

Har i praksis alltid noe friksjon, slik at fri svingninger dempes.

Eks: 1) Langsom bevegelse i fluid (gass, væske):

$$\text{Friksjonskraft } \vec{f} = -b \cdot \dot{x} \cdot \hat{x}; \quad b = \text{dempingskonstant}$$

2) Rask bevegelse i fluid:  $\vec{f} = -D \dot{x}^2 \hat{x}$  (turbulens)

3) Torr friksjon:  $\vec{f} = -\mu_k N \hat{v}$

Vi antar her tilfelle 1), og N2 blir  $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$ , dvs

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

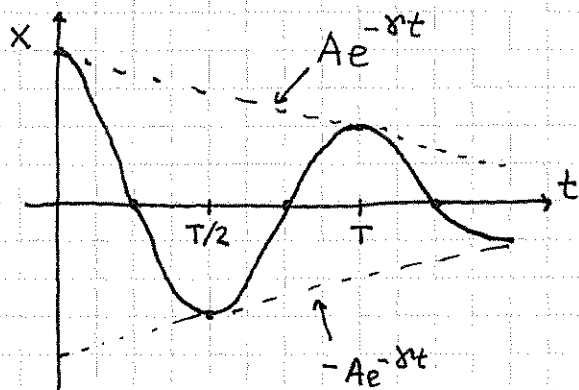
Løsningen  $x(t)$  avhenger av om vi har svak ( $(b/2m)^2 < k/m$ ) eller sterk ( $(b/2m)^2 > k/m$ ) demping.

Svak demping ("underkritisk"):  $(b/2m)^2 < k/m$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

der  $\gamma \equiv b/2m$  og  $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ;  $\omega_0^2 \equiv k/m$

Som vanlig må  $A$  og  $\varphi$  fastlegges med kjennskap til to initialbetingelser, f.eks.  $x(0)$  og  $\dot{x}(0)$ .



Merke:

• Redusert frekvens pga demping:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

• Max utsving avtar eksponentielt,  $A e^{-\gamma t}$

Sterk demping ("overkritisk"):  $(b/2m)^2 > k/m$

104

$$x(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$$

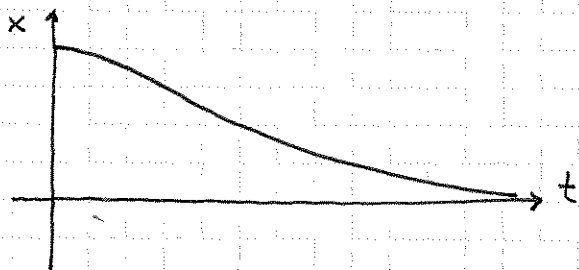
$$\tau_1 = \left\{ +\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right\}^{-1}, \quad \tau_2 = \left\{ +\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right\}^{-1}$$

med  $\gamma = b/2m$  og  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  som på s. 103. Iuføres nå

$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , kan dette skrives slik:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{-\alpha t} + B e^{\alpha t})$$

Også her fastlegges de ubestemte integrasjonskonstantene, A og B, med kjennskap til f.eks.  $x(0)$  og  $\dot{x}(0)$ .



Merk:

- Ingen svingninger her.

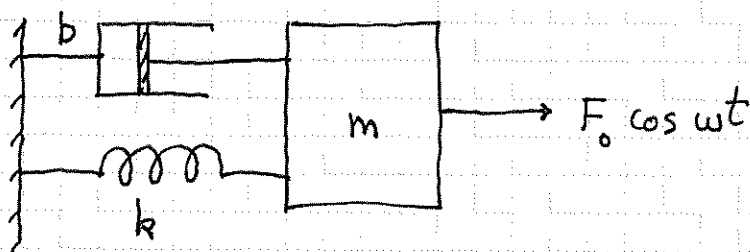
Hvis  $(b/2m)^2 = k/m$ , dvs  $\gamma = \omega_0$ , har vi såkalt kritisk demping.

Støtdempere i biler er nær kritisk dempet.

### Tvingne svingninger og resonans [YF 14.8, LL 9.9]

Hvis en ytre kraft  $F_y(t)$  virker på oscilatoren, får vi

tvingne svingninger. Vi antar  $F_y = F_0 \cos \omega t$ :



Merk: Her er  $\omega$  frekvensen til den ytre kraften, dvs vi "velger"  $\omega$  selv.

$$N2 \text{ blir: } -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

(105)

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\text{Løsning: } x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + x_h(t)$$

der  $x_h(t)$  er løsningen uten  $F_0(t)$  (h for "homogen", dvs null på høyre side av diff.ligningen), dvs  $x_h(t)$  er løsningen på s. 103 (hvis svak damping) eller s. 104 (hvis sterk damping).

Uansett:  $x_h(t) \rightarrow 0$  hvis vi bare venter en stund!

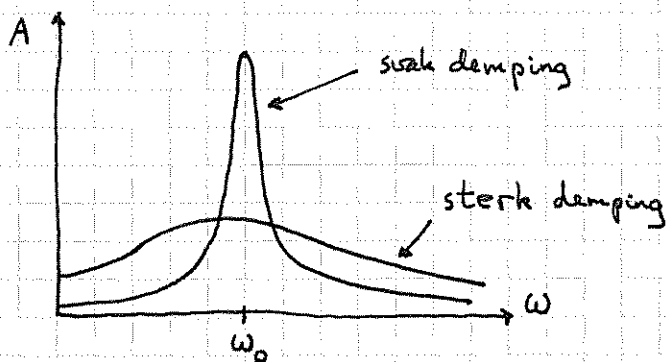
Vi antar at vi har latt  $F_0(t)$  virke på  $m$  tilstrekkelig lenge til at  $x_h(t) \approx 0$ . Da er

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

med frekvensavhengig amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2/m^2}} \quad (\omega_0^2 = k/m)$$

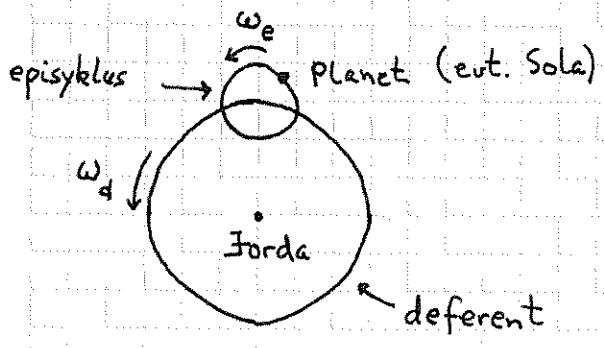
Resonans: Hvis  $\omega \approx \omega_0$ , blir  $A$  stor, og vi har resonans.



Merk at  $A(\omega_0) \rightarrow \infty$  hvis  $b \rightarrow 0$ .

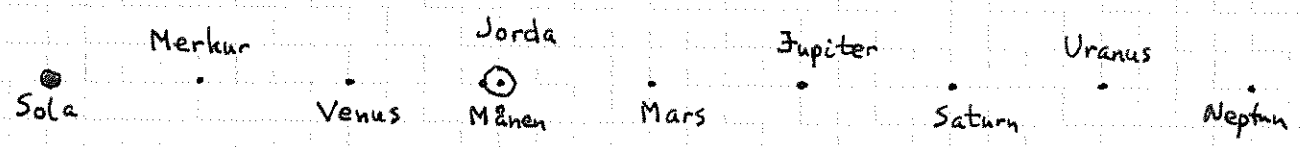
Kort historikk:

- Claudius Ptolemaeus (90-168). Romersk-egyptisk matematiker og astronom. Geosentrisk modell: Jorda i sentrum.



Rekkefølge (utover): Månen - Merkur - Venus - Sola - Mars - Jupiter - Saturn - Fiksstjernene - "Sphere of prime mover"

- Nicolaus Copernicus (1473-1543). Polsk matematiker og astronom. Heliosentrisk modell: Sola i sentrum. Fortsatt sirkulære baner, inklusive episykler.



Kontroversielt tema på denne tiden!

Behov for nøyaktige observasjoner!

- Tycho Brahe (1546-1601). Dansk adelsmann og astronom.

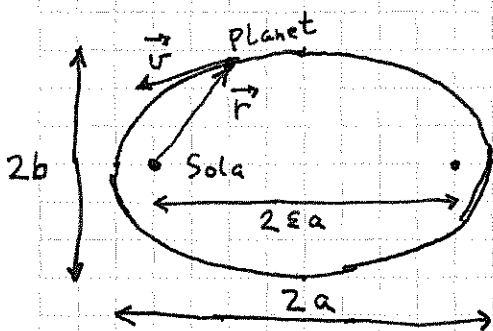
Målte posisjonen til planeter og stjerner med en nøyaktighet på  $\Delta\phi \sim 1'$

$(1' = 1 \text{ bueminutt} = \frac{1}{60} \text{ grad})$

- Johannes Kepler (1571-1630). Tysk matematiker, astronom. Brahes assistent.  
Analyserte Brahes observasjoner i en 20-årsperiode.  
Resultat: Keplers 3 lover (K1, K2, K3); se nedenfor.
- Isaac Newton (1642-1727). Engelsk fysiker, matematiker, astronom, teolog....  
Utleidet sin universelle gravitasjonslov fra Keplers lover.  
Publisert i "Principia" i 1687.
- Albert Einstein (1879-1955). Tyskfødt fysiker, bodde i USA 1933-1955.  
1905: Spesiell relativitetsteori (SR)  
1916: Generell — " — — (GR) = "SR + gravitasjon";  
en slags geometrisk gravitasjonsteori.  
1921: Nobelpris i fysikk, primært for sin teori for fotoelektrisk effekt

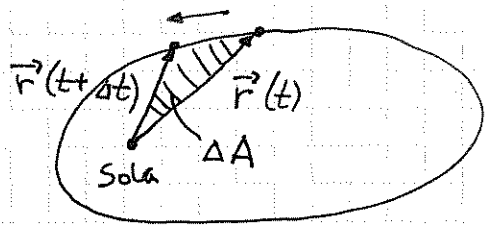
### Keplers lover [YF 13.5, LL 11.5]

K1: Planetbanene er ellipseformede, med sola i det ene brennpunktet.



Eksentrisitet:  $\epsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$   
( $\epsilon = 0$ : sirkel;  $\epsilon = 1$ : rett linje)

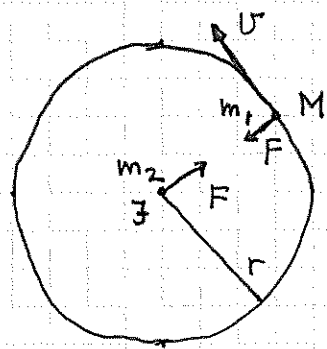
K2:  $\vec{F}(t)$  sveiper over konstant areal pr tidsenhet,  
 $dA/dt = \text{konst.}$  (Se s. 75;  $\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$ )



K3:  $T^2/a^3 = \text{konst.}$  for alle planetene

Newton's gravitasjonslov [YF 13.1, LL 2.5, 11.1]

La oss "leke Newton" og bruke "våre" lover N2 og N3 til å utlede formen på gravitasjonskraften  $F$ , med utg.punkt i Keplers lover. Vi antar sirkulære bane, som nesten er OK for månens bane rundt jorda ( $\epsilon \approx 0.055$ ):



$m_1 = \text{månemassen}$   
 $m_2 = \text{jordmassen}$

- K2  $\Rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \sim -\hat{r}$
- Sirkel  $\Rightarrow F = m_1 \cdot v^2/r = m_1 \omega^2 r = m_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$
- K3:  $T^2 = C \cdot a^3 = C \cdot r^3 \Rightarrow F = m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{C r^3} \cdot r = \frac{4\pi^2}{C} \cdot \frac{m_1}{r^2}$
- N3  $\Rightarrow F_{12} = F_{21} \Rightarrow F$  må også være prop. med  $m_2$

• Konklusjon:  $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$  Gravitasjonsloven

Konstanten  $G$  (gravitasjonskonstanten) ble målt av Cavendish i 1798, og av dere på laben i 2011:

$$G \approx 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(Relativ usikkerhet pr i dag,  $\Delta G/G \approx 10^{-4}$ )

$\Rightarrow$  Tyngdekraft på jordas overflate:

$$M = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (\text{jordas masse})$$

$$R = 6378 \text{ km} \quad (\text{jordradiusen})$$

$$\Rightarrow F = (GM/R^2) \cdot m = mg$$

$$\text{med } g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

### Potensiell energi og gravitasjon [YF 13.3, LL 11.1]

Tyngdekraften er en konservativ kraft (se s. 31).

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ der vi velger } U=0 \text{ i } \vec{r}_0 \quad (\text{se s. 32})$$

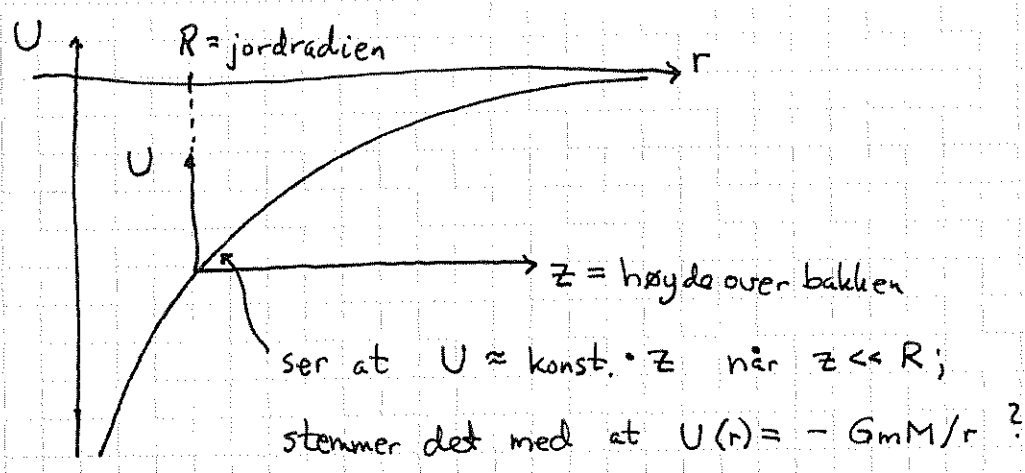
Her lar vi  $r_0 \rightarrow \infty$ , dvs vi velger  $U(r=\infty) = 0$ :

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \underbrace{(-GMm/r^2)}_{\vec{F}} \hat{r} \cdot \underbrace{dr \hat{r}}_{d\vec{r}}$$

$$= GmM \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = GmM \int_{\infty}^r \left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$= - \frac{GmM}{r}$$

= pot. energi for to masser  $m$  og  $M$  i inbyrdes avstand  $r$



Ja!  $U(z) = -GmM \left\{ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R} \right\}$  (Velger nå  $U=0$  for  $z=0$ )

$$= GmM \frac{R+z - R}{R(R+z)}$$

$$= GmM \frac{z}{R(R+z)} \stackrel{z \ll R}{\approx} GmM \frac{z}{R^2}$$

$$= m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot z = \underline{mgz} \quad \text{OK!!}$$

[Oppgave: Vis at feilen vi gjør ved å bruke  $U(z) = mgz$  blir  $\Delta U/U = z/R$ .]

### Satellitter [YF 13.4]

Går ofte i (praktisk talt) sirkulære baner  $\Rightarrow$  Ting blir enkelt!

N2:  $F = ma$ ;  $F = GmM/r^2$  og  $a = v^2/r$

$$\Rightarrow \frac{GmM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{MG}{r}}}$$

Geostasjonær bane:  $T = 24$  h, og satellitten er rett over  samme sted  på ekvator hele tiden. Da blir  $r = 42246$  km. (Se øving 13.)



Energi:

(III)

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GmM}{r}\right) = \frac{1}{2}m \cdot \frac{MG}{r} - \frac{GmM}{r}$$
$$= \underline{-\frac{1}{2} \frac{mMG}{r}} \quad (\text{Dvs: } K = -\frac{1}{2}U = -E)$$

## Potensial og felt [LL II.1]

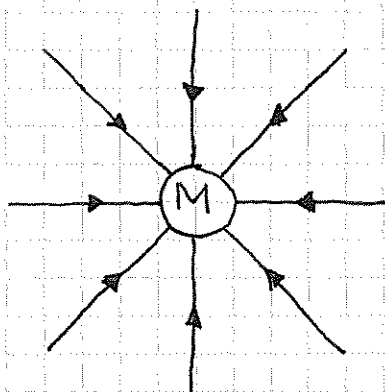
Generelle begreper, kommer med full styrke i elmag etc etc!

Feltstyrke  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Kraft pr masseenhet:}$

$$\vec{g} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{MG}{r^2} \hat{r}$$

Dvs:  $M$  ("referansemassen") omgir seg med feltet  $\vec{g}$   
(uavhengig om "testmassen"  $m$  er der eller ikke)

Visualisering av  $\vec{g}$  (et vektorfelt) med feltlinjer:



- retning på feltlinjene: tangentielt med  $\vec{g}$
- antall feltlinjer pr flateenhet er prop. med  $|\vec{g}|$

Potensial  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Potensiell energi pr masseenhet:}$

$$V(r) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{U(r)}{m} = -\frac{MG}{r}$$

Dvs:  $M$  omgir seg med det skalare potensialet  $V(r)$

[Vi ser at  $V = \text{konst.}$  på kuleflater sentrert i sentrum av  $M$ ;  
slike flater kalles, naturlig nok, ekvipotensialflater.]

Sammenhengen mellom feltet  $\vec{g}$  og potensialet  $V$ :

(112)

Fra før har vi:

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{F} = -\nabla U$$

(s. 32) (s. 35)

Divisjon på begge sider av begge disse ligningene med konstanten  $m$  gir direkte:

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad \text{og} \quad \vec{g} = -\nabla V$$

Disse sammenhengene gjelder generelt for alle typer konservative krefter og felt, og tilhørende pot. energi og potensial.

Eksempel:

Kraft mellom to elektriske ladninger  $q$  og  $Q$  i innbyrdes avstand  $r$ :  $\vec{F} = (q \cdot Q / 4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{r}$   
(der  $\epsilon_0$  er en naturkonstant)

Elektrisk felt (fra referanseladning  $Q$ ):  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Pot. energi for de to ladningene:  $U(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

Potensial (omkring ref. ladh.  $Q$ ):  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Sammenhenger:  $\vec{F} = -\nabla U$ ,  $\vec{E} = -\nabla V$ ,

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Hitt 23.11.11

Mye mer om dette i FY1003 / TFY4155!