03.10.11

Impuls. Kollisjoner. Partikkelsystemer [YF 8, LL 5]

For partikkel/legeme med konstant masse m:

$$N2: \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{m=\text{konst.}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\boxed{\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{impuls}}$$

Alternative navn på $\vec{p}$: bevegelsesmengde (LL), massefart, driv

På engelsk (YF) : (linear) momentum

Dermed blir N2 : $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ $\quad [p] = kg \cdot m/s$

Impulsbevarelse:

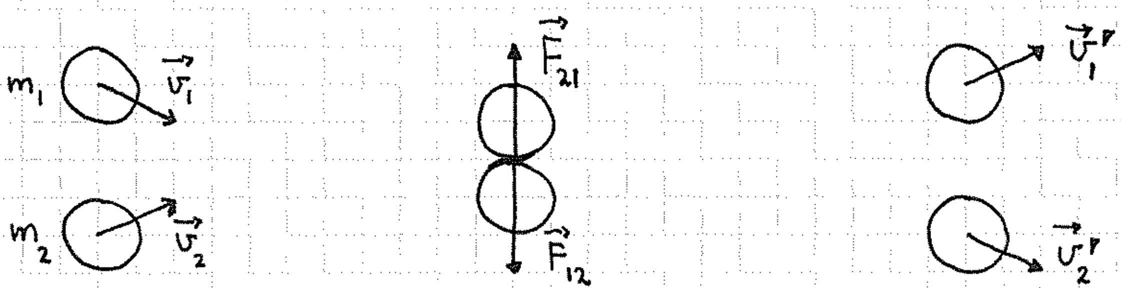
$\boxed{\text{Hvis } \Sigma \text{ ytre krefter} = 0 \text{, er legemets impuls } \vec{p} \text{ bevart}}$

Meget nyttig resultat!

Vi har mange prosesser / kollisjoner der mekanisk energi ikke er bevart, $\Delta E \neq 0$, men så lenge $\vec{F} = \vec{F}_{ytre} = 0$, er alltid $\Delta\vec{p} = 0$.

Kollisjoner [YF 8.3 - 8.4 , LL 5.3]

= kortvarige støt mellom to legemer



Før

Kollisjon; varighet Δt

Etter

$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \overset{N2}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

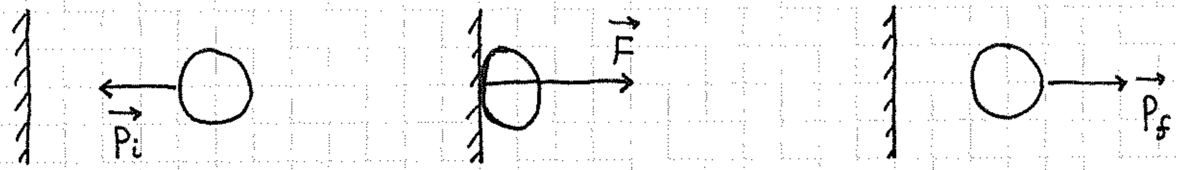
Kommentarer:

- $\vec{F}_{12}(t)$ er typisk <u>ukjent</u>, men det påvirker ikke systemets totale impuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, som er konstant
- Så lenge $\vec{F}_{ytre} = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = 0$, er $\vec{P}$ konstant
- Hvis $\vec{F}_{ytre} \neq 0$, er $\vec{P} \approx$ konst. dersom

  $F_{ytre} \ll F_{indre}$ i løpet av kollisjonen

Kraftstøt [YF 8.1, LL 5.2]

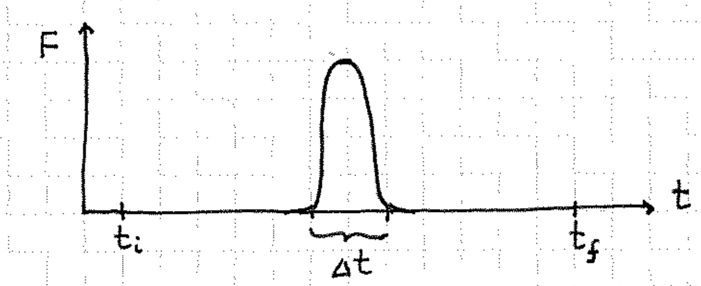
Se på kollisjon av ball mot vegg:

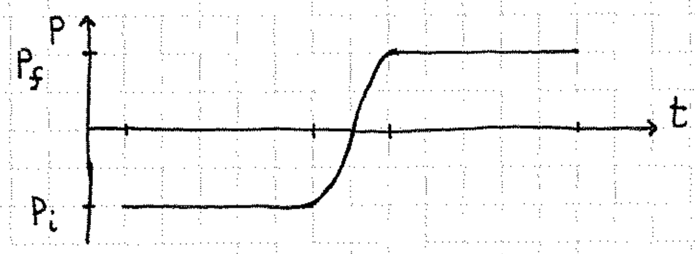


Før (i) Kollisjon, varighet Δt Etter (f)

Fra N2: $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$ = ballens impulsendring i løpet av dt

$$\Rightarrow \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \int_{\Delta t} \vec{F} \cdot dt$$





Kraftstøtet $\vec{J}$ er: $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$ (Engelsk: impulse)

$$\Rightarrow \underline{\vec{J}} = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \underline{\Delta \vec{p}} \quad \text{(Impulsloven)}$$

Kommentarer:

- $\vec{F}(t)$ som regel ukjent
- Kjennskap til $\Delta\vec{p}$ og estimat for Δt $\Rightarrow$ kan anslå $\langle \vec{F} \rangle$

Eks: Tennisball, $v \sim 50\,\mathrm{m/s}$, $m \sim 57\,\mathrm{g}$, $\Delta t \sim 0.01\,\mathrm{s}$ for støt mot racket. Finn gjennomsnittlig kraft i støtet, $\langle F \rangle$, og vurder om det er OK å se bort fra $G = mg$ i ~~støtet~~. (slaget)

Løsning:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0.057\,\mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 50\,\mathrm{m/s}}{0.01\,\mathrm{s}} = \underline{570\,\mathrm{N}}$$

$$G = mg = 0.057\,\mathrm{kg} \cdot 9.8\,\mathrm{m/s^2} \approx 0.56\,\mathrm{N}$$

$\Rightarrow \langle F \rangle / G \sim 1000 \quad \Rightarrow$ OK å neglisjere G i slaget.

Ulike typer kollisjoner [YF 8.3, LL 5.3]

- Elastisk kollisjon: $\Delta E = 0$ $(\Delta K = 0)$
- Uelastisk —"— : $\Delta K < 0$
- Fullstendig uel. —"— : Kolliderende legemer henger sammen etter kollisjonen. Felles hastighet etter koll. Maksimal $|\Delta K|$.

Tap i kinetisk energi, ΔK, resulterer i (varige) deformasjoner, lyd, varme etc.

Merk: Så lenge $\vec{F}_{ytre} = 0$ (eller kan neglisjeres under kollisjonen), er $\underline{\Delta \vec{p} = 0}$ <u>for alle typer kollisjoner</u>.

Alle indre krefter opptrer i par (N3), $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, og bidrar ikke til noen endring i systemets totale impuls.

Eks: Sentralt støt [YF 8.2-8.4, LL 5.3]

Før: $\underset{m_A}{\bigcirc} \longrightarrow v_A \qquad v_B \longleftarrow \underset{m_B}{\bigcirc}$ (i)

Etter: $v_A' \longleftarrow \bigcirc \qquad \bigcirc \longrightarrow v_B'$ (f)

Vansett type støt er $\Delta p = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{m_A v_A + m_B v_B}_{p_i} = \underbrace{m_A v_A' + m_B v_B'}_{p_f}$$

[Dvs: $v_B < 0$ og $v_A' < 0$ i figuren]

Hvis støtet er <u>elastisk</u>, er $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Løses typisk ved å samle ledd med m_A og m_B på hver sin side og ta "$\Delta K = 0$" / "$\Delta p = 0$":

$$m_A (v_A - v_A') = m_B (v_B' - v_B) \qquad (\Delta p = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} & m_A (v_A^2 - v_A'^2) = m_B (v_B'^2 - v_B^2) \\ \text{dvs} \quad & m_A (v_A + v_A')(v_A - v_A') = m_B (v_B' + v_B)(v_B' - v_B) \end{aligned}\right\} (\Delta K = 0)$$

$\Rightarrow v_A + v_A' = v_B + v_B'$

$\Rightarrow v_A' - v_B' = v_B - v_A = -(v_A - v_B)$

$\Rightarrow$ partiklenes relativhastighet skifter fortegn i kollisjonen

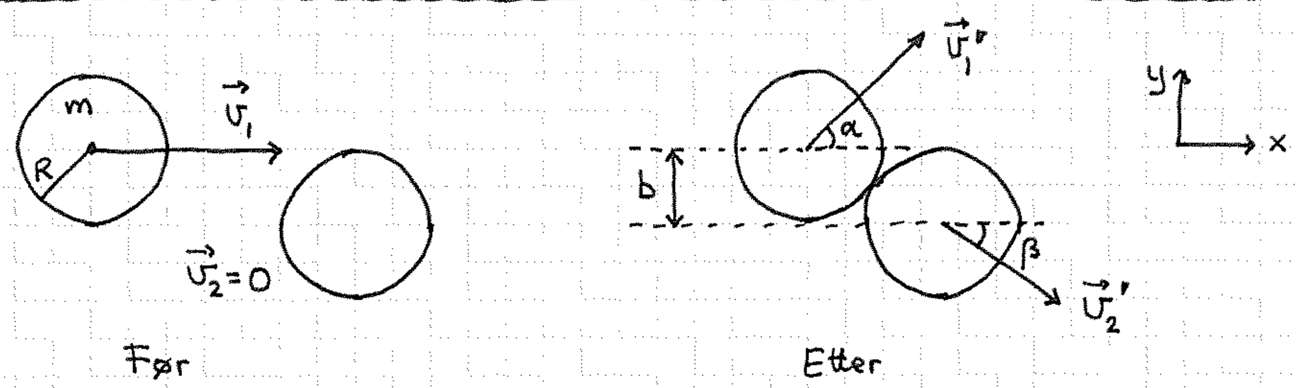
Kan videre bestemme v_A' og v_B' uten problemer.

Hvis støtet er <u>fullstendig uelastisk</u>, er

$$v_A' = v_B' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(Enkleste tilfelle!)}$$

Hvis støtet er <u>delvis uelastisk</u>, har vi kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for de 2 ukjente (v_A' og v_B'). Løsning betinger dermed en ekstra opplysning, f.eks. kjent v_A', v_B', ΔK, ...

Eks: Ikke-sentralt elastisk støt mellom to like kuler / pucker
[YF Ex 8.6 + 8.12, LL 5.3]



$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$, $\vec{v}_2 = 0$, R = kuleradius

b = støtparameter ("impact parameter"); inngår ikke i regningene nedenfor, men <u>viktig størrelse</u> i diskusjon av mer generelle kollisjoner (<u>spredningsteori</u>)

[Merk at <u>hvis</u> det ikke er friksjon i støtet, peker $\vec{F}_{12}$ og $\vec{F}_{21}$ langs linjen mellom kulenes sentrum, og $\vec{v}_2'$ får retning gitt ved $\sin\beta = b/2R$. Da kan problemet løses fullstendig. Men generelt har vi friksjon mellom kulene.]

Vi har 4 ukjente skalare størrelser,

v_{1x}', v_{1y}', v_{2x}', v_{2y}' ; evt v_1', v_2', α, β

men bare 3 skalare ligninger,

$\Delta p_x = 0$, $\Delta p_y = 0$, $\Delta K = 0$

[La oss anta at kulene <u>ikke</u> <u>glir</u> relativt hverandre, slik at det ikke utføres noe friksjonsarbeid!]

så ikke alle ukjente kan fastlegges.
Men vi kan finne ut en god del!

$\Delta p_x = 0 \Rightarrow v_1 = v_1' \cos\alpha + v_2' \cos\beta$

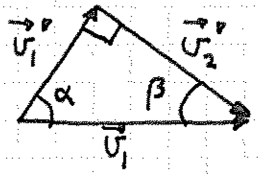
$\Delta p_y = 0 \Rightarrow 0 = v_1' \sin\alpha - v_2' \sin\beta$

(kan forkorte felles faktor m i alle ledd)

eller i en smekk: $\Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$

$\Delta K = 0 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$

Geometrisk:



$\Rightarrow$ $\underline{\alpha + \beta = \pi/2}$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_x = 0 \Rightarrow \quad v_2' \cos\beta &= v_1 - v_1' \cos\alpha \\ \Delta p_y = 0 \Rightarrow \quad v_2' \sin\beta &= v_1' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{Kvadrér og addér!} \Rightarrow v_2'^2 = v_1^2 - 2 v_1 v_1' \cos\alpha + v_1'^2$$

Som innsatt i $\Delta K = 0$ gir $v_1'(v_1' - v_1 \cos\alpha) = 0$, som har 2 mulige løsn:

a) $v_1' = 0$. Da er $v_2' = v_1$, dvs kule 1 og 2 bytter hastighet

b) $v_1' = v_1 \cos\alpha = v_1 \sin(\pi/2 - \alpha) = v_1 \sin\beta$, som innsatt i $\Delta p_y = 0$ gir

$v_2' \sin\beta = v_1 \sin\beta \sin\alpha \Rightarrow v_2' = v_1 \sin\alpha$

Da er det lett å se at vi har energibevarelse:

$$\left.\begin{aligned} K_1' &= \tfrac{1}{2} m v_1'^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \cos^2\alpha \\ K_2' &= \tfrac{1}{2} m v_2'^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{K'} = K_1' + K_2' = \tfrac{1}{2} m v_1^2 = K_1 = \underline{K}$$

OK!

Hit 03.10.11

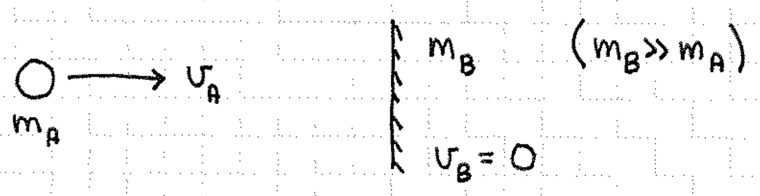
05.10.11

Eks: Ball som støter elastisk mot vegg

På s. 42 ble dette eksemplet diskutert i lys av at veggen påvirker ballen med et kraftstøt $\vec{J} = \int_{\Delta t} \vec{F} \cdot dt$ slik at ballens impuls endres med beløpet $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J}$.

La oss nå i stedet inkludere veggen (og det som veggen er festet til, huset, og dermed hele jorda...!) som en del av systemet og se på impuls- og energibevarelse.

Før:
(i)



Etter:
(f)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m_A v_A = m_A v_A' + m_B v_B'$$
$$\Delta K = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 = \tfrac{1}{2} m_A v_A'^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Gjør som på s 44 $\Rightarrow v_A + v_A' = v_B'$; settes inn for v_B' i $\Delta p = 0$

$$\Rightarrow m_A v_A = m_A v_A' + m_B (v_A + v_A')$$

$\Rightarrow v_A' = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A$; som innsatt for v_A' i $v_A + v_A' = v_B'$ gir

$$v_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A$$

De ulike impulsene og kinetiske energiene blir:

$p_A^i = m_A v_A$, $p_A^f = m_A v_A (m_A - m_B)/(m_A + m_B)$

$p_B^i = 0$, $p_B^f = 2 m_A v_A m_B / (m_A + m_B)$

$$K_A^i = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad , \quad K_A^f = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)^2$$

$$K_B^i = 0 \quad , \quad K_B^f = \frac{1}{2} m_B v_A^2 \left(\frac{2 m_A}{m_A + m_B}\right)^2$$

Vi ser nå at vi har impulsbevarelse:

$$p^f = p_A^f + p_B^f = m_A v_A \frac{m_A - m_B + 2m_B}{m_A + m_B} = m_A v_A = p^i$$

Vi har også energibevarelse:

$$K^f = K_A^f + K_B^f = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \underbrace{\frac{(m_A - m_B)^2 + 4 m_A m_B}{(m_A + m_B)^2}}_{=1} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = K^i$$

Nå lar vi m_B bli mye større enn m_A, mer presist $m_B \to \infty$.

Da blir:

$$p_A^f \to m_A v_A \cdot \frac{(-m_B)}{m_B} = -m_A v_A$$

$$p_B^f \to m_A v_A \cdot \frac{2m_B}{m_B} = 2 m_A v_A$$

$$K_A^f \to \frac{1}{2} m_A v_A^2 \cdot \left(\frac{-m_B}{m_B}\right)^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$K_B^f \to \frac{1}{2} m_A v_A^2 \cdot \frac{4 m_A m_B}{m_B^2} \xrightarrow{m_B \to \infty} 0$$

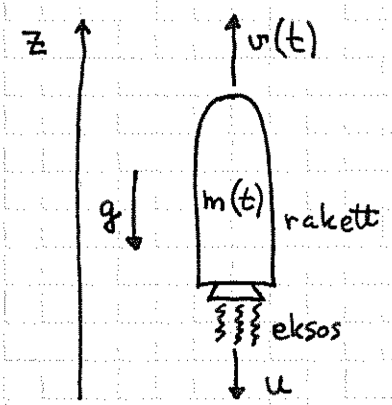
Konklusjon: Veggen får en endelig impuls $p_B^f = 2 m_A v_A$ som følge av kollisjonen med ballen.

Veggens kinetiske energi K_B^f, derimot, blir lik null i grensen $m_B \to \infty$.

Veggens hastighet $v_B^f \to 0$ siden $v_A^f \to -v_A$.

Merk: Vi kan skrive $K_B^f = \frac{1}{2} m_B (p_B^f / m_B)^2 = (p_B^f)^2 / 2 m_B$, og da ser vi uten videre at $K_B^f = 0$ dersom p_B^f er endelig og $m_B \to \infty$.

Eks: Variabel masse. Rakettprinsipp. [YF 8.6, LL 5.4]



Anta $v(0)=0$, $m(0)=m_0$, $-dm/dt$ er forbrent drivstoff pr tidsenhet ($dm < 0$), og u er eksosens hastighet relativt raketten (anta $u > 0$).
Bruk N2 til å finne ligning for $v(t)$.

Løsning:

$p(t) = m(t)v(t)$ = impulsen til "restraketten" (dvs: rakett + gjenværende drivstoff) ved tid t

N2: $F_{ytre}(t) = \dfrac{dp}{dt}$ med $F_{ytre} = -m(t)g$

$\Rightarrow$ Vi må finne $dp = p(t+dt) - p(t)$

$$p(t+dt) = \underbrace{[m(t)+dm]}_{m(t+dt)} \cdot \underbrace{[v(t)+dv]}_{v(t+dt)} + \underbrace{(-dm)}_{\substack{\text{forbrent}\\ \text{drivstoff}\\ \text{i løpet av } dt}} \cdot \underbrace{(v(t)-u)}_{\substack{\text{eksosens hastighet}\\ \text{relativt jorda}}}$$

$$= m(t)v(t) + m(t)\,dv + dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t) + dm \cdot u$$

($+\,dm \cdot dv$, men dette bidraget er "dobbelt infinitesimalt" og kan neglisjeres; jf. det du gjør når du f.eks. deriverer x^2)

Dermed:

$dp = p(t+dt) - p(t) = m(t)\,dv + u\,dm$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = m(t)\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt}}$$

Siden $F_{ytre} = dp/dt$, kan vi skrive dette på formen

$$\boxed{F_{ytre} + F_{skyv} = m(t)\frac{dv}{dt}}$$ med $F_{skyv} = -u\dfrac{dm}{dt} > 0$

[Konkret $m(t)$ + tallverdier i øving!]

Hit
05.10.11