

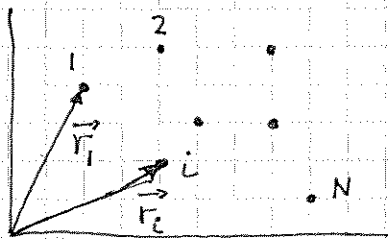
Motivasjonsforedrag nr 5 05.10.11:

Bjørn Petter Jelle, Sintef/NTNU:

Fysikk og nanoteknologi i husets fire vegger.

10.10.11

Tyngdepunkt [YF 8.5, LL 5.6 + 5.8]



System med N partikler, $1, 2, \dots, N$
 med masse m_1, m_2, \dots, m_N
 i posisjon $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

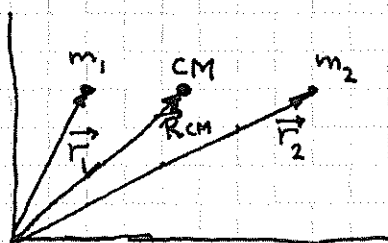
Tyngdepunkt (= massemiddelpunkt
 = massesenter; "center of mass")
 (YF: \vec{r}_{CM} , LL: \vec{R})

(Hvis g varierer fra øverst til nederst i systemet, blir tyngdepunktet litt forskjellig fra massesenteret.)

Siden $\sum_i m_i = M = \text{total masse}$, har vi

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

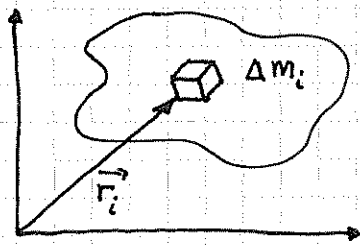
Ells: $N=2$



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) & ; m_1 = m_2 \\ \approx \vec{r}_1 & ; m_1 \gg m_2 \\ \approx \vec{r}_2 & ; m_2 \gg m_1 \end{cases}$$

Kontinuerlig massefordeling [LL 6.1]

51



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int dm \vec{r}}{\int dm}$$

der integralene går "over legemet".

$$\int_{\text{legemet}} dm = M = \text{legemets masse}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{legemet}} \vec{r} dm}$$

Kan ha 3-, 2- og 1-dimensjonale legemer (f.eks kloss, skive, stang):

$$3D: dm = \rho \cdot dV, \quad \rho = \text{masse pr volumenet}, \quad [\rho] = \text{kg/m}^3$$

$$2D: dm = \sigma \cdot dA, \quad \sigma = \text{--- " --- flateenhet}, \quad [\sigma] = \text{kg/m}^2$$

$$1D: dm = \lambda \cdot dl, \quad \lambda = \text{--- " --- lengdeenhet}, \quad [\lambda] = \text{kg/m}$$

$$dV = \text{volumenelement} \quad (dV = dx \cdot dy \cdot dz \text{ i kartesiske koord.})$$

$$dA = \text{flateelement} \quad (dA = dx \cdot dy \quad \text{--- " ---})$$

$$dl = \text{lengdeelement} \quad (dl = dx \quad \text{--- " ---})$$

(linjeelement)

Formen på legemet (typen symmetri) er avgjørende for hva slags koordinater som er hensiktsmessig.

N2 for system med flere partikler. Tyngdepunktbevegelse. (52)

[YF 8.5, LL 5.8]

N2 for partikkel i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

der \vec{F}_{ji} = kraft fra partikkel j på partikkel i , slik at

$\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total (indre) kraft på part. i fra alle andre part. i systemet

Bruker nå def. av \vec{R}_{CM} (fra s 50), tar $\frac{d^2}{dt^2}$ på begge sider og ganger med M . Dermed:

$$M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \stackrel{N2}{=} \sum_i \left\{ \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right\}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{N1} \\ &+ \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{N2} \\ &+ \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{N3} \\ &+ \dots \\ &+ \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + \dots + \vec{F}_{N-1,N} \\ &= \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = \underline{0} \\ &\quad \text{(pga N3!)} \end{aligned}$$

Kortversjonen av dette:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \underbrace{\left\{ \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right\}}_{=0} = 0$$

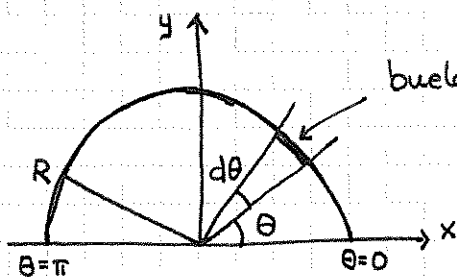
Dermed: $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$ der $\vec{F}_{ytre} = \sum_i \vec{F}_{i,ytre}$

Altså: Tyngdepunktet, \vec{R}_{CM} , til et system med flere partikler (f.eks. et stivt legeme) beveger seg som om hele massen, M , er samlet i \vec{R}_{CM} og blir utsatt for summen av alle ytre krefter, \vec{F}_{ytte} , som virker på systemet.

Dermed: Systemets totale bevegelse blir bevegelsen til CM, gitt ved $M\vec{R}_{CM} = \vec{F}_{ytte}$, pluss eventuell bevegelse relativt CM, slik som rotasjon og vibrasjon.

Eksempler på bestemmelse av \vec{R}_{CM} :

1D-eks: Halvsirkel, radius R , masse λ pr lengdeenhet



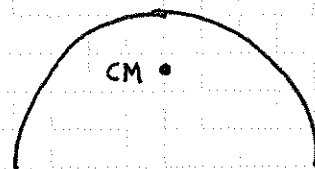
buelengde $dl = R d\theta$, masse $dm = \lambda dl = \lambda R d\theta$,
posisjon $x = R \cos\theta$, $y = R \sin\theta$

$\vec{R}_{CM} = X_{CM} \hat{x} + Y_{CM} \hat{y}$; ser at $X_{CM} = 0$ av symmetigrunner

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_{\theta=0}^{\pi} R \sin\theta \lambda R d\theta = \frac{\lambda R^2}{M} \int_0^{\pi} (-\cos\theta) = \frac{2\lambda R^2}{M} \underbrace{= | -1 + 1 | = 2}$$

$$M = \frac{1}{2} (\lambda \cdot 2\pi R) = \lambda \pi R$$

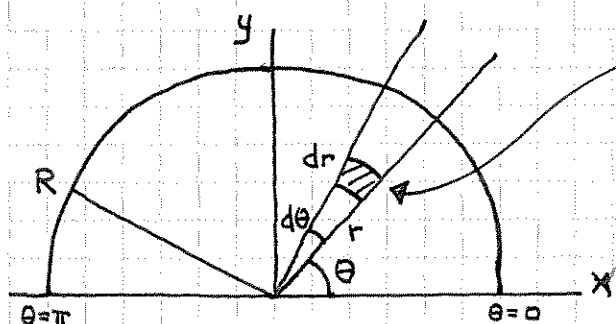
$$\Rightarrow \underline{Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R \approx 0.64 R}$$



Thomas Langø, Sintef:

Abildning og navigasjon i kikkhullskirurgi

12.10.11

2D-eks: Halvsirkelplate, masse σ pr flateenhet

flateelement $dA = dr \cdot r d\theta$,
 masse $dm = \sigma dA = \sigma dr r d\theta$,
 posisjon $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

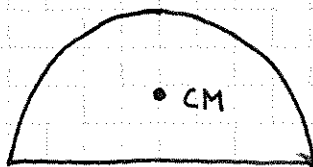
IAGEN: ser at $X_{CM} = 0$ av symmetri grunner

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \sigma dr r d\theta$$

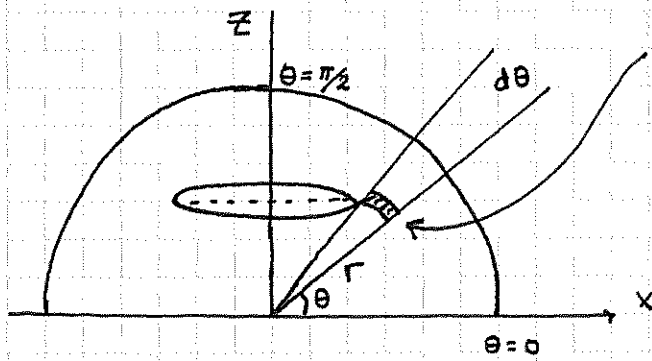
$$= \frac{\sigma}{M} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_2 = \frac{2\sigma R^3}{3M}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot (\sigma \cdot \pi R^2)$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{CM} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R}$$



3D-eks: Halvkule, masse g pr volumenet



flatelement $dA = dr \cdot r d\theta$,
 roteres omkring z -aksen, gir
 volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$
 $= dA \cdot 2\pi \cdot r \cos \theta$,
 med $z = r \sin \theta$ felles
 for hele "ringen"

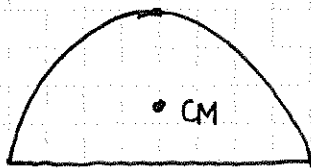
Av symmetigrunner er $X_{CM} = Y_{CM} = 0$.

$$Z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{1}{M} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi/2} r \sin \theta \cdot g \cdot dr r d\theta \cdot 2\pi r \cos \theta$$

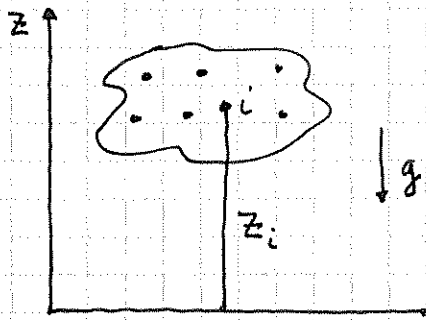
(Merk: Må her integrere θ fra 0 til $\pi/2$ for å dekke "kvartskiva" i "1. kvadrant". Når denne roteres om z -aksen, dekkes volumet til halvkula.)

$$M = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} g \pi R^3$$

$$Z_{CM} = \frac{3}{2g\pi R^3} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{= \frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta = 1/2} = \frac{3}{8} R = 0.375 R$$



Eks: Tyngdens potensielle energi for partikkelsystem



Velger $U=0$ ved $z=0$

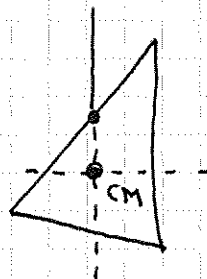
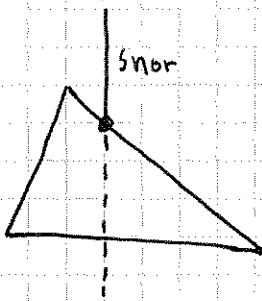
$$U_i = m_i g z_i = \text{pot. energi for masse } m_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \sum_i U_i = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i \\ &= g \cdot M \cdot z_{\text{cm}} \end{aligned}$$

Dvs: som om hele massen $M = \sum_i m_i$ er samlet

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

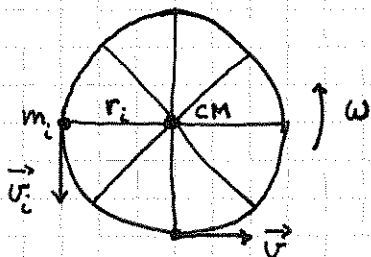
Eks: Eksperimentell bestemmelse av CM



Rotasjon [YF 9+10, LL 5.5+5.9, 6]

Innledning:

- roterende sykkelhjul



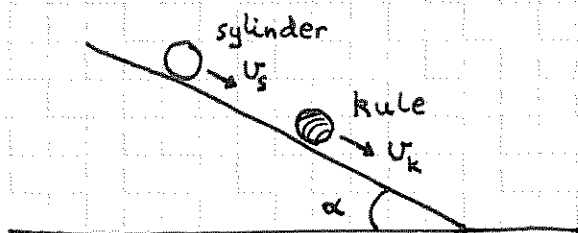
CM i ro, men rotasjonsenergi $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$\omega = v_i / r_i =$ vinkelhastighet (kjent!)

Hva med impuls knyttet til rotasjon?

Dreieimpuls! (Evt: spinn)

- rulling på skråplan



Hvilke krefter virker?

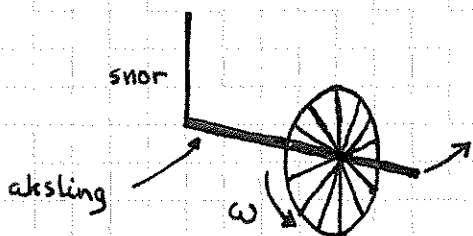
N2 og rotasjon; rotasjonsdynamikk

Hvor angriper kreftene?

Dreiemoment = "arm x kraft"

Hvorfor er $v_k > v_s$? Hvorfor rulling? Friksjonens rolle.

- komplisert dynamikk

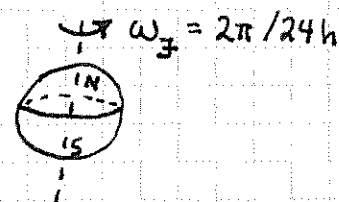


presesjon; gyroskop

- dynamikk i roterende koordinatsystem

Foucaults pendel

Corioliskrefter \Rightarrow avbøyning (mot høyre på nordlige halvkule)



Vi skal stort sett diskutere stive legemer def system med punktmasser i fast innbyrdes avstand. [Senere: også vibrasjon]

Hit 12.10.11