26.09.11

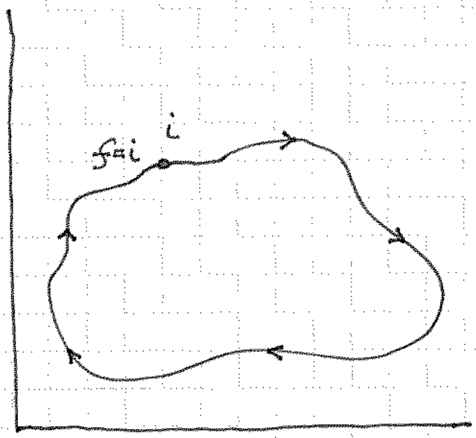
Konservative krefter. Potensiell energi. Energibevarelse

[YF 7.1-7.4, LL 4.3-4.5]

Konservativt mekanisk system $\stackrel{\text{def}}{=}$ system uten energilekkasje (<u>dissipasjon</u>) fra mekanisk energi til andre energiformer.

Eks. på dissipasjon: Friksjon. Da går mek. energi over til varme, lyd etc.

Kons. kraft $\vec{F}$:



i ("initial") = legemets mek. tilstand initielt, bestemt ved $\vec{r}_i$ og $\vec{v}_i$. Hvis kons. kraft $\vec{F}$ påvirker legemet på <u>rundturen</u>, fra i til slutt-tilst. f=i ("final"), er $\vec{r}_f = \vec{r}_i$, $\vec{v}_f = \vec{v}_i$, $K_f = K_i$, og dermed utført arbeid $W = 0$.

Dvs:

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f = \vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Gjelder for kons. kraft $\vec{F}$

$\oint$ betyr (vei-)integral rundt <u>lukket</u> kurve

Potensiell energi:

$$\boxed{U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Her er $\vec{r}_0$ en vilkårlig valgt "referanseposisjon", $\vec{F}$ er en kons. kraft, og vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$

Forventer nå at $-\vec{F}$ er en slags derivert av U !

Litt matematikk!

Gradient. Partiellderivert.

$U = U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ = skalar funksjon av x, y og z

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$$

= den partiellderiverte av U med hensyn på x

Tilsvarende for $\partial U/\partial y$ og $\partial U/\partial z$. (Skriv ned selv!)

Eks: Hvis $U(x,y,z) = 2xy + \sin(x/z)$, så er

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y + \frac{1}{z}\cos(x/z)$$

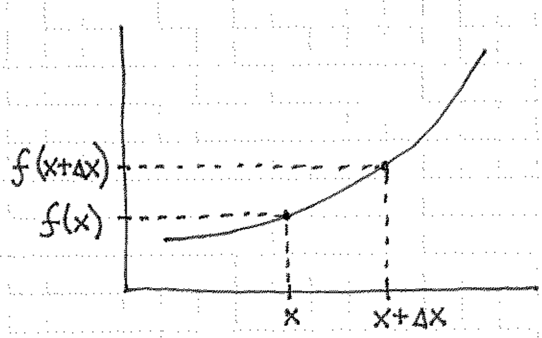
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}\cos(x/z)$$

Liten forflytning, fra $\vec{r}$ til $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, gir liten endring i U:

$$\Delta U = U(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r}) \approx \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z$$

Som er en generalisering av velkjente saker for funksjoner av en variabel:



$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx \frac{df}{dx}\Delta x$$

Hvis liten $\Delta\vec{r} \longrightarrow$ infinitesimal $d\vec{r}$, fås

$$dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$= \text{totalt differensial}$$

Ser at vi kan skrive

$$dU = \left\{\hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right\} \cdot \left\{\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right\}$$

Hit 26.09.11

(siden $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$ mens $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$)

Motivasjonsforedrag nr 4 26.09.11:

Kristian Gjøsteen, IMF: Nettpoker, kryptografi og tallteori.

28.09.11

Vi definerer symbolet ∇ (nabla):

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$ ("derivasjonsoperator")

Videre er

$$d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$$ ("veielement")

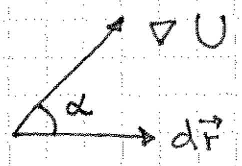
Dermed:

$$\underbrace{dU}_{\text{skalar}} = \underbrace{\nabla U}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{vektor}}$$

$$\nabla U = \text{gradienten til } U = \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Fra def. av skalarprod:

$$dU = |\nabla U| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



$\Rightarrow$ vi har maksimal dU når vi velger $d\vec{r}$ i samme retning som ∇U (dvs $\alpha = 0$ og $\cos\alpha = 1$)

$\Rightarrow$ ∇U peker i den retning som U øker raskest

(og: $-\nabla U$ ——————— " ——————— avtar —"—)

Dessuten er $|\nabla U| = \dfrac{dU_{max}}{|d\vec{r}|}$.

Tilbake til fysikken!

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (\text{med } U(\vec{r}_0) = 0)$$

Siden $U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dU$, er $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Sammenligning med det generelle uttrykket $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$ gir:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

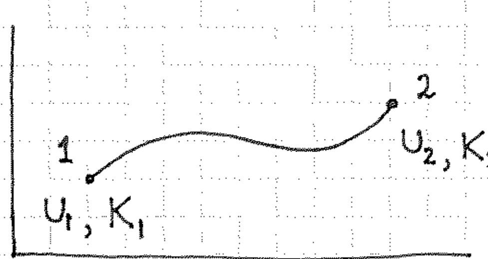
kons. kraft

U = pot. energi ("potensial")

Komponenter: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

Siden $U(\vec{r})$ og $U(\vec{r})$ + konst. gir samme $\vec{F}$, og dermed samme fysikk, kan vi <u>fritt velge $U = 0$ hvor vi vil.</u>

Mekanisk energibevarelse [YF 7.3, LL 4.5]



$$U_1 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

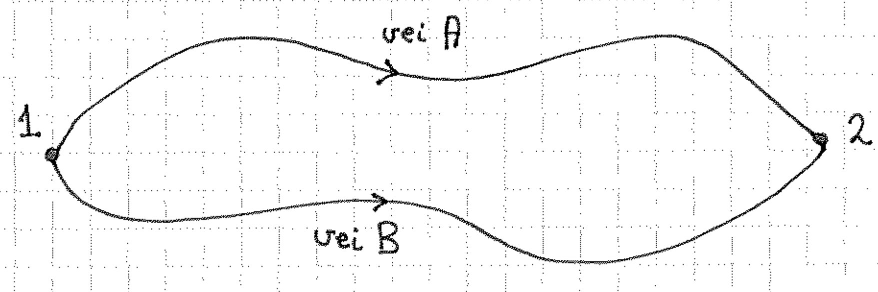
Fra før: $K_2 - K_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Dermed: $U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

Dvs: $\boxed{\text{Total mek. energi } E = K + U \text{ er konstant for kons. system.}}$

Kons. kraft $\vec{F}$ utfører arbeid W som er uavhengig av veien.

Bevis:



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

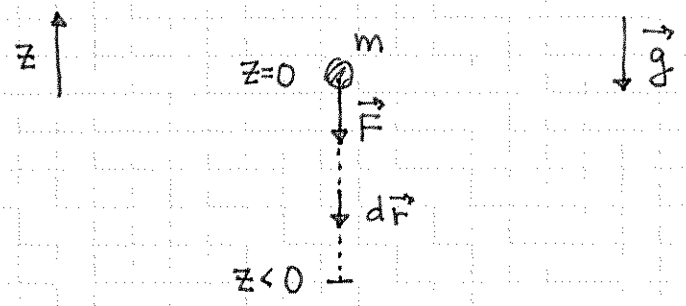
$$\Rightarrow \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_A + \underbrace{\left\{ \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B}_{= \left\{ - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_A = \left\{ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_B$$

qed

Tid for noen eksempler!

Eks 1: Tyngdefeltet



$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$$

$d\vec{r} = \hat{z}\,dz$ [Merk: Fortegn ivaretas via integrasjonsgrensene. Dvs, dz kan være positiv eller negativ.]

$$U(z) = -\int_0^z (-mg\,\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{mgz} \quad \text{(OK!)}$$

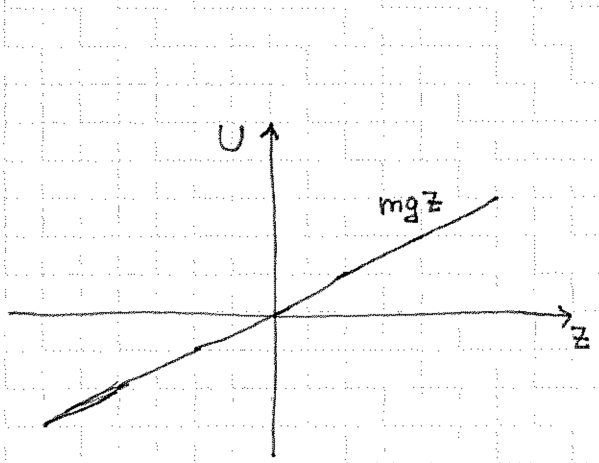
velger $U(0) = 0$

Anta $v=0$ i $z=0$ $\Rightarrow$ $E_0 = K_0 + U_0 = 0$ (tot. energi)

I $z<0$: $U(z) = mgz$, $K = W = \int_0^z F\,dz = -mgz$

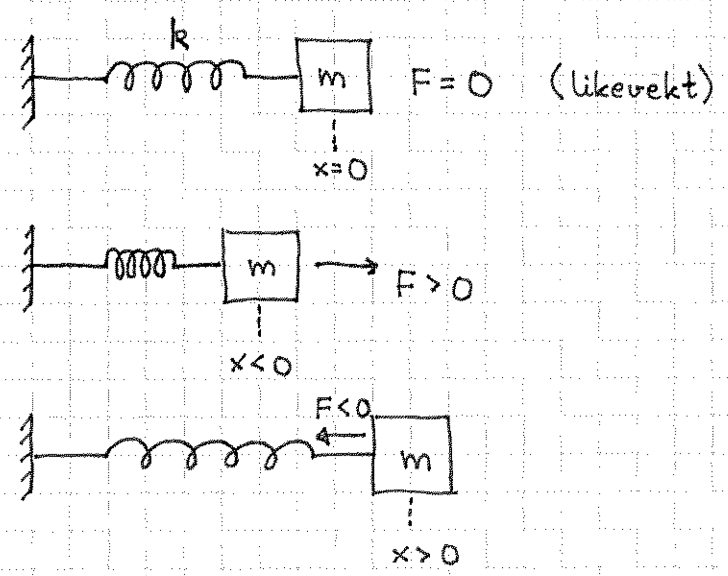
$$\Rightarrow E = K + U = -mgz + mgz = 0 = E_0$$

OK, energibevarelse!



$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}(mgz) = -mg\,\hat{z} \quad \text{(OK!)}$$

Eks 2: Ideell fjær. Hookes lov



Hookes lov: $\vec{F} = -kx\,\hat{x}$

(k = fjærkonstanten, $[k] = N/m$)

Velg $U = 0$ for $x = 0$

$$\Rightarrow \quad U(x) = -\int_0^x (-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \underline{\tfrac{1}{2}kx^2}$$

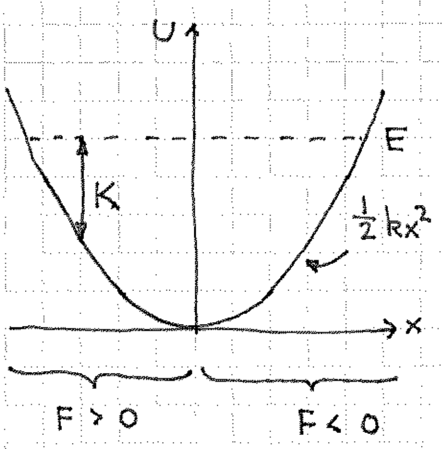
Anta $v = v_0$ når $t = 0$, og $x(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad E_0 = K_0 + U_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Når $x \neq 0$: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, $\quad K = K_0 + W = \frac{1}{2}mv_0^2 + \int_0^x (-kx)\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad E = K + U = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = E_0 \qquad (\text{ok!})$$

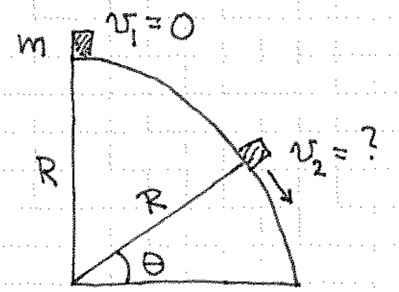


$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U$$

$$= -\hat{x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$= -kx\,\hat{x} \qquad (\text{ok})$$

Eks 3: Halvkule uten friksjon



$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow 0 + mgR = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgR \sin\theta$$

$$\Rightarrow v_2 = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

$\theta = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR}$, OK, men hva hvis $\vec{N} \to 0$?!

Ikke-kons. krefter

(f.eks. friksjon)

Mek. energi $\xrightarrow{\text{dissipasjon}}$ varme, lyd, lys, ...

$$\Delta E = W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

da $\vec{f}$ er rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$

Friksjonsarbeidet W_f <u>avhenger av veien</u> fra 1 til 2

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ er <u>ikke</u> kons.

$\Rightarrow$ har <u>ikke</u> et tilhørende potensial

Hit 28.09.11