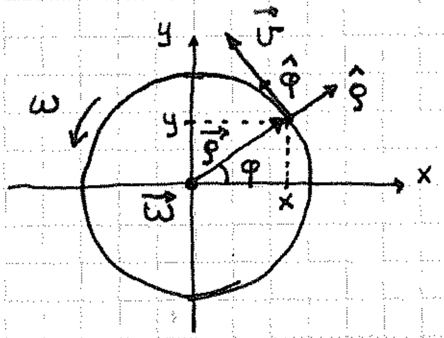
17.10.11

Sirkelbevegelse, rask repetisjon [YF 9.1–9.3, LL 1.8]

Anta rotasjon omkring $\hat{z}$.



$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \arctan(y/x) = \arccos(x/\rho) = \arcsin(y/\rho)$

$\vec{v} = d\vec{s}/dt = (\rho\, d\varphi/dt)\,\hat{\varphi} = \rho\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}$

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ = vinkelhastighet

$\vec{\omega}$ langs rotasjonsaksen, fortegn ifølge høyrehåndsregel

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ (i figur: $\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{z}$, $\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$)

$T = 2\pi/\omega$ = periode, $f = 1/T = \omega/2\pi$ = frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ = vinkelakselerasjon

$v = |\vec{v}| = \omega\rho$ = banehastighet

$a_\parallel = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho$ = baneakselerasjon

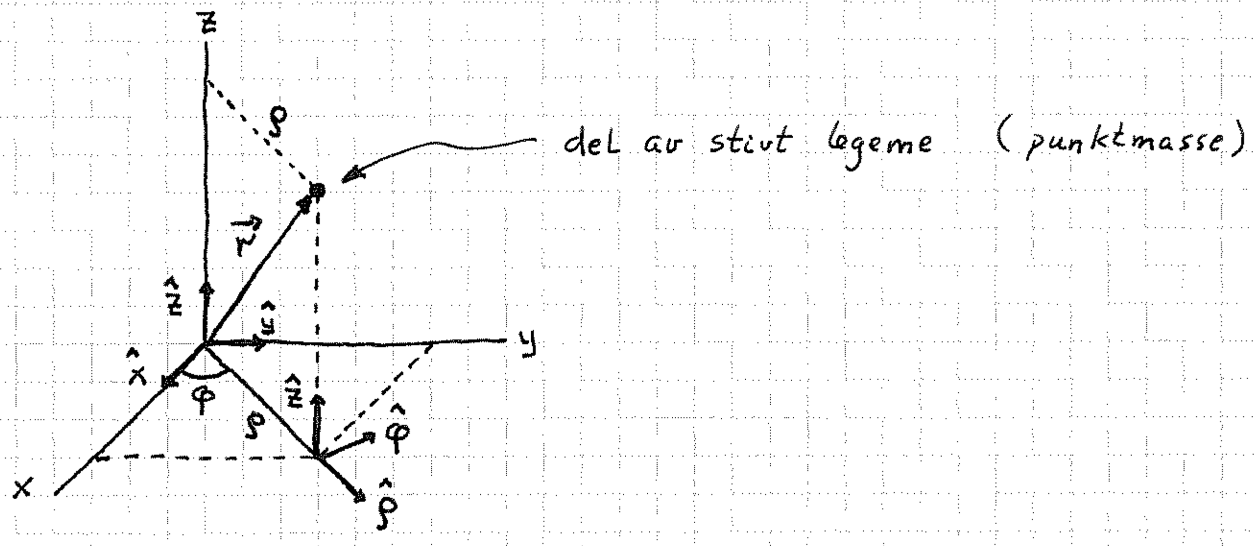
$a_\perp = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho$ = sentripetalaks.

$\vec{a}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ (se øving)

$\vec{a} = a_\parallel\hat{\varphi} - a_\perp\hat{\rho}$ = total akselerasjon

Rotasjon om gitt akse, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, gjør det naturlig med sylinderkoordinater.

Sylinderkoordinater



Kartesiske koord.: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Sylinderkoord.: $\vec{r} = \varrho\hat{\varrho} + z\hat{z}$

Merk: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ er <u>faste</u> enhetsvektorer,

men $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}(\varphi)$ og $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$

Relasjoner: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = z$

$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$

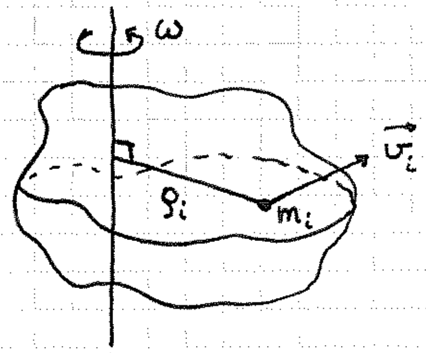
$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

For stivt legeme:

- alle m_i samme ω og α
- $v = \omega\varrho$ øker med ϱ
- $a_\perp = \omega^2\varrho$ —— " ——
- $a_\parallel = \alpha\varrho$ —— " ——

Rotasjonsenergi [YF 9.4, LL 6.4]

Anta rotasjon om fast akse (f.eks. gjennom $\vec{R}_{CM}$, men ikke nødvendigvis):



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad v_i = \omega \rho_i$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

$\Rightarrow \sum_i m_i \rho_i^2$ trer fram som en sentral størrelse!

Treghetsmoment [YF 9.4, LL 6.3]

"moment of inertia"

$\boxed{I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2}$ = legemets treghetsmoment om gitt akse,

ρ_i = m_i sin avstand fra rotasjonsaksen

Dvs: I avhenger av valgt akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \to \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$

$\Rightarrow \boxed{I = \int_{\text{legemet}} \rho^2 \, dm}$

ρ = dm sin avst. fra aksen

$dm = \lambda \, d\ell$ (1D), $\sigma \, dA$ (2D), $\rho \, dV$ (3D)

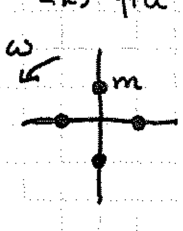
Hit 17.10.11

Dermed: $\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$ (jf $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$)

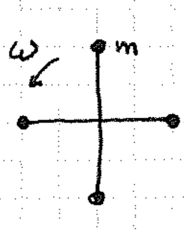
Motivasjonsforedrag nr 7 17.10.11: Andreas Wahl, "Universet på 42 minutter - fysikkstudent spesial"

19.10.11

Eks fra real-/teknostart:



liten ρ
$\Downarrow$
liten K_{rot}



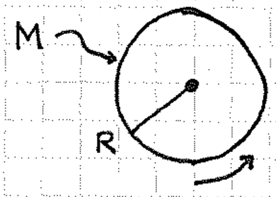
stor ρ
$\Downarrow$
stor K_{rot}

Dvs: K_{rot} avhenger av massens fordeling!

Eksempler på beregning av $I_0 = \int \rho^2 \, dm$

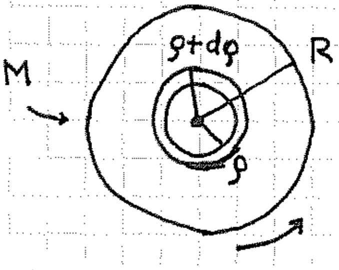
= treghetsmoment om symmetriakse gjennom CM

Eks 1: Tynn ring (f.eks sykkelhjul, $m_{eiker} \ll m_{felg} \approx M$)



$$I_0 = \int_{ring} \rho^2 \, dm = R^2 \int_{ring} dm = \underline{MR^2}$$

Eks 2: Tynn skive, radius R



$$dm = \sigma \, dA = \sigma \, 2\pi\rho \, d\rho \quad , \quad \sigma = M/\pi R^2$$

[Evt: dm = total masse · arealandel

$= M \cdot (dA/A) = M \cdot (2\pi\rho\, d\rho / \pi R^2)$]

$$\Rightarrow I_0 = \int_{skive} \rho^2 \, dm = \int_0^R \rho^2 \, M \, \frac{2\pi\rho\, d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4}R^4} = \underline{\tfrac{1}{2} MR^2}$$

Eks 1a: Tynn sylinder $\Rightarrow$ som eks 1 $\Rightarrow$ $I_0 = MR^2$

Eks 2a: Kompakt — " — $\Rightarrow$ som eks 2 $\Rightarrow$ $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$

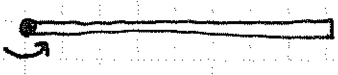
Eks 3: Tynt kuleskall : $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 4: Kompakt kule : $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Eks 5: Tynn rett stang, lengde L : $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$

Eks 6: Om akse gjennom stangas ende : $I = \frac{1}{3} ML^2$

øving !



Treghetsradius R_a

$I_0 = M R_a^2$; dvs som om hele massen M ligger i avstand R_a fra aksen (LL bruker Γ for treghetsradius)

Eks: Ring: $R_a = R$; Skive: $R_a = R/\sqrt{2}$; Kuleskall: $R_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$;
Tynn stang: $R_a = L/\sqrt{12}$

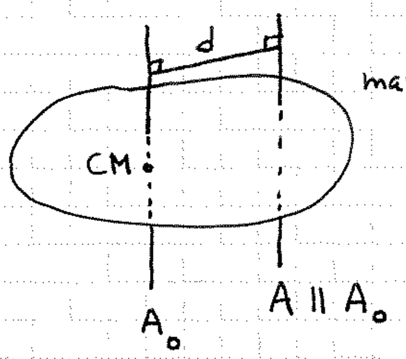
Enhet for treghetsmoment

$$[I] = [m \cdot r^2] = \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Steiners sats [YF 9.5, LL 6.3]

(Jakob Steiner, sveitsisk matematiker)

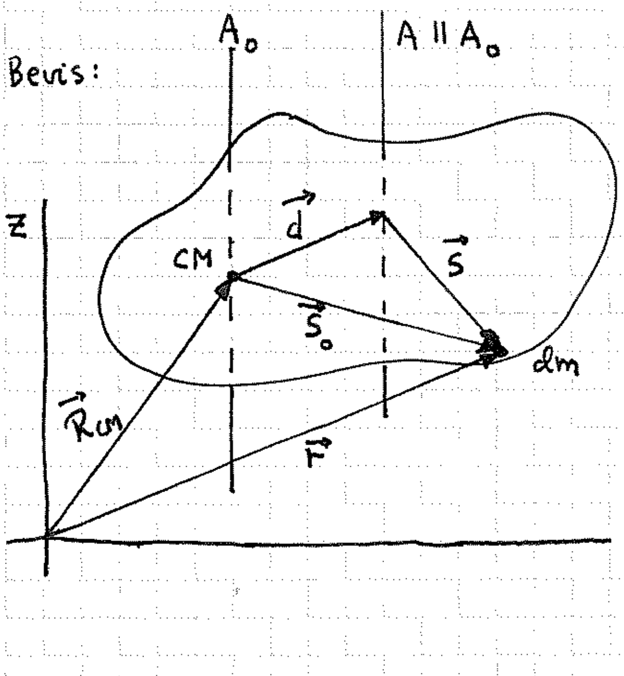
Evt: parallellakseteoremet



I_0 = treghetsmoment om A_0
I = ——"—— $A \parallel A_0$
d = avstand mellom A_0 og A

Da er $\boxed{I = I_0 + M d^2}$

Bevis:



Relasjoner mellom vektorer:

$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0$

$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$

$\vec{s}_0 = \vec{\rho}_0 + \vec{z}_0$

$\vec{s} = \vec{\rho} + \vec{z}$

$\vec{z} = \vec{z}_0 \qquad (\vec{d} \perp \hat{z})$

$\Rightarrow \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 = \vec{s} - \vec{s}_0 = -\vec{d}$

$\Rightarrow \vec{\rho} = \vec{\rho}_0 - \vec{d}$

Treghetsmoment om A blir da:

$$I = \int \rho^2 \, dm = \underbrace{\int \rho_0^2 \, dm}_{=I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{=M} - 2\vec{d} \cdot \int \vec{\rho}_0 \, dm$$

Siste ledd:

$$\vec{d} \cdot \int \vec{\rho}_0 \, dm = \vec{d} \cdot \int (\vec{s}_0 - \vec{z}_0) \, dm \overset{\vec{d} \cdot \vec{z}_0 = 0}{=} \vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 \, dm$$

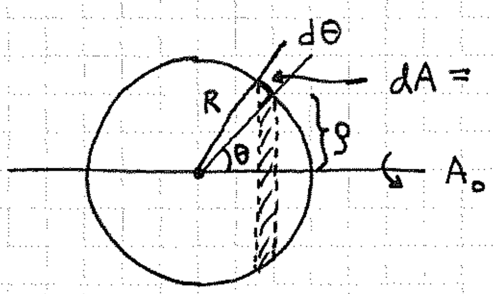
$$= \vec{d} \cdot \int (\vec{r} - \vec{R}_{CM}) \, dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{=M \cdot \vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_{=M} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad I = I_0 + M d^2 \qquad \underline{\text{qed}}$$

NB! Beviset for Steiners sats ble feil på tavla. Beklager! Men her er det ok!

Et par tips til øving 8:

I_0 for tynt kuleskall:



$dA = R \, d\theta \cdot 2\pi\rho$ = areal av tynn ring med bredde $R \, d\theta$ og radius ρ

I_0 for kompakt kule:

Kompakt kule = sum av mange tynne kuleskall med radius r, tykkelse dr, og dermed volum $dV = 4\pi r^2 \, dr$ og masse $dm = M \cdot dV / V$, der V = kulevolumet

Kinetisk energi for stive legemer [YF 10.3, LL 6.6]

Fra s. 60: $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ når legemet roterer om fast akse.

Mer generell bevegelse vil være translasjon + rotasjon, f.eks hjul som ruller. Total kinetisk energi er da

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

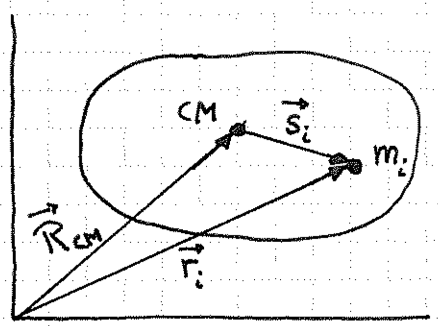
Her er M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til legemets tyngdepunkt

I_0 = treghetsmomentet om en akse gjennom CM

ω = vinkelhastigheten for legemets bevegelse relativt CM

Bevis:



$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\underbrace{\dot{\vec{R}}_{CM}}_{=\vec{V}} + \underbrace{\dot{\vec{s}}_i}_{=\vec{u}_i}) \cdot (\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (V^2 + u_i^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}_i)$$

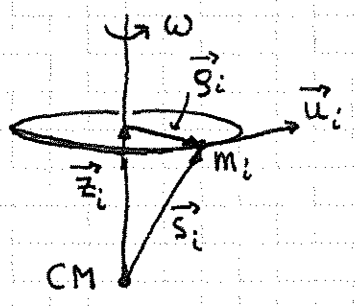
Siste ledd: $\sum_i m_i \vec{V} \cdot \vec{u}_i = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{s}_i = 0$, siden

$$\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$$

Første ledd: $\frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 = \frac{1}{2} M V^2$

Andre ledd (bevegelsen relativt CM):

For stivt legeme, ren rotasjon om akse gjennom CM (bevises ikke her!)



$$\vec{u}_i = \dot{\vec{s}}_i = \underbrace{\dot{\vec{z}}_i}_{=0} + \dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{\rho}}_i = \rho_i \omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{= I_0} \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

qed

Hit 19.10.11