{l} 2r = 157 \text{ mm} \\ 2R = 248 \text{ mm} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{157}{248} \approx \underline{\underline{51^\circ}}$

Alternativt, rot. likevekt om B:

f, N og mg har null arm mhp B ⇒ bidrar ikke til τ_B

⇒ S må også ha null arm mhp B ⇒ Snoras forlengelse går gjennom B i statisk likevekt ⇒ $\underline{\cos\alpha = r/R}$ ses direkte fra figuren!

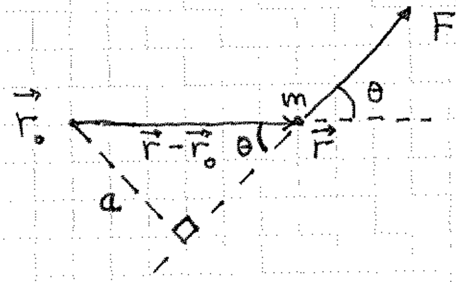
Hit 26.10.11

31.10.11

Rotasjon i 3D [YF 10.1+2+5+6+7 ; LL 5.5, 5.9, 6.x]

Dreiemoment

Punktmasse m i posisjon $\vec{r}$:



$$\vec{\tau} \overset{def}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}$$

$= \vec{F}$'s dreiemoment relativt $\vec{r}_0$; $\vec{r}_0$ = valgt referansepunkt

$\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$; fortegn via høyrehåndsregel
($\Rightarrow \vec{\tau}$ <u>ut</u> av planet i fig. ovenfor)

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$$

dreiemoment = arm × kraft

arm $= a = |\vec{r}-\vec{r}_0| \sin\theta$ = avstand fra $\vec{r}_0$ til linjen definert ved $\vec{F}$ (se figur ovenfor)

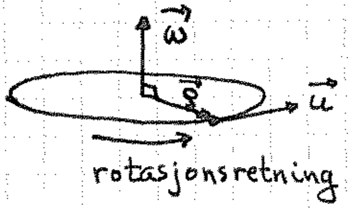
For system med flere masseelementer m_i i posisjon $\vec{r}_i$ påvirket av krefter $\vec{F}_i$:

$\vec{\tau}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$ = dreiemoment fra $\vec{F}_i$, relativt $\vec{r}_0$

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$ = totalt dreiemoment på systemet, relativt $\vec{r}_0$

Valgt referansepunkt $\vec{r}_0$ er <u>felles</u> for hele systemet.

Vinkelhastighet som vektor, $\vec{\omega}$ (kjent fra før, se s. 11):



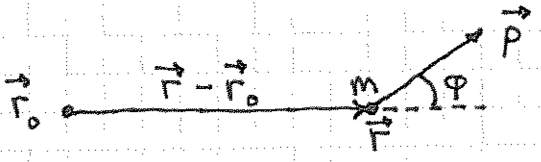
$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ = hastighet

Fortegn på $\vec{\omega}$ via h. h. regel

(rotasjon mot klokka ⇒ $\vec{\omega}$ ut av planet)

Dreieimpuls

Punktmasse m i $\vec{r}$ med impuls $\vec{p} = m\vec{v}$:



$$\vec{L} \overset{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

= punktmassens dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$;

$\vec{r}_0$ = valgt referansepunkt (som for $\vec{\tau}$)

Dermed er: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ Vektoriell N2 for rotasjon

(Jf. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, vektoriell N2 for translasjon)

Bevis for $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \right\}$$

Anta m = konst., og $\vec{r}_0$ = konst. eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \vec{v}}_{= m\vec{v} \times \vec{v} = 0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{v}} \overset{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} \overset{\text{def}}{=} \vec{\tau}$$

qed

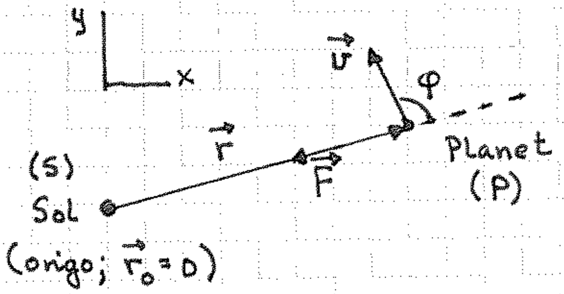
Konserveringslov for dreieimpuls (punktmasse):

$$\boxed{\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}}$$

(Jf: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$; konserveringslov for impuls)

Merk: At $\vec{L} = \text{konst.}$ for isolert system er like fundamentalt som at $\vec{p} = \text{konst.}$ og $E = \text{konst.}$ (når alle energiformer regnes med).

Eks: Keplers 2. lov, Flatesatsen

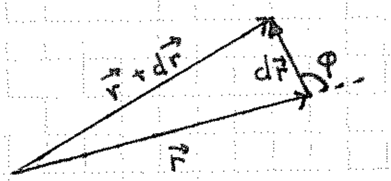


S, P ≈ punktmasser ($R_S, R_P \ll r$)

$\vec{F} \sim -\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

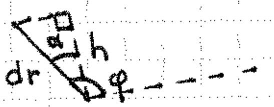
$\Rightarrow \vec{L} = L_z \hat{z} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{konst.}$

$L_z = mrv \sin\varphi$



Areal sveipet over av $\vec{r}$:

$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin\varphi$

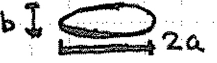
[ $h = dr \cos\alpha = dr \cos(\varphi - \pi/2) = dr \sin\varphi$]

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \sin\varphi = \frac{1}{2} rv \sin\varphi = \frac{1}{2m} L_z = \text{konst.}$$

⇒ $\vec{r}$ (= vektor fra sol til planet) sveiper over like stort areal (dA) pr tidsenhet (dt) langs hele (ellipse-)banen rundt sola. (Keplers 2. lov)

[1. lov: Planetenes baner er ellipser, med sola i det ene av to brennpunkter.

3. lov: $T^2/a^3 = \text{konst.}$ for alle planetene; T = omløpstid, a = store halvakse]



For stivt legeme; dvs system med masseelementer m_i i pos. $\vec{r}_i$ med hastighet $\vec{v}_i$:

$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$ = dreieimpulsen til m_i relativt $\vec{r}_0$

$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ = legemets totale dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$

$\dot{\vec{L}}_i =$ ... som på s. 74... $= (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{\tau}_i$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau},$$

så hvis $\vec{\tau} = 0$, er $\vec{L}$ = konstant også for stivt legeme (og for partikkelsystemer generelt)

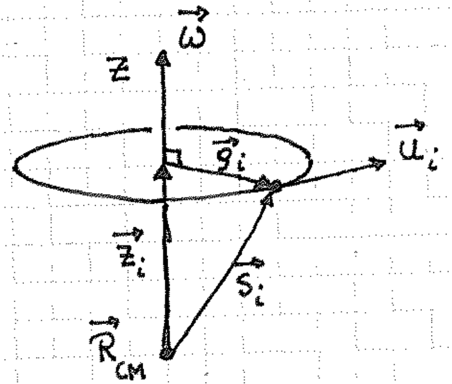
Fra før har vi (s 64):

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

= total kinetisk energi for stivt legeme med masse M, tyngdepunktshastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$, instantan rotasjon om akse gjennom CM med vinkelhastighet $\vec{\omega}$, og treghetsmoment I_0 mhp rotasjonsaksen.

Naturlig spørsmål er da: Kan vi på tilsvarende måte skrive $\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel}$, dvs som sum av bidrag fra bevegelsen til CM (relativt det valgte $\vec{r}_0$, selvsagt!) og bidrag fra masseelementenes bevegelse relativt CM ?

Svaret er ja! Utgangspunkt for beviset er (som på s. 64) Eulers teorem, som slår fast at et stivt legemes instantane bevegelse relativt CM alltid kan beskrives som en rotasjon, med vinkelhastighet $\vec{\omega}(t)$, om en akse gjennom CM. (Eulers teorem bevises ikke her.)



$\vec{s}_i$ og $\vec{u}_i$ er relativkoord. og relativhastighet:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i \qquad (\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra før: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ (s 11 og 74)

$= \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} + \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i$$

$$+ \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$

= banedreieimpulsen pga CM's bevegelse, relativt $\vec{r}_0$

2. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$

Husk: $\vec{R}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = \sum_i m_i \vec{r}_i / M$ (se også s 64)

$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = 0$ ($\vec{V}$ "inngår ikke" i summen over i)

3. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{s}_i)}_{= \vec{u}_i} = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{= 0}) = 0$

4. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel}$ = bidrag pga massedementenes bevegelse relativt CM (uavhengig av valg av $\vec{r}_0$!)

Hit 31.10.11

2.11.11

Vi ser nærmere på $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$

Matematisk identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\}$$

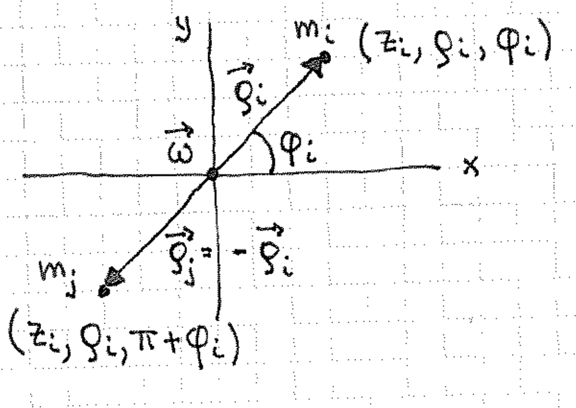
Her er: $\vec{\omega} s_i^2 = \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2)$

$$\vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) = (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i)(z_i \omega) = z_i^2 \vec{\omega} + z_i \omega \vec{\rho}_i$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) = \rho_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{= I_0} \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis legemet har sylindersymmetri om en akse som faller sammen med rotasjonsaksen, er $\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = 0$, fordi bidraget fra m_i i posisjon $(z_i, \vec{\rho}_i)$, dvs sylinderkoordinatene (z_i, ρ_i, φ_i), vil kanselleres av bidraget fra $m_j (= m_i)$ i posisjon $(z_j = z_i, \vec{\rho}_j = -\vec{\rho}_i)$, dvs sylinderkoordinatene $(z_i, \rho_i, \pi + \varphi_i)$:



Vi vil stort sett ha dette oppfylt (men unntak finnes), og da er $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = I_0 \vec{\omega} = \vec{L}_{rel}$

Konklusjon, for stivt legeme (med sylindersymmetri om akse som faller sammen med rot. aksen $\hat{\omega}$):

$$\boxed{\vec{L} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}}$$

Total dreieimpuls (rel. $\vec{r}_0$) = Banedreieimpuls (rel. $\vec{r}_0$) + Spinn (uavh. av $\vec{r}_0$)

* * *

Kommentar til symmetriargumentet s 78:

Overgang til kontinuerlig massefordeling gir

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \rightarrow \int dm\, z \vec{\rho} = \int \underbrace{dV \cdot \mu}_{dm} \cdot z \vec{\rho}$$

Her er μ legemets masse pr volumenhet, og <u>hvis</u> vi har sylindersymmetri om rot. aksen (z-aksen), er μ uavhengig av φ, dvs $\mu(\vec{r}) = \mu(z, \rho)$.

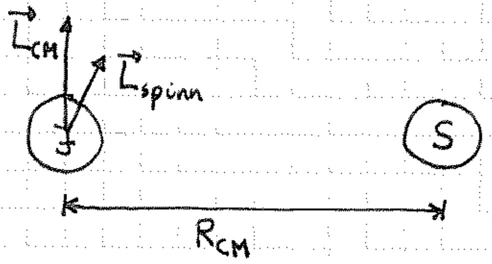
I såfall:

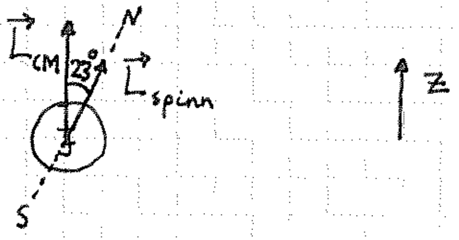
$$\int_V dV\, \mu\, z \vec{\rho} = \int_L dz\, z \int_A dA\, \mu(z,\rho) \vec{\rho},$$

og her blir $\int_A dA\, \mu(z,\rho)\vec{\rho} = 0$

pga at bidragene fra $\vec{\rho}$ og $-\vec{\rho}$ kansellerer hverandre.

Eks 1: $\vec{L}$ for jorda i banen rundt sola (tilnærmet sirkel)

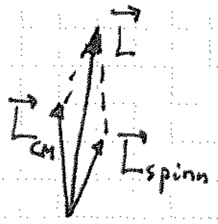




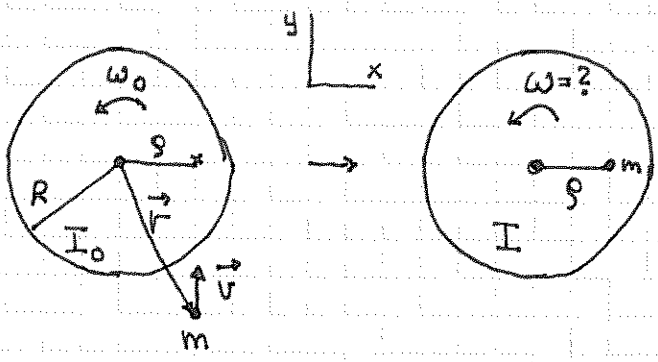
$$\vec{L}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times M_J \vec{V}_J = R_{CM} M_J V_J \hat{z}$$

$$\vec{L}_{spinn} = I_0 \vec{\omega} \quad (\text{med } \omega = 2\pi/(24h))$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{spinn} = \text{total dreieimpuls}$$



Eks 2: Karusell



Du har masse m og lander fullstendig uelastisk på karusellen, som vist i figuren.
Hva blir ω ~~etter~~ landingen?

Løsning: Kan *ikke* bruke energibevarelse (uelastisk støt)

Kan *ikke* bruke impulsbevarelse (det virker ytre kraft $\vec{F}$ fra akslingen på karusellen i støtøyeblikket)

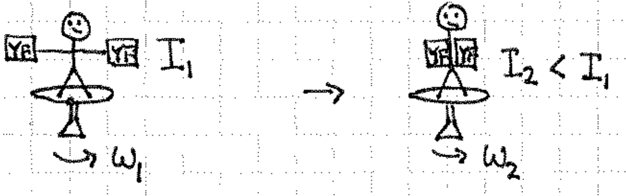
Kan bruke dreieimpulsbevarelse mhp referanse $\vec{r}_0$ i akslingen, for da har $\vec{\tau}_{ytre} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ ingen z-komponent, og L_z er bevart for systemet "du og karusellen".

Før støt: $L_z^i = I_0 \omega_0 + m\rho v$ Etter: $L_z^f = I\omega$; $I = I_0 + m\rho^2$

$$\Rightarrow \omega = \frac{I_0\omega_0 + m\rho v}{I_0 + m\rho^2} = \underline{\omega_0 \frac{I_0 + m\rho v/\omega_0}{I_0 + m\rho^2}}$$

Ser at $\omega > \omega_0$ hvis $m\rho v/\omega_0 > m\rho^2$, dvs $v > \rho\omega_0$, OK! Da har du *større* hastighet enn landingsstedet og karusellen gis en dytt mot klokka!

Eks 3: Piruett. Demo med foreleser, kontorstol og 2 stk YF



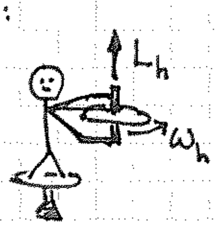
$\vec{\tau}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$

$\Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

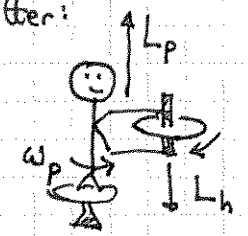
$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1$

Eks 4: Sykkelhjul og stol. Demo

Før:



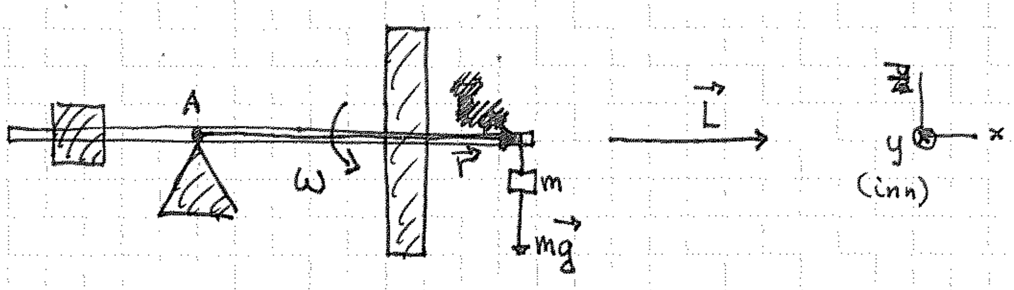
Etter:



$\Delta\vec{L} = 0$

$\Rightarrow L_p = 2L_h$

Eks 5: Gyroskop (Kvalitativt først)



Før m henges på er stang w/roterende skive i likevekt, $\vec{L} = L_i\hat{x}$

Ekstra tyngde $m\vec{g}$ i avstand $\vec{r}$ fra A

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = mrg\,\hat{y}$

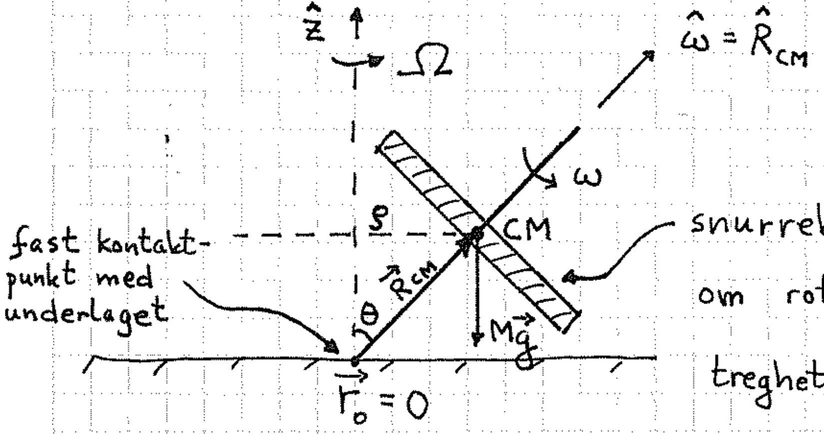
$\Rightarrow \Delta\vec{L} \sim \hat{y}$ ⇒ rotasjon mot klokka (sett ovenfra),

presesjon om z-aksen

Større tyngde $M\vec{g}$ gir raskere presesjon, samt "vipping" opp og ned, nutasjon.

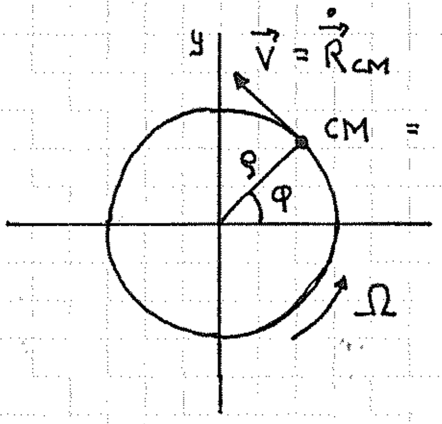
Hit 02.11.11

Presesjon med snurrebass



snurrebass med sylindersymmetri om rotasjonsaksen $\hat{\omega}$; treghetsmoment I_0 mhp $\hat{\omega}$-aksen

- Rask rotasjon ("spinn") om $\hat{\omega}$-aksen, vinkelhastighet ω
- Langsom rotasjon av CM ("presesjon") om $\hat{z}$-aksen, vinkelhastighet $\Omega = d\varphi/dt$:



CM = snurrebassens tyngdepunkt

$$\rho = R_{CM} \sin\theta$$

$$V = \Omega \rho$$

For gitt M, R_{CM}, I_0 og ω, hva blir Ω ?

Total dreieimpuls (mhp $\vec{r}_0 = 0$):

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Bevegelsesligning (N2 for rotasjon):

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$$

med dreiemoment (også mhp $\vec{r}_0 = 0$)

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g \sin(\pi - \theta)\ \hat{\varphi}$$

$$= \hat{\varphi} R_{CM} M g \sin\theta$$

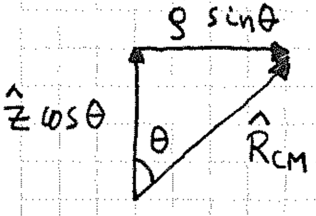
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ M\vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0\vec{\omega} \right\}$$

$$= M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}} + I_0\,\omega\,\dot{\hat{\omega}}$$

(fordi $M\dot{\vec{R}}_{CM} \times \vec{V} = M\vec{V} \times \vec{V} = 0$, og ω = konst.)

$$|M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}| = |M\vec{R}_{CM} \times (-\frac{V^2}{\rho}\hat{\rho})|$$

$$= MR_{CM} \cdot \frac{(\Omega\rho)^2}{\rho} \cdot |\hat{R}_{CM} \times (-\hat{\rho})|$$



$$\hat{R}_{CM} \times (-\hat{\rho}) = (\hat{z}\cos\theta + \hat{\rho}\sin\theta) \times (-\hat{\rho})$$

$$= -\cos\theta\,\underbrace{(\hat{z} \times \hat{\rho})}_{=\hat{\varphi}} - \sin\theta\,\underbrace{(\hat{\rho} \times \hat{\rho})}_{=0}$$

$$\Rightarrow |M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}| = MR_{CM}\,\Omega^2\rho\cos\theta = \underline{MR_{CM}^2\,\Omega^2\sin\theta\cos\theta}$$

$$|I_0\dot{\vec{\omega}}| = I_0\,\omega\,|\dot{\hat{\omega}}| = I_0\,\omega\,|\dot{\hat{R}}_{CM}| = I_0\,\omega\,\frac{1}{R_{CM}}\,|\dot{\vec{R}}_{CM}|$$

$$= I_0\,\omega\,R_{CM}^{-1} \cdot V = I_0\,\omega\,R_{CM}^{-1} \cdot \Omega R_{CM}\sin\theta$$

$$= \underline{I_0\,\omega\,\Omega\,\sin\theta}$$

Hvis $\omega \gg \Omega$, og I_0 er av samme størrelsesorden som MR_{CM}^2 ("$I_0 \sim MR_{CM}^2$"), så ser vi at

$$|I_0\dot{\vec{\omega}}| \gg |M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}|$$

Dvs: $\vec{\tau} \approx I_0\dot{\vec{\omega}}$

som betyr at dynamikken i problemet domineres av snurrebassens spinn ($I_0\vec{\omega}$), mens banedreieimpulsen ($M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}$) kun utgjør et lite bidrag til den totale $\vec{L}$

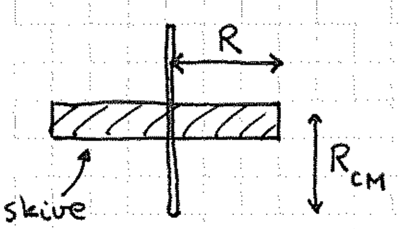
Nå kan vi bestemme Ω :

$$|\vec{\tau}| \approx |I_0 \dot{\vec{\omega}}|$$

$$\Rightarrow \quad M g R_{CM} \sin\theta \approx I_0 \,\omega\, \Omega \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Omega \approx M g R_{CM} / I_0 \omega}}$$

Vi antok $\omega \gg \Omega$, som nå innebærer $\omega \gg M g R_{CM} / I_0 \omega$, dvs $\omega^2 \gg M g R_{CM} / I_0$. Antar vi nå at vi har en "lubben" snurrebass, med $I_0 \approx M R_{CM}^2$, får vi det enkle overslaget $\omega \gg \sqrt{g / R_{CM}}$.



$$I_0 = \tfrac{1}{2} M R^2 \gtrsim \tfrac{1}{2} M R_{CM}^2 \quad \Rightarrow \quad I_0 \approx M R_{CM}^2$$

Ex: Leketøy, $R_{CM} = 5\,\text{cm} \Rightarrow \omega \gg \sqrt{10/0.05} \approx 14\,\text{s}^{-1}$, intet problem!

Da blir $\Omega \approx g/\omega R_{CM} \approx 200/\omega$, som med $\omega = 20\pi\ \text{s}^{-1}$ (dvs $T_\omega = 0.1\,\text{s}$) gir $\Omega = 10/\pi \approx \pi$, dvs en presesjonsperiode $T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 2\,\text{s}$. Rimelig!?

Ex: Sykkelhjul, kvalifiserte gjetninger!

$T_\omega \sim 1/5\ \text{s}$; $R_{CM} \sim 1/5\ \text{m}$; $M \sim 4\ \text{kg}$; $R \sim 1/4\ \text{m}$, $g \approx 10\ \text{m/s}^2$

$$\Rightarrow T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi I_0 \omega}{M g R_{CM}} = \frac{2\pi M R^2\, 2\pi / T_\omega}{M g R_{CM}} \sim \frac{4\pi^2 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot 5}{10 \cdot 1/5}$$

$$= \frac{5\pi^2}{8} \approx \frac{48}{8} = \underline{6\,\text{s}}. \quad \text{Rimelig!}$$

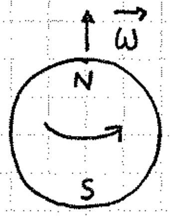
(For flere detaljer : TFY 4345 Klassisk mekanikk)

Roterende koordinatsystem

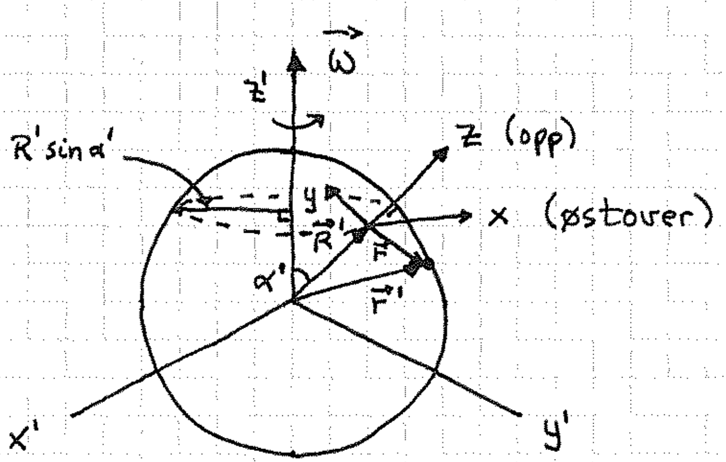
Til nå: Koord. system i ro, dvs inertialsystem, $S' = (x', y', z')$

Nå: Koord. system som roterer med $\vec{\omega}$ = konst., $S = (x, y, z)$

Eks: Jorda, $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \hat{z}'$



[Ser bort fra $\vec{L}_{CM}$ pga banebevegelsen rundt sola]



$\vec{R}'$ = origo i S

$\vec{r}'$ = legemets posisjon målt i S'

$\vec{r}$ = ——"—— S

$\vec{r}' = \vec{R}' + \vec{r}$

(som alle avhenger av tiden t)

Ser på $\vec{A}$ = en eller annen fysisk vektorstørrelse som kan måles i både S (som roterer med jorda) og S' (som ligger fast); f.eks. posisjon, hastighet etc.

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'}$ = endring i $\vec{A}$ pr tidsenhet, målt i S'

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}$ = ——"—— S

Siden S roterer med vinkelhastighet $\vec{\omega}$ i S', har vi

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}}$$

Bevises ikke, men "sannsynliggjøres" i et eksempel.

Eks: $\vec{A}$ = Trondheims posisjon.

Velger origo i S i Trondheim $\Rightarrow \vec{r}' = \vec{R}'$

og $\vec{r} = 0$ = konstant.

Dermed: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = 0$, og $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$

Fra figur s. 85: $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{R}' = \omega R' \sin\alpha' \cdot \hat{\varphi}'$

OK: $(d\vec{r}'/dt)_{S'}$ er Trondheims hastighet målt i S', som stemmer med høyre side av ligningen, da $\omega \cdot R' \sin\alpha'$ nettopp er banehastigheten for uniform sirkelbevegelse med radius $R' \sin\alpha'$ og vinkelhastighet ω. Her er retningen $\hat{\varphi}' = \hat{x}$, dvs østover.

—— · ——

Mål: Å finne sammenhengen mellom kraften $\vec{F}'$ som virker på legemet i S' og kraften $\vec{F}$ som virker på legemet i S. I følge Newton (N2) er dette det samme som å finne sammenhengen mellom akselerasjonene i S' og S.

Strategi: Bruk ligningen nederst s. 85, først med $\vec{A} = \vec{r}'$ = legemets posisjon målt i S', og dernest med $\vec{A} = \vec{v}' = d\vec{r}'/dt$ = legemets hastighet målt i S'.

- $\vec{A} = \vec{r}\,'$: $\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'}}_{} = \vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{u}$

$= \vec{v}\,' =$ legemets hastighet målt i S'

$\vec{u} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S$ = legemets hastighet målt i S

[$\vec{R}\,'$ ligger fast i S ($\vec{R}\,'$ = origo i S)
$\Rightarrow (d\vec{R}\,'/dt)_S = 0$]

- $\vec{A} = \vec{v}\,' = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'}$:

$$\underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{S'}}_{\text{legemets akselerasjon målt i } S'} = \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'}\right)_S$$

$$= \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{u}\right] + \left(\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{u}\right]\right)_S$$

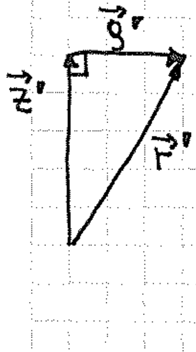
$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \vec{\omega}\times\vec{u} + \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S}_{=\vec{u}} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + 2\,\vec{\omega}\times\vec{u} + \dot{\vec{u}}$$

Vektoridentitet: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A}\cdot\vec{B})$
(se s. 78)

$$\Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,') - \vec{r}\,'(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$$

$$= \vec{\omega}\left(\omega\hat{z}'\cdot(z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\right) - (z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\,\omega^2$$



$$= \underbrace{\vec{\omega}\,\omega z' - z'\hat{z}'\,\omega^2}_{=0} - \vec{\rho}\,'\omega^2$$

$$= -\omega^2\vec{\rho}\,'$$

N2 i S' : $\vec{F}\,' = m\left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{S'}$

N2 i S : $\vec{F} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S = m\dot{\vec{u}}$

Dermed:

$$\vec{F}' = m\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)_{S'} = -m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\,\vec{\omega}\times\vec{u} + \underbrace{m\dot{\vec{u}}}_{=\vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}' + m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}}$$

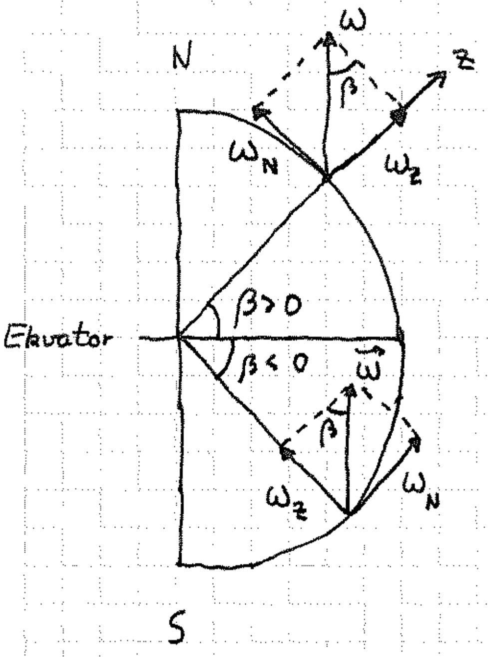
$m\omega^2\vec{\rho}'$ = sentrifugalkraften; retning normalt på og bort fra rotasjonsaksen

$2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$ = Corioliskraften; retning normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{\omega}$, virker kun på legemer i bevegelse i S ($\vec{u} \neq 0$)

Hit 07.11.11

09.11.11

Corioliskraften



- $\vec{F}_c = 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$
- $\vec{\omega} = \omega_z\,\hat{z} + \omega_N\,\hat{N}$
- Anta hastighet horisontalt, $\vec{u} = \vec{u}_h$
- Mest interessert i virkningen av $\vec{F}_c$ horisontalt. (Vertikalt domineres bevegelsen av tyngdekraften.)

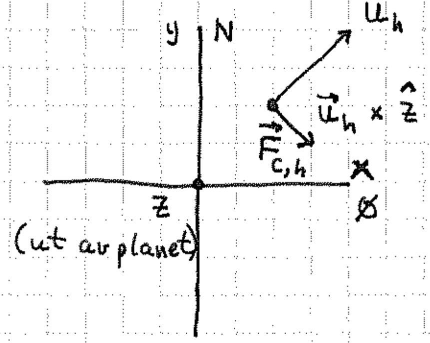
⇒ ser på

$$\vec{F}_{c,h} = 2m\left(\vec{u}_h \times \vec{\omega}\right)_h$$

Med horisontal $\vec{u}_h$ vil bare $\omega_z \hat{z}$ bidra til $\vec{F}_{c,h}$:

$$\vec{F}_{c,h} = 2m\,\omega_z\,\vec{u}_h \times \hat{z}$$

På nordlige halvkule:

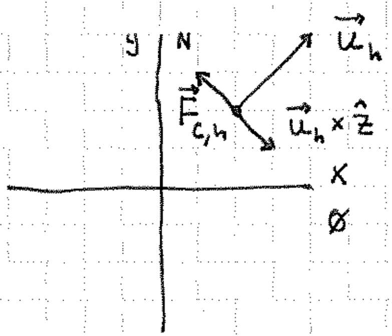


$\omega_z > 0$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{c,h}$ samme retning som $\vec{u}_h \times \hat{z}$

$\Rightarrow$ avbøyning mot høyre

På sørlige halvkule:

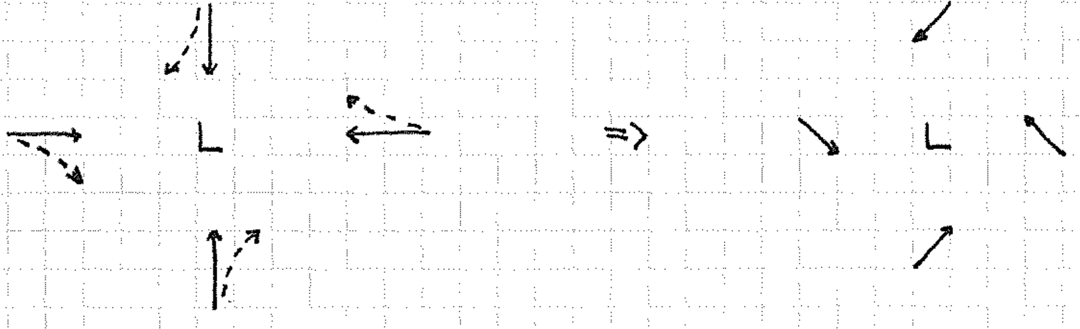


$\omega_z < 0$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{c,h}$ motsatt retning av $\vec{u}_h \times \hat{z}$

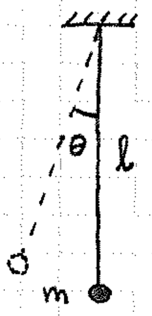
$\Rightarrow$ avbøyning mot venstre

Eks: Værkart med lavtrykk (nordlige halvkule)



Luft strømmer fra steder med høyt trykk til steder med lavt trykk, og dermed inn mot et lavtrykkssenter (L). $\vec{F}_{c,h}$ gir avbøyning mot høyre, og dermed strømning mot klokka rundt L.

Foucaultpendelen



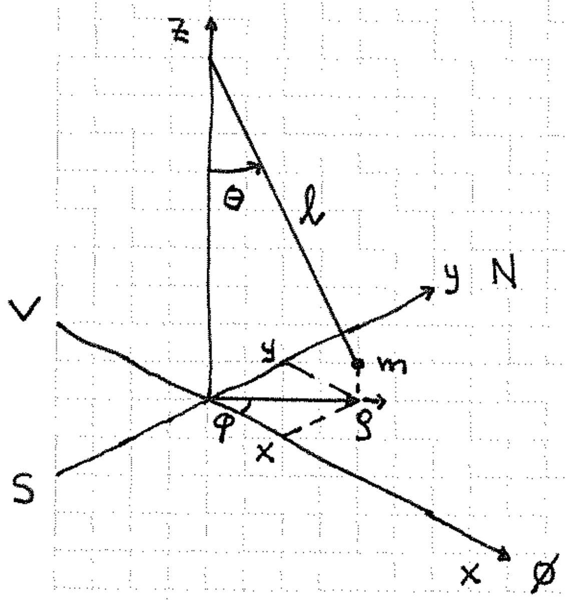
Pendel i Realfagbygget:

$\ell = 25\text{ m}$, $T = 10\text{ s}$

Max utsving fra likevekt: ca 1 m

$\Rightarrow \theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ hele tiden

Pendelen henger i et roterende koordinatsystem (Jorda!) på breddegrad $\beta = 63.5°$. "Rask" svingning fram og tilbake styres av tyngdekraftens komponent tangentielt til pendelkulas sirkelbane. Vi analyserer dette først.
I tillegg får pendelkula en liten avbøyning mot høyre pga Corioliskraften $2m\vec{u}\times\vec{\omega}$. Kulas hastighet er nesten helt horisontal, $\vec{u} = \vec{u}_h = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$, og vi kan bruke $\vec{F}_{c,h}$ som øverst s. 89.

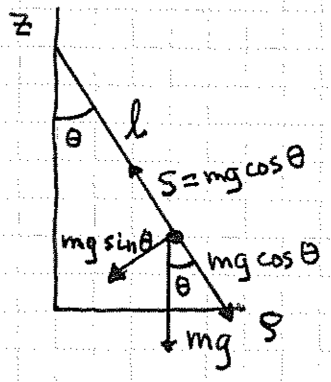


$$\vec{\varrho} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

$$\varrho = \ell\sin\theta \approx \ell\theta$$

$$x = \varrho\cos\varphi \approx \ell\theta\cos\varphi$$

$$y = \varrho\sin\varphi \approx \ell\theta\sin\varphi$$



N2 ∥ sirkelbanen: $-mg\underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta} = ma = +m\ell\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

(Fortegn: $\theta > 0$ i figuren)

$$x = \underbrace{(\ell\cos\varphi)}_{\text{konst.}}\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = (\ell\cos\varphi)\,\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow$ samme ligning for x som for θ : $\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$

$$y = \underbrace{(\ell\sin\varphi)}_{\text{konst.}}\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = (\ell\sin\varphi)\,\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow$ samme ligning for y som for θ : $\ddot{y} + \frac{g}{\ell}y = 0$

Generell løsning: $x(t) = A\sin\Omega_0 t + B\cos\Omega_0 t$; $\Omega_0^2 = g/\ell$

og tilsvarende for $y(t)$. [Kjent fra R2 på VGS!]

<u>Corioliskraften</u> gir et lite ekstra bidrag til disse ligningene:

$$\vec{u}_h \times \hat{z} = (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \times \hat{z} = -\dot{x}\hat{y} + \dot{y}\hat{x}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{c,h} = 2m\omega_z(\dot{y}\hat{x} - \dot{x}\hat{y})$ der $\omega_z = \omega\sin\beta$ (se figur s. 88)

$\Rightarrow$ Total kraft i x-retning (vel: vi neglisjerer sentrifugalkraften!) :

$F_x = S_x + F_{c,hx}$ ($\vec{S}$ = snordraget)

$$= -mg\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}\cdot\underbrace{\underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta}\cdot\cos\varphi}_{= x/\ell} + 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{y}$$

$$= -mgx/\ell + 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{y}$$

Total kraft i y-retning:

$F_y = S_y + F_{c,hy}$

$$= -mg\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}\cdot\underbrace{\sin\theta\cdot\sin\varphi}_{\approx\theta\cdot\sin\varphi = y/\ell} - 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{x}$$

$$= -mgy/\ell - 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{x}$$

Innfører $\varepsilon \equiv \omega\sin\beta$ $\Rightarrow$ $F_x = -mgx/\ell + 2m\varepsilon\dot{y}$

$F_y = -mgy/\ell - 2m\varepsilon\dot{x}$

N2 i x- og y-retning gir da

$$-mgx/\ell + 2m\varepsilon\dot{y} = m\ddot{x}$$
$$-mgy/\ell - 2m\varepsilon\dot{x} = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} - 2\varepsilon\dot{y} + \Omega_0^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{x} + \Omega_0^2 y = 0$$

La oss se på tallverdier:

$$\Omega_0 = \sqrt{g/\ell} = \sqrt{9.81/25} \approx 0.63 \ s^{-1}$$

$$\varepsilon = \omega \cdot \sin\beta = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot \sin 63.5° \approx 6.5 \cdot 10^{-5} \ s^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \ll \Omega_0 \qquad [\varepsilon/\Omega_0 \approx 10^{-4}]$$

Løsningen av de to koblede diff-ligningene er da, når vi velger initialbetingelsene $x(0) = y(0) = 0$ og $\vec{u}(0) = V\hat{x}$:

$$x(t) = \frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cdot \cos\varepsilon t$$
$$y(t) = -\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cdot \sin\varepsilon t$$

faktoren $\sin\Omega_0 t$:

pendelens "raske" svingning fram og tilbake, periode $T = 2\pi/\Omega_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 10\,s$

faktoren $\cos\varepsilon t = \cos(\omega(\sin\beta)\cdot t)$, evt. $\sin\varepsilon t$:

en <u>langsom</u> dreining av pendelens svingeretning, forårsaket av Corioliskraften $2m\vec{u}\times\vec{\omega}$, retning <u>med</u> klokka på nordlige halvkule (<u>mot</u> klokka på sørlige halvkule),

periode $T_F = 2\pi/\varepsilon = 2\pi/\omega\sin\beta = 1$ døgn $/\sin\beta \overset{\text{i Trondheim}}{\underset{\beta=63.5°}{=}} \approx 26.8$ h

$\Rightarrow$ det tar ca 13.4 timer for pendelen å velte alle pendelpinnene i U3

Kommentar til koblede ligninger og løsning s. 92:

Oppgitt løsning $x(t)$ og $y(t)$ er <u>ikke eksakt</u> løsning av de to koblede diff-ligningene, men en <u>god tilnærmelse</u> når $\varepsilon \ll \Omega_0$. La oss sette inn og se! Må regne ut $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}$ og $\ddot{y}$:

$$\dot{x} = V \cos\Omega_0 t \cos\varepsilon t - \frac{V\varepsilon}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t$$

$$\dot{y} = -V \cos\Omega_0 t \sin\varepsilon t - \frac{V\varepsilon}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t$$

$$\ddot{x} = -V\Omega_0 \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t - 2V\varepsilon \cos\Omega_0 t \sin\varepsilon t - \frac{V\varepsilon^2}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t$$

$$\ddot{y} = V\Omega_0 \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t - 2V\varepsilon \cos\Omega_0 t \cos\varepsilon t + \frac{V\varepsilon^2}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t$$

Innsetting av disse uttrykkene i de to diff-ligningene resulterer i at alle ledd som <u>ikke</u> inneholder ε (i faktoren <u>foran</u> produktet av de to trigonometriske funksjonene) adderer seg til null, og at alle ledd som inneholder ε^1 også adderer seg til null.
Med andre ord: $x(t)$ og $y(t)$ er løsninger "til orden ε", eller "til lineær orden i ε", eller "til $\mathcal{O}(\varepsilon)$", som man også kan skrive dette. Dette er godt nok for oss! Ledd som inneholder ε^2 er <u>mye mindre</u> enn leddene som er proporsjonale med ε^0 og ε^1, dersom $\varepsilon \ll \Omega_0$.
Konkret er det slik at ligningen $\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{y} + \Omega_0^2 x = 0$ inneholder <u>to</u> ledd som er proporsjonale med ε^2, slik at venstre side blir

$$\varepsilon^2 \cdot \left\{ -\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t + 2\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t \right\} \neq 0,$$

så vi ser at "til orden ε^2" er $x(t)$ og $y(t)$ <u>ikke</u> løsninger. Men, som sagt, denne lille feilen bryr vi oss ikke om.

I Matlab-programmet foucault_anim.m illustreres dreiningen av svingeretningen ved at pendelkulas posisjon, ved max utsving, merkes av ca hver halve time, over et tidsrom på 13.5 timer, som er litt mer enn en halv periode $T_F/2$ (se nederst s. 92).

Hit 09.11.11

14.11.11

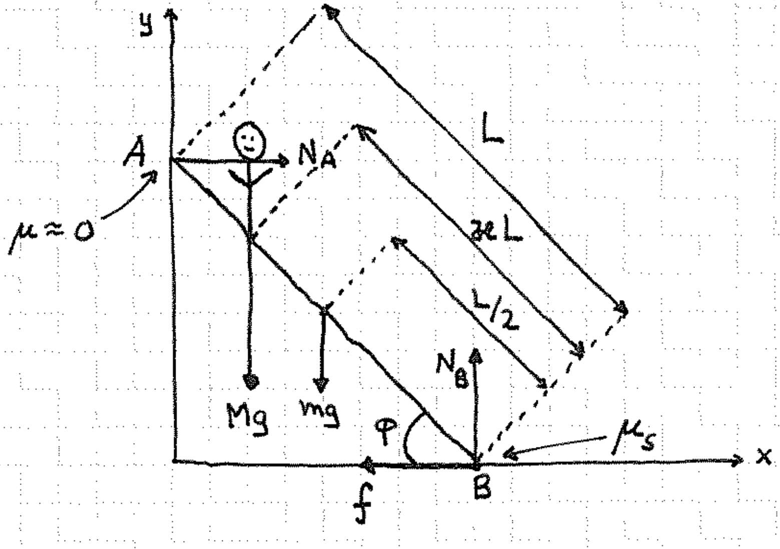
Statisk likevekt [YF 11.1–11.3, LL 7.1]

Når et legeme er i statisk likevekt, er

$\sum_i \vec{F}_i = 0$ (sum av ytrekrefter $= 0$)

$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$ (sum av ytre dreiemoment $= 0$, mhp ethvert referansepunkt $\vec{r}_0$)

Eks 1: Person i stige



Aktuelle spørsmål:

- Minimal φ uten at stigen glir?
- Maksimal $\varkappa$ uten at stigen glir? ($\varkappa$ = "kappa")

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = (m+M)g \qquad (2)$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg\,\frac{L}{2}\cos\varphi + Mg\,\varkappa L\cos\varphi - N_A L\sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

Dessuten: $f_{max} = \mu_s N_B$ (4)

Fra (3): $N_A = (m/2 + \varkappa M)g/\tan\varphi$

Kombinert med (1), (2) og (4): $\underline{m/2 + \varkappa M \leq \mu_s (m+M)\tan\varphi}$

Dermed: $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{m/2 + \varkappa M}{(m+M)\mu_s}\right\}$

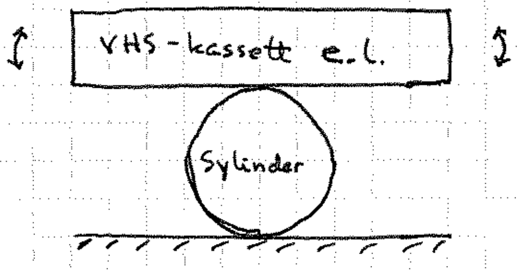
$$\varkappa_{max} = \frac{m+M}{M}\mu_s \tan\varphi - \frac{m}{2M}$$

Eksempel, tallverdier: $M = 70\,\text{kg}$, $m = 5\,\text{kg}$, $\mu_s = 0.3$

- Hvis $\mathcal{H} = 3/4$: $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{5/2 + 70 \cdot 3/4}{75 \cdot 3/10}\right\} \approx 68°$
- Hvis $\varphi = 45°$: $\mathcal{H}_{max} = \frac{75}{70} \cdot \frac{3}{10} \cdot 1 - \frac{5}{140} \approx 0.29$

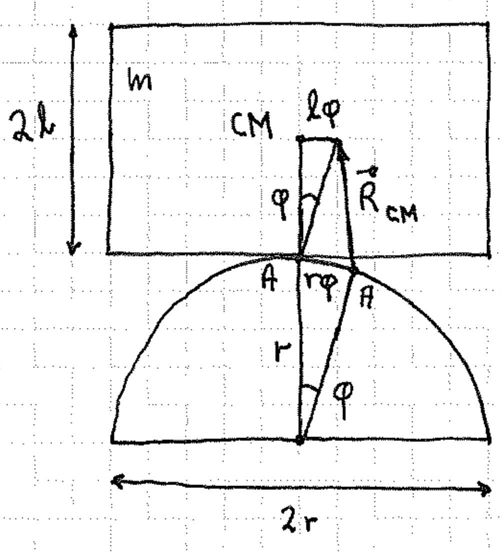
Kommentar: Hvis $\mu_s > 0$ mellom vegg og stige, (og det er den jo!) blir problemet ubestemt. Ekstra ligning $\Sigma \tau_A = 0$ gir intet nytt (prøv selv!), så vi har da 4 ukjente (f_A, f_B, N_A, N_B) men bare 3 ligninger. Må betrakte stigen som "ikke-perfekt" stivt legeme (dvs elastisk) for å komme i mål.

Eks 2: Balansering på sylinder



Stabil eller ustabil likevekt?

Kort argument:



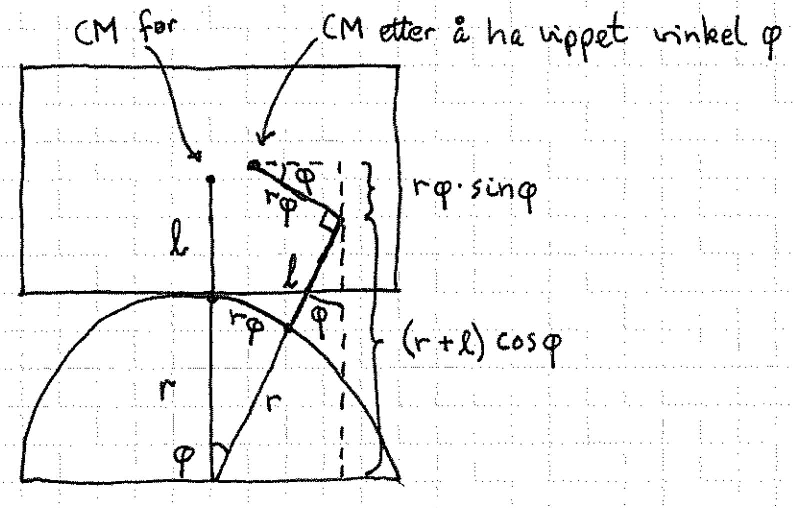
Når kassetten vippes en (liten) vinkel φ, flyttes CM (ca) horisontalt lφ, mens kontaktpunktet A flyttes (ca) horisontalt rφ.

Stabil likevekt hvis $l\varphi < r\varphi$, dvs $l < r$, fordi dreiemomentet

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times m\vec{g}$$

da gir rotasjon tilbake mot likevekt.

Alternativ løsning med energibetraktninger:



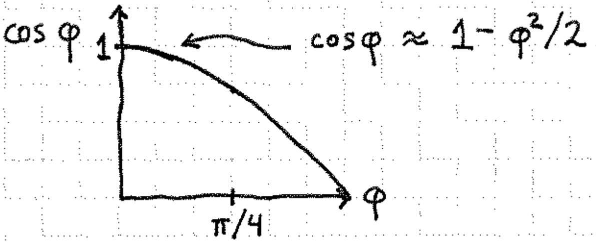
CM før: $h_i = r + \ell$

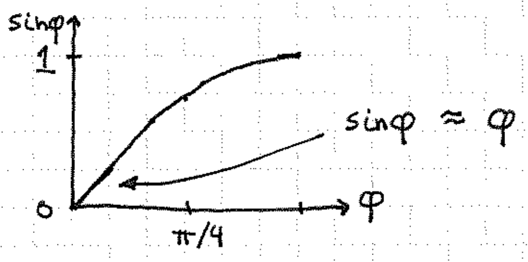
CM etter: $h_f = (r+\ell)\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi = h(\varphi)$

$\Rightarrow$ Kassettens potensielle energi: (Velger $U=0$ ved $\varphi=0$.)

$$U(\varphi) = mgh_f - mgh_i = mg\{(r+\ell)(\cos\varphi - 1) + r\varphi\sin\varphi\}$$

For <u>små</u> vinkler φ (dvs $\varphi \ll 1$):

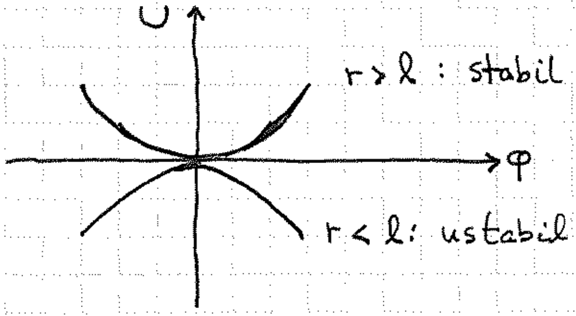




[Jf Taylorrekker; se også Rottmann.]

$$\Rightarrow U(\varphi) \approx mg\{(r+\ell)(-\varphi^2/2) + r\varphi\cdot\varphi\} = mg\varphi^2\left\{-\frac{r}{2} - \frac{\ell}{2} + r\right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}mg(r-\ell)\varphi^2}$$



Hvis $r > \ell$, vil kassetten vippe fram og tilbake omkring likevekt $\varphi = 0$.

Vi har en <u>harmonisk oscillator</u>!

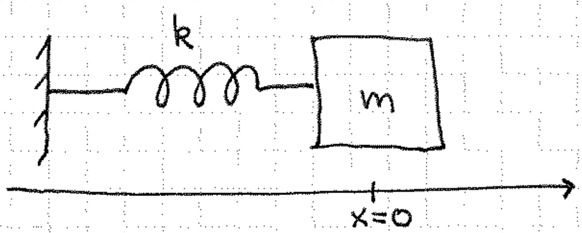
Svingninger [YF 14, LL 9]

Svingninger = Oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring en likevektsposisjon

[Kommentar: Bølger er svingninger som forplanter seg i rommet. FY1002 TFY4160]

Eksempler: Pendel (klokke, huske,...); Gitarstreng; Tidevann; Avstanden mellom jorda og sola; Vibrerende atomer i molekyler og faste stoffer; ......

Enkel harmonisk svingning [YF 14.2, LL 9.1-9.3] [Kjent fra R2, VGS]



(likevekt; F=0)

$\vec{F} = -kx\,\hat{x}$ (Hookes lov)

x = utsving fra likevekt

k = fjærkonstant

(se s. 38)

N2 horisontalt (anta friksjonsfritt underlag, evt $mg \ll kx$)

$$-kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Innfører $\omega^2 = k/m$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ 1D harmonisk oscillator

Ser at både $\sin\omega t$ og $\cos\omega t$ er løsning:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\omega t) = -\omega^2\sin\omega t \; ; \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t) = -\omega^2\cos\omega t$$

$\Rightarrow$ Generell løsning er: $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$

evt. $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

[Identiske hvis $B = A\cos\varphi$ og $C = -A\sin\varphi$, sjekk selv!]

Størrelser og begreper:

A = amplituden = max utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet $[\omega] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega$ = perioden = tid pr svingning $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvensen = antall svingninger pr tidsenhet $[f] = Hz$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

Hit 14.11.11

φ = fasekonstanten $[\varphi] = 1$

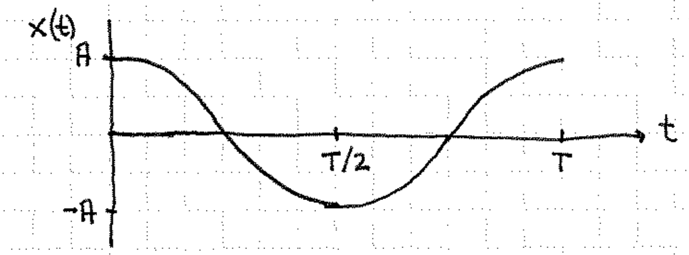
16.11.11

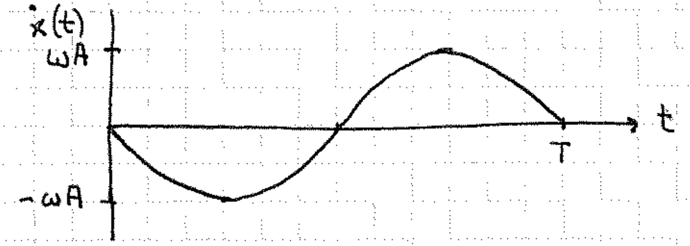
Fra $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ finner vi lett $\dot{x}(t)$ og $\ddot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

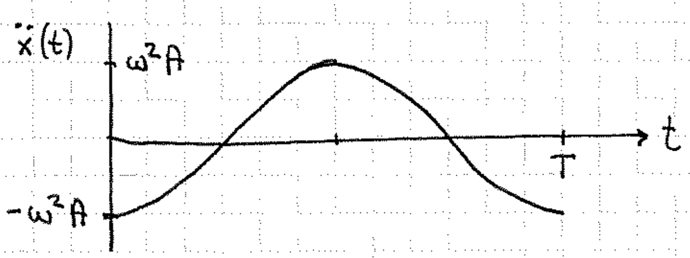
Grafisk, med valget $\varphi = 0$:





$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$\Rightarrow \dot{x}(t)$ faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til $x(t)$



$\ddot{x}(t) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

$\Rightarrow \ddot{x}$ faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til $\dot{x}$ og π i forhold til x

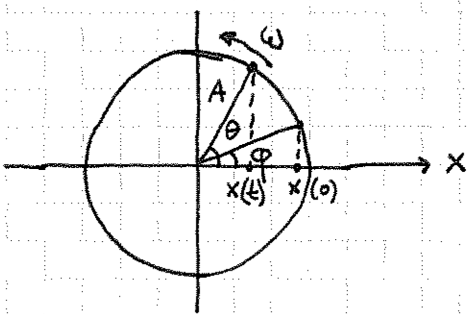
Kjennskap til to initialbetingelser, f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$, fastlegger A og φ:

$$x(0) = A\cos\varphi\ , \quad \dot{x}(0) = -\omega A \sin\varphi \Rightarrow \dot{x}(0)/\omega = -A\sin\varphi$$

$$\Rightarrow x(0)^2 + \dot{x}(0)^2/\omega^2 = A^2 \quad \Rightarrow A = \sqrt{x(0)^2 + \dot{x}(0)^2/\omega^2}$$

og $\tan\varphi = -\dfrac{\dot{x}(0)/\omega}{x(0)} \quad \Rightarrow \varphi = -\arctan\left\{\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right\}$

Vi kan assosiere 1D harm. osc. med sirkelbevegelse:



$\theta(t) = \omega t + \varphi$ = fasen

A = amplituden

$x(t) = A\cos\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Energibetraktninger [YF 14.3, LL 9.4]

(se også s. 38)

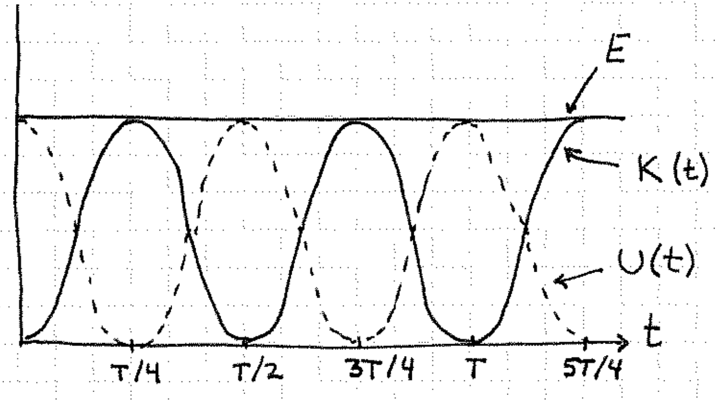
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m\,\omega^2}_{=k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k\, x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\left[\text{Husk: } U = -\int_0^x \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_0^x (-kx)\cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 ; \quad \text{se s. 38}\right]$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ = konst.

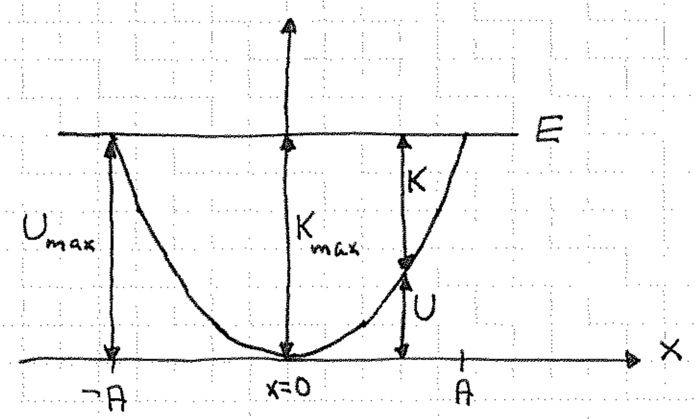
Vi har et konservativt system, og energien E er bevart.
(se s 31-39)



Energien "pendler" mellom kinetisk og potensiell.

$K_{max} = U_{max} = E$

$K_{min} = U_{min} = 0$



$$\vec{F} = -\nabla U = -\hat{x}\,\frac{dU}{dx}$$

$$= -\hat{x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx\,\hat{x}\text{; ok!}$$

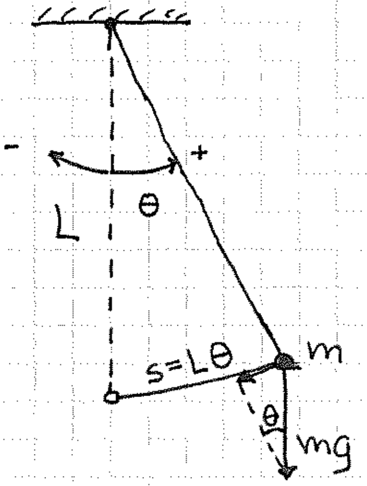
Kjennetegn for harm. osc:

- F prop. med utsving fra likevekt $(F = -kx = -m\omega^2 x)$
- U prop. med kvadratet av utsvinget $(U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)$
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel, temperatur, trykk osv.

Vi ser på et par eksempler!

Eks 1: Matematisk pendel (jf. Foucault-pendelen)

[YF 14.5, LL 9.6]



Tyngdens komponent langs sirkelbuen:

$$-mg \sin\theta$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad -mg\sin\theta = m\ddot{s} = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Dette er lign. for harm. osc., med $\omega = \sqrt{g/L}$, $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Løsning: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$; θ_0 = amplitude

<u>Demo</u> med $L = 1$ m gir $T \approx 2$s, som stemmer bra med $2\pi\sqrt{1/9.8} \approx 2$s.

Vi ser at vi alternativt kunne ha brukt N2 for rotasjon (om festepunktet i taket):

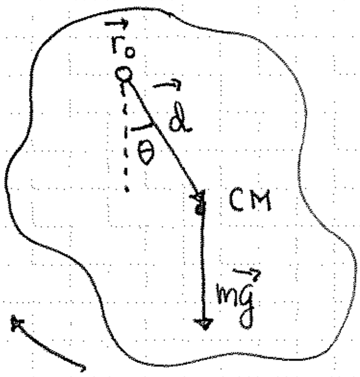
$\tau = I\alpha = I\ddot{\theta}$, med $I = mL^2$ og

$\vec{\tau} = \vec{L} \times m\vec{g}$; $\tau = -L \cdot mg \cdot \sin\theta \approx -L \cdot mg \cdot \theta$

(Fortegn: $\theta > 0 \Rightarrow \tau$ som gir rotasjon/svingning <u>med</u> klokka)

Eks 2: Fysisk pendel [YF 14.6, LL 9.6]

Stivt legeme, masse m, svinger om akse gjennom $\vec{r}_0$, treghetsmoment I mhp denne aksen:



$$\tau = I\ddot{\theta}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{d} \times m\vec{g}| = mgd\sin\theta$$

$$\theta > 0 \Rightarrow \tau < 0 \Rightarrow \tau = -mgd\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad -mgd\cdot\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

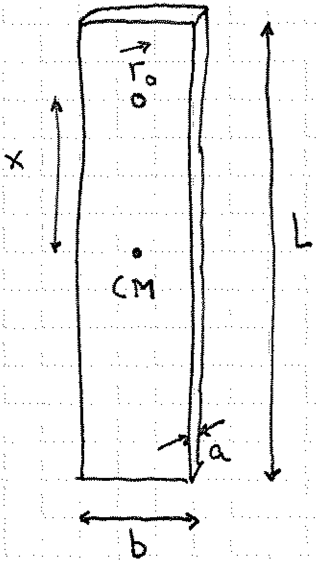
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega = \sqrt{mgd/I}$$

Kontroll av resultat: Bør få matematisk pendel hvis vi lar stivt legeme → punktmasse m i CM:

$$I = m\cdot d^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/d}, \quad \text{ok!}$$

Eks 3: Svingende trefjøl



$L = 942$ mm, $b = 53$ mm, $a = 8$ mm

Fjøla svinger om akse gjennom $\vec{r}_0$, i avstand x fra CM.

$$I(x) = \frac{1}{12}m(L^2+b^2) + mx^2$$

$$T(x) = 2\pi\sqrt{(L^2/12 + b^2/12 + x^2)/gx}$$

Se øving 12, oppgave 3.

<u>Demo</u> gir $T(x = 15\text{ mm}) \approx 4$ s og $T(x = 272\text{ mm}) \approx 1.5$ s.

Hit 16.11.11

21.11.11

Dempede svingninger [YF 14.7, LL 9.7]

Har i praksis alltid noe friksjon, slik at fri svingninger dempes.

Eks: 1) Langsom bevegelse i fluid (gass, væske):

Friksjonskraft $\vec{f} = -b\cdot\dot{x}\cdot\hat{x}$; b= dempingskonstant

2) Rask bevegelse i fluid: $\vec{f} = -D\dot{x}^2\hat{x}$ (turbulens)

3) Tørr friksjon: $\vec{f} = -\mu_k N\hat{v}$

Vi antar her tilfelle 1), og N2 blir $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$, dvs

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

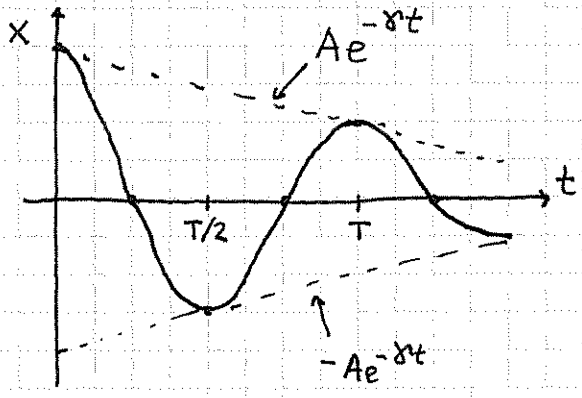
Løsningen x(t) avhenger av om vi har svak ($(b/2m)^2 < k/m$) eller sterk ($(b/2m)^2 > k/m$) demping.

Svak demping ("underkritisk"): $(b/2m)^2 < k/m$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

der $\gamma \equiv b/2m$ og $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; $\omega_0^2 \equiv k/m$

Som vanlig må A og φ fastlegges med kjennskap til to initialbetingelser, f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.



Merk:

- Redusert frekvens pga demping: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$
- Max utsving avtar eksponentielt, $A e^{-\gamma t}$

Sterk demping ("overkritisk") : $(b/2m)^2 > k/m$

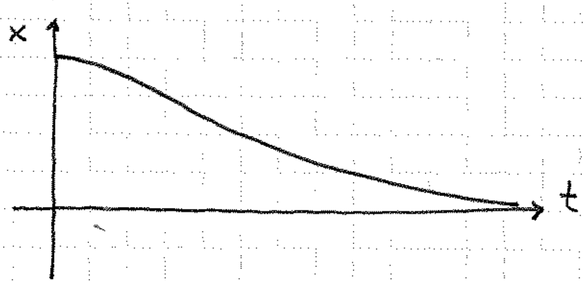
$$x(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$$

$$\tau_1 = \{+\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\}^{-1} , \quad \tau_2 = \{+\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\}^{-1}$$

med $\gamma = b/2m$ og $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ som på s. 103. Innføres nå $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, kan dette skrives slik:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{-\alpha t} + B e^{\alpha t})$$

Også her fastlegges de ubestemte integrasjonskonstantene, A og B, med kjennskap til f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

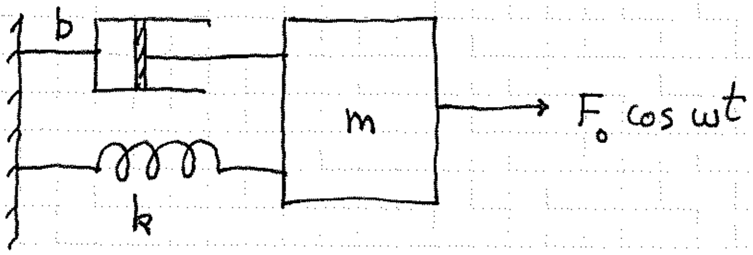


Merk:
- Ingen svingninger her.

Hvis $(b/2m)^2 = k/m$, dvs $\gamma = \omega_0$, har vi såkalt <u>kritisk demping</u>. Støtdempere i biler er nær kritisk dempet.

Tvungne svingninger og resonans [YF 14.8, LL 9.9]

Hvis en ytre kraft $F_y(t)$ virker på oscillatoren, får vi tvungne svingninger. Vi antar $F_y = F_0 \cos \omega t$:



Merk: Her er ω frekvensen til den ytre kraften, dvs vi "velger" ω selv.

N2 blir: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega)) + x_h(t)$

der $x_h(t)$ er løsningen uten $F_y(t)$ (h for "homogen", dvs null på høyre side av diff.ligningen), dvs $x_h(t)$ er løsningen på s. 103 (hvis svak demping) eller s. 104 (hvis sterk demping).

Uansett: $x_h(t) \to 0$ hvis vi bare venter en stund!

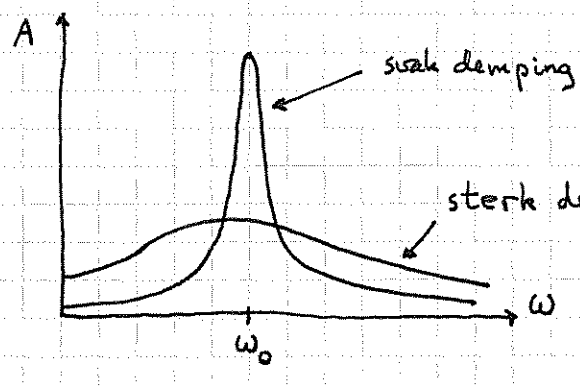
Vi antar at vi har latt $F_y(t)$ virke på m tilstrekkelig lenge til at $x_h(t) \approx 0$. Da er

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

med frekvensavhengig amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \qquad (\omega_0^2 = k/m)$$

Resonans: Hvis $\omega \approx \omega_0$, blir A stor, og vi har resonans.



Merk at $A(\omega_0) \to \infty$ hvis $b \to 0$.

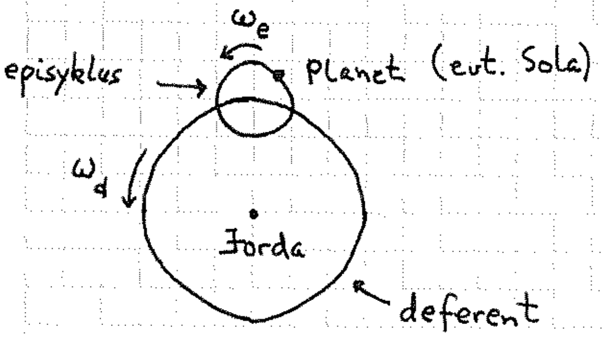
Hit 21.11.11

23.11.11

Gravitasjon [YF 13, LL 11]

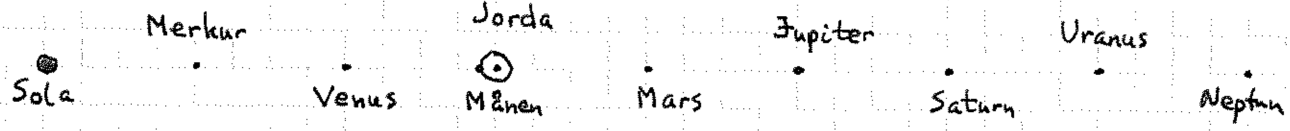
Kort historikk:

- Claudius Ptolemaeus (90-168). Romersk-egyptisk matematiker og astronom. Geosentrisk modell: Jorda i sentrum.



Rekkefølge (utover): Månen - Merkur - Venus - Sola - Mars - Jupiter - Saturn - Fiksstjernene - "Sphere of prime mover"

- Nicolaus Copernicus (1473-1543). Polsk matematiker og astronom. Heliosentrisk modell: Sola i sentrum. Fortsatt sirkulære baner, inklusive episykler.



Kontroversielt tema på denne tiden!

Behov for <u>nøyaktige</u> observasjoner!

- Tycho Brahe (1546-1601). Dansk adelsmann og astronom.

  Målte posisjonen til planeter og stjerner med en nøyaktighet på $\Delta\varphi \sim 1'$

  $(1' = 1 \text{ bueminutt} = \frac{1}{60} \text{ grad})$

- Johannes Kepler (1571 - 1630). Tysk matematiker, astronom. Brahes assistent.
  Analyserte Brahes observasjoner i en 20-årsperiode.
  Resultat: Keplers 3 lover (K1, K2, K3); se nedenfor.

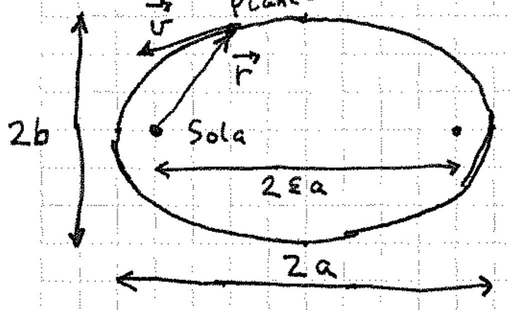
- Isaac Newton (1642-1727). Engelsk fysiker, matematiker, astronom, teolog....
  Utledet sin universelle gravitasjonslov fra Keplers lover.
  Publisert i "Principia" i 1687.

- Albert Einstein (1879-1955). Tyskfødt fysiker, bodde i USA 1933-1955.
  1905: Spesiell relativitetsteori (SR)
  1916: Generell ——"—— (GR) = "SR + gravitasjon"; en slags geometrisk gravitasjonsteori
  1921: Nobelpris i fysikk, primært for sin teori for fotoelektrisk effekt

* * *

Keplers lover [YF 13.5, LL 11.5]

K1: Planetbanene er ellipseformede, med sola i det ene brennpunktet.

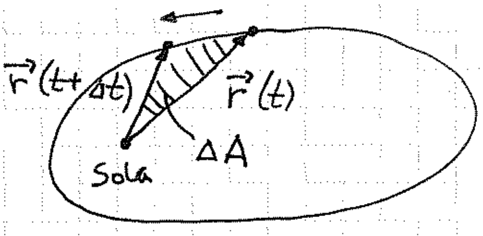


Eksentrisitet: $\varepsilon = \sqrt{1-(b/a)^2}$

($\varepsilon = 0$: sirkel; $\varepsilon = 1$: rett linje)

K2: $\vec{r}(t)$ sveiper over konstant areal pr tidsenhet,

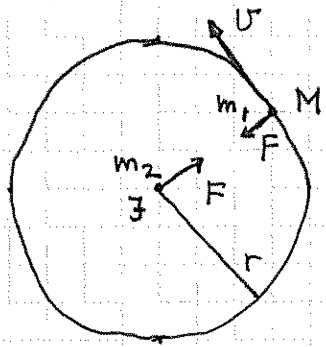
dA/dt = konst. (Se s. 75; $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ = konst.)



K3: T^2/a^3 = konst. for alle planetene

Newtons gravitasjonslov [YF 13.1, LL 2.5, 11.1]

La oss "leke Newton" og bruke "våre" lover N2 og N3 til å utlede formen på gravitasjonskraften F, med utg.punkt i Keplers lover. Vi antar sirkulær bane, som nesten er OK for månens bane rundt jorda ($\varepsilon \approx 0.055$):



m_1 = månemassen

m_2 = jordmassen

- K2 $\Rightarrow \vec{L}$ = konst. $\Rightarrow \vec{F} \sim -\hat{r}$
- Sirkel $\Rightarrow F = m_1 \cdot v^2/r = m_1 \omega^2 r = m_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$
- K3: $T^2 = C \cdot a^3 = C \cdot r^3 \Rightarrow F = m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{C r^3} \cdot r = \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{m_1}{r^2}$
- N3 $\Rightarrow F_{12} = F_{21} \Rightarrow$ F må også være prop. med m_2
- Konklusjon: $\boxed{\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}}$ Gravitasjonsloven

Konstanten G (gravitasjonskonstanten) ble målt av Cavendish i 1798, og av dere på laben i 2011:

$$G \approx 6.674 \cdot 10^{-11} \ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

(Relativ usikkerhet pr i dag, $\Delta G/G \approx 10^{-4}$)

$\Rightarrow$ Tyngdekraft på jordas overflate:

$M = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg (jordas masse)

$R = 6378$ km (jordradien)

$$\Rightarrow \quad F = (GM/R^2) \cdot m = mg$$

med $g = GM/R^2 \approx 9.81 \ \mathrm{m/s^2}$

Potensiell energi og gravitasjon [YF 13.3, LL 11.1]

Tyngdekraften er en konservativ kraft (se s. 31).

$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der vi velger $U = 0$ i $\vec{r}_0$ (se s. 32)

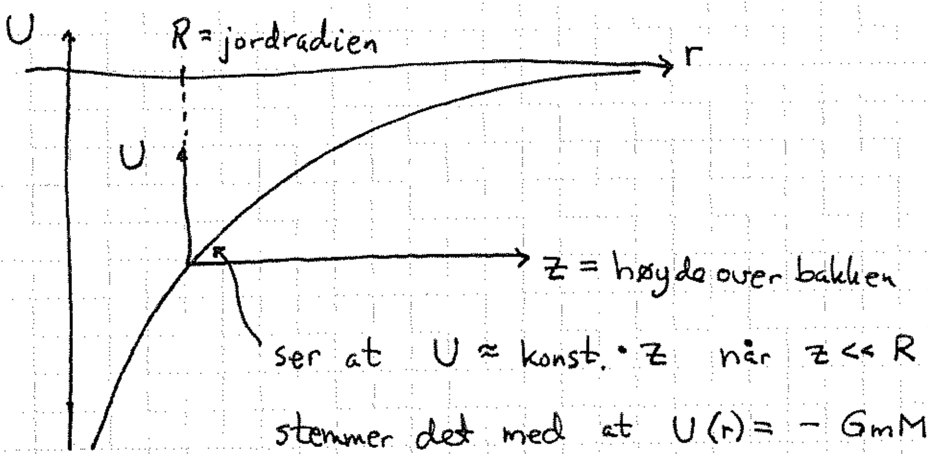
Her lar vi $r_0 \to \infty$, dvs vi velger $U(r=\infty) = 0$:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \underbrace{(-GmM/r^2)\,\hat{r}}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{dr\,\hat{r}}_{d\vec{r}}$$

$$= GmM \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = GmM \Big|_{\infty}^{r} \left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$= \underline{-\frac{GmM}{r}}$$

= pot. energi for to masser m og M i innbyrdes avstand r



ser at $U \approx$ konst. $\cdot z$ når $z \ll R$;

stemmer det med at $U(r) = -GmM/r$?

Ja! $U(z) = -GmM\left\{\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R}\right\}$ (Velger nå $U=0$ for $z=0$)

$$= GmM \frac{R+z-R}{R(R+z)}$$

$$= GmM \frac{z}{R(R+z)} \overset{z \ll R}{\approx} GmM \frac{z}{R^2}$$

$$= m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot z = \underline{mgz}$$ OK !!

[Oppgave: Vis at feilen vi gjør ved å bruke $U(z) = mgz$ blir $\Delta U/U = z/R$.]

Satellitter [YF 13.4]

Går ofte i (praktisk talt) sirkulære baner ⇒ Ting blir enkelt!

N2: $F = ma$; $F = GmM/r^2$ og $a = v^2/r$

$$\Rightarrow \frac{GmM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{MG}{r}}}$$

Geostasjonær bane: $T = 24\,h$, og satellitten er rett over samme sted på ekvator hele tiden. Da blir $r = 42246$ km. (Se øving 13.)

Energi:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GmM}{r}\right) = \frac{1}{2}m\cdot\frac{MG}{r} - \frac{GmM}{r}$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}\frac{mMG}{r}} \qquad (\text{Dvs: } K = -\tfrac{1}{2}U = -E)$$

Potensial og felt [LL 11.1]

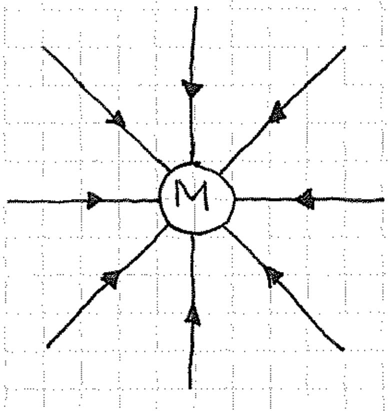
Generelle begreper, kommer med full styrke i elmag etc etc!

Feltstyrke $\overset{def}{=}$ Kraft pr masseenhet:

$$\vec{g} = \lim_{m\to 0}\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{MG}{r^2}\hat{r}$$

Dvs: M ("referansemassen") omgir seg med feltet $\vec{g}$
(uavhengig om "testmassen" m er der eller ikke)

Visualisering av $\vec{g}$ (et vektorfelt) med feltlinjer:



- retning på feltlinjene: tangentielt med $\vec{g}$
- antall feltlinjer pr flateenhet er prop. med $|\vec{g}|$

Potensial $\overset{def}{=}$ Potensiell energi pr masseenhet:

$$V(r) = \lim_{m\to 0}\frac{U(r)}{m} = -\frac{MG}{r}$$

Dvs: M omgir seg med det skalare potensialet $V(r)$

[Vi ser at $V = $ konst. på kuleflater sentrert i sentrum av M; slike flater kalles, naturlig nok, ekvipotensialflater.]

Sammenhengen mellom feltet $\vec{g}$ og potensialet V :

Fra før har vi:

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{og} \qquad \vec{F} = -\nabla U$$

(s. 32) (s. 35)

Divisjon på begge sider av begge disse ligningene med konstanten m gir direkte:

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{g} \cdot d\vec{r} \qquad \text{og} \qquad \vec{g} = -\nabla V$$

Disse sammenhengene gjelder generelt for alle typer konservative krefter og felt, og tilhørende pot. energi og potensial.

Eksempel:

Kraft mellom to elektriske ladninger q og Q i innbyrdes avstand r : $\vec{F} = (q \cdot Q / 4\pi\varepsilon_0 r^2)\,\hat{r}$

(der ε_0 er en naturkonstant)

Elektrisk felt (fra referanseladning Q): $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$

Pot. energi for de to ladningene: $U(r) = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Potensial (omkring ref. ladn. Q): $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Sammenhenger: $\vec{F} = -\nabla U$, $\vec{E} = -\nabla V$,

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r}\ , \qquad V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

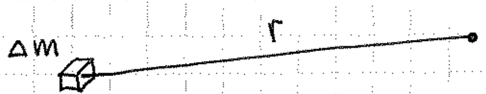
Hit 23.11.11

Mye mer om dette i FY1003 / TFY4155 !

28.11.11

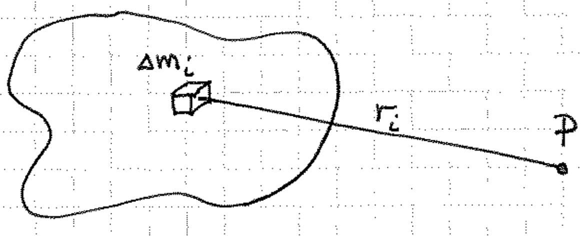
Potensial og felt fra massefordelinger [YF 13.6, LL 11.2]

Potensial fra liten masse Δm:



$$\Delta V(r) = -\frac{G \cdot \Delta m}{r}$$

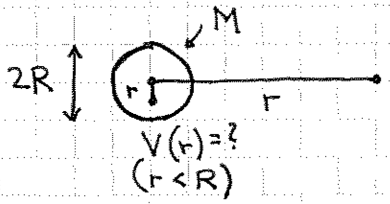
Potensial fra masse fordeling:



V_P = potensial i punkt P

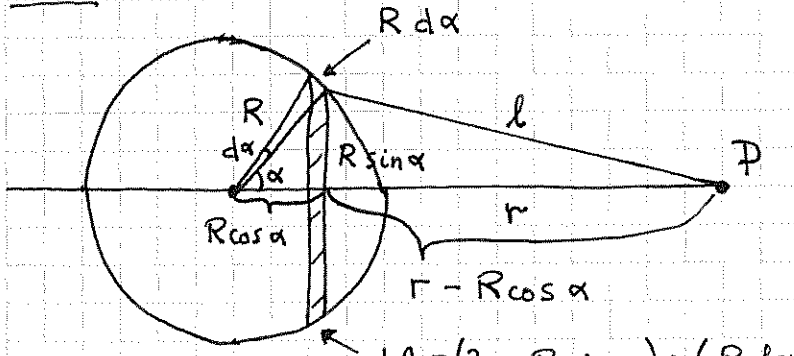
$$V_P = \sum_i V_P^i = -G \sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} -G \int \frac{dm}{r}$$

Eks 1: Kuleskall



$V(r) = ?$ $(r > R)$

r>R:



$$dA = \underbrace{(2\pi \cdot R \sin\alpha)}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{(R\,d\alpha)}_{\text{bredde}}$$ = area av tynn ring der alle punkter er i samme avstand ℓ fra P

$$\text{Pythagoras} \Rightarrow \ell^2 = (R\sin\alpha)^2 + (r - R\cos\alpha)^2$$
$$= R^2\sin^2\alpha + r^2 - 2rR\cos\alpha + R^2\cos^2\alpha$$
$$= R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha$$

Bidrag til V i punktet P fra tynn ring:

$$dV = -G\,\frac{dm}{l} \;; \qquad dm/M = dA/A = 2\pi R\sin\alpha\cdot R\,d\alpha\,/4\pi R^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,d\alpha$$

Totalt potensial i P:

$$V(r) = \int dV = -G\int\frac{dm}{l} = -\frac{MG}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\alpha}}$$

$$= -\frac{MG}{2}\,\Bigg|_0^\pi\,\frac{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\alpha}}{rR}$$

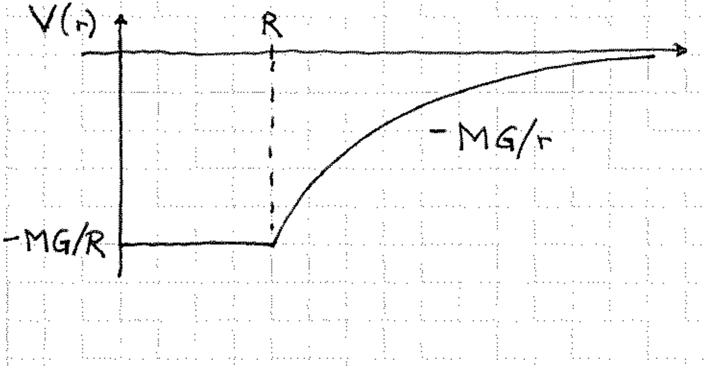
$$= -\frac{MG}{2rR}\left\{\sqrt{R^2+r^2+2rR} - \sqrt{R^2+r^2-2rR}\right\}$$

$$= -\frac{MG}{2rR}\left\{(R+r) - (r-R)\right\} = \underline{-\frac{MG}{r}}$$

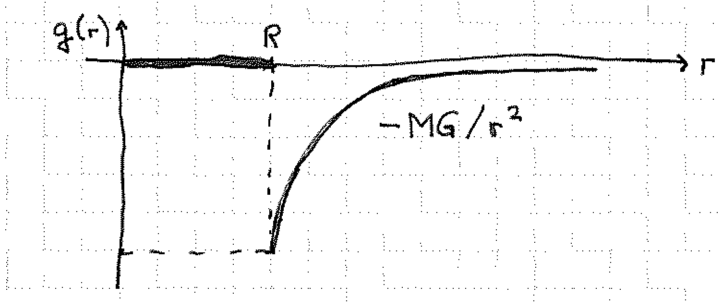
$\underline{r < R}$:

Alt blir som for $r > R$, bortsett fra at $\sqrt{R^2+r^2-2rR} = R-r$,

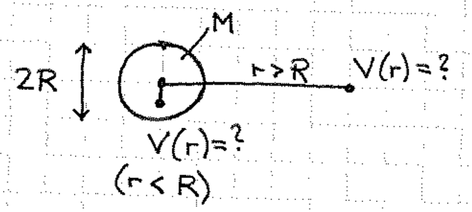
slik at $\quad V(r) = \ldots\ldots = -\dfrac{MG}{2rR}\left\{(R+r) - (R-r)\right\} = \underline{-\dfrac{MG}{R}}$



Feltet: $\quad \vec{g}(r) = -\nabla V(r) = -\hat{r}\,\dfrac{dV}{dr} = \begin{cases} 0 & ; \; r < R \\ -\hat{r}\,\dfrac{MG}{r^2} & ; \; r > R \end{cases}$

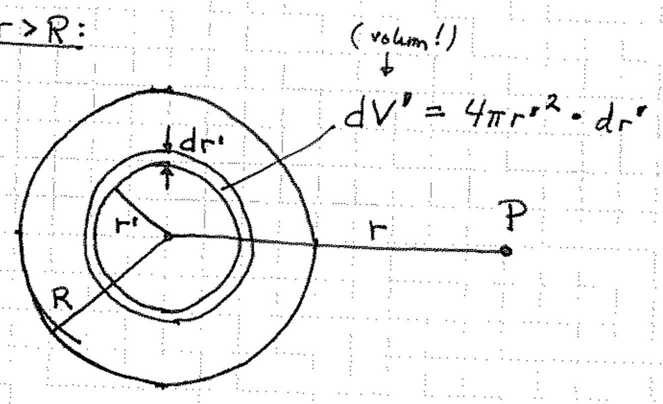


Eks 2: Kompakt kule



Strategi: Del opp kula i tynne kuleskall, bruk resultat fra Eks 1, og integrer.

<u>r > R:</u>



$$\frac{dm'}{M} = \frac{dV'}{V'} = \frac{4\pi r'^2 dr'}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{3}{R^3} r'^2 dr'$$

Bidrag fra tynt kuleskall til potensialet i P:

$$dV = -G\frac{dm'}{r} = -\frac{3MG}{rR^3} r'^2 dr'$$

Totalt potensial i P:

$$V(r) = \int dV = -\frac{3MG}{rR^3}\int_0^R r'^2 dr' = -\frac{3MG}{rR^3}\cdot\frac{1}{3}R^3 = \underline{-\frac{MG}{r}}$$

<u>r < R:</u>

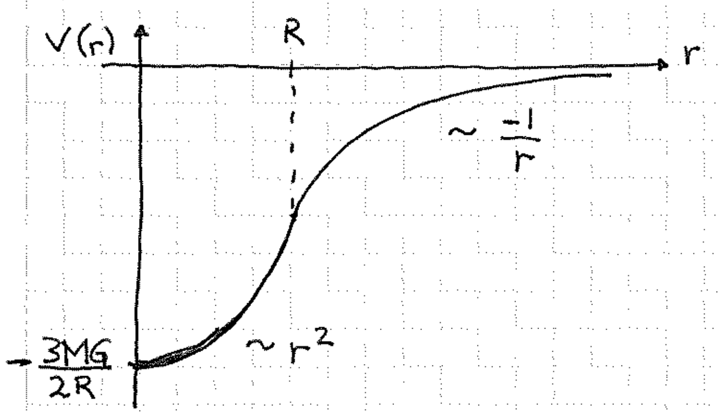
For tynne kuleskall med radius $r' < r$: $dV = -\frac{G\cdot dm'}{r}$

——"—— $r' > r$: $dV = -\frac{G\cdot dm'}{r'}$

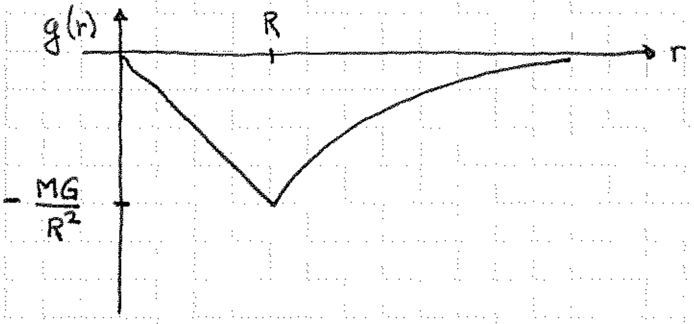
$$\Rightarrow V(r) = -\frac{3MG}{R^3}\left\{\int_0^r \frac{r'^2 dr'}{r} + \int_r^R \frac{r'^2 dr'}{r'}\right\}$$

$$= -\frac{3MG}{R^3}\left\{\frac{1}{3}r^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right\}$$

$$= \underline{-\frac{3MG}{2R}\left\{1 - \frac{r^2}{3R^2}\right\}}$$



Feltet: $\vec{g}(r) = -\nabla V(r) = -\hat{r}\,\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -\hat{r}\,\frac{MGr}{R^3} & ; \quad r < R \\ -\hat{r}\,\frac{MG}{r^2} & ; \quad r > R \end{cases}$



$\Rightarrow$ Kraft på masse m ved $r = R$:

$$\vec{F}(r=R) = m \cdot \vec{g}(R) = -\hat{r}\; MmG/R^2,$$

som om hele massen M var plassert i sentrum av kula!

[Denne antagelsen har vi da også gjort "hele tiden" for tyngdekraften på en masse m på jordoverflaten, $\vec{F} = m\vec{g}$ med $g = 9.81\ m/s^2$.]

Hit 28.11.11