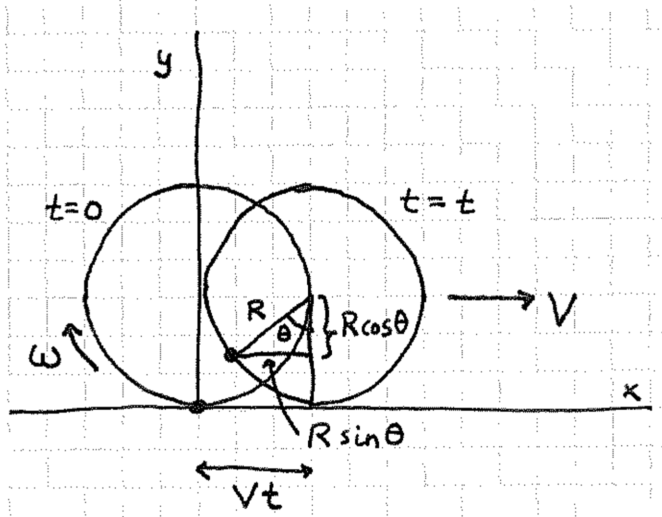
24.10.11

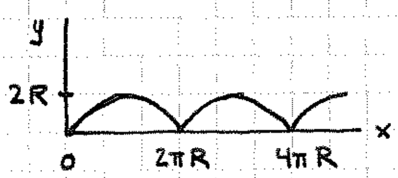
Rulling [YF 10.3, LL 6.7]

Ved ren rulling følger punkt på periferien en sykloide:



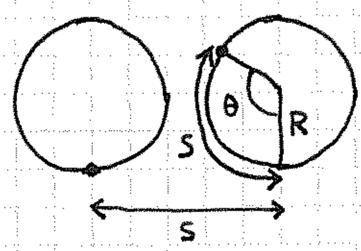
$$x(t) = Vt - R\sin\theta = Vt - R\sin\omega t$$

$$y(t) = R - R\cos\theta = R(1-\cos\omega t)$$



[Demo: Sykkelfelg m/kritt på tavla.]

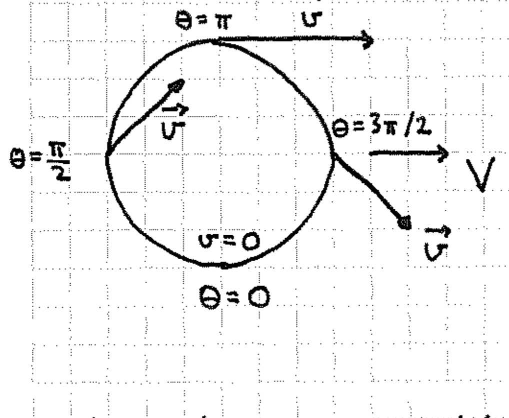
$$\dot{x} = V - R\omega\cos\omega t, \qquad \dot{y} = R\omega\sin\omega t$$



$$\left.\begin{aligned} s &= R\theta \\ V &= \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \\ A &= \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha \end{aligned}\right\} \text{rullebetingelser}$$

Dermed:

$$\vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$$



$$\vec{v}(\pi/2) = V\hat{x} + V\hat{y}$$

$$\vec{v}(\pi) = 2V\hat{x}$$

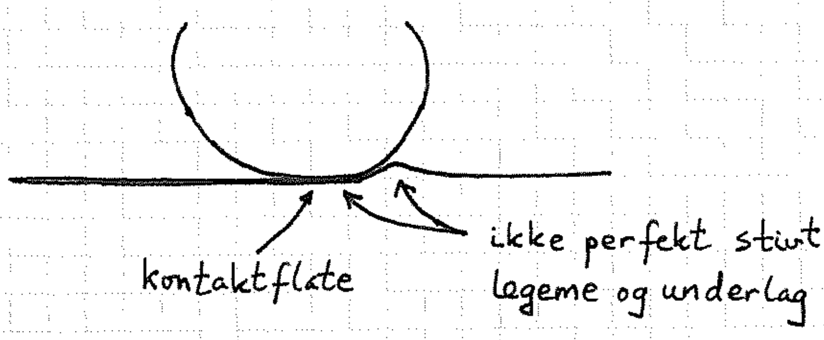
$$\vec{v}(3\pi/2) = V\hat{x} - V\hat{y}$$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

$\omega = \frac{V}{R}$, $I_0 = c\cdot MR^2$ (ring: $c=1$, skive: $c=\frac{1}{2}$, kule: $c=\frac{2}{5}$)

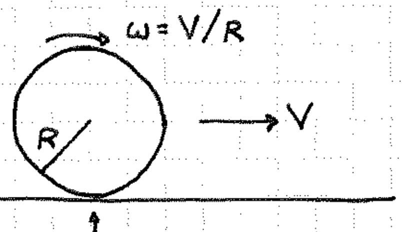
$$\Rightarrow \underline{K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2}$$

Friksjon ved rulling:



$\Rightarrow \mu_r > 0$

perfekt stivt legeme og underlag:

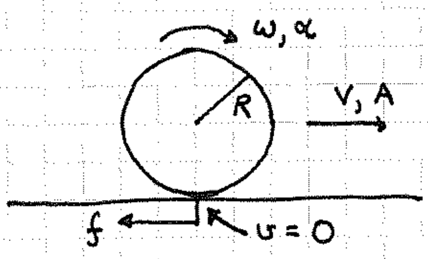


kontaktpunkt i ro $\Rightarrow W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mu_r = 0}$

Men (statisk) friksjon μ_s sørger for (ren) rulling, og μ_s må være stor nok for å gi ren rulling.

Ren rulling:

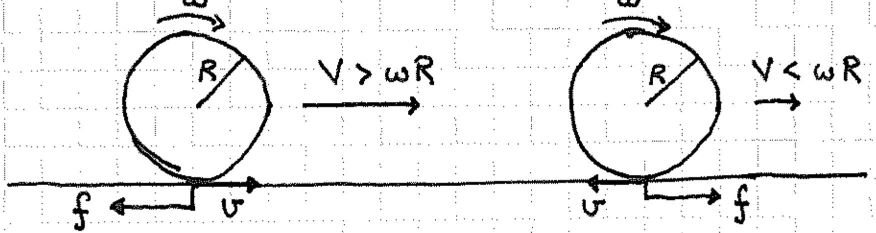


$V = \omega R$

$A = \alpha R$

$f \leq \mu_s N$

Sluring:

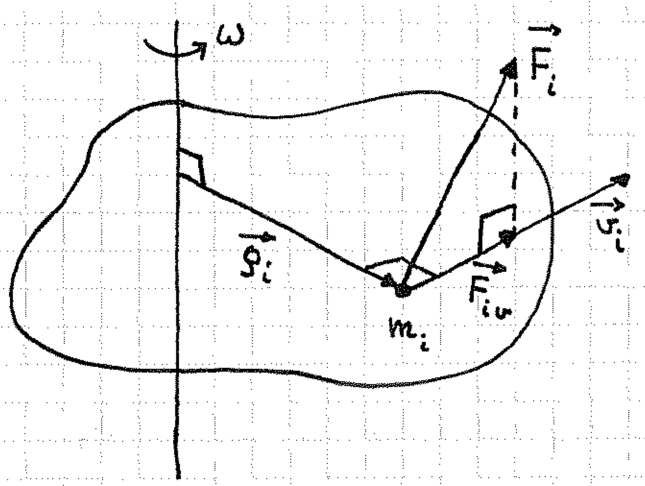


$f = \mu_k N$

Som før er f rettet mot (potensiell) relativ bevegelse i kontaktpunktet.

Rotasjonsdynamikk

Starter "enkelt" og ser på rotasjon av stivt legeme om fast akse:



$\vec{v}_i = \rho_i \omega \hat{\varphi}_i$ = hastigheten til m_i

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}_i$ = avstand fra aksen til m_i

$\vec{F}_i$ = netto ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{iv}$ = komponenten av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

Total effekt P tilført legemet:

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv}\, \rho_i \omega = \omega \sum_i F_{iv}\, \rho_i$$

Gir endring i kinetisk energi $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ (I = treghetsmoment):

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed:

$$\sum_i F_{iv}\, \rho_i = I \dot{\omega}$$

<u>Dreiemoment</u> (= Kraftmoment):

$\tau_i = F_{iv}\, \rho_i$ = kraftens dreiemoment om rotasjonsaksen

der F_{iv} = kraftens komponent langs $\vec{v}_i$

ρ_i = kraftens <u>arm</u>

$\tau = \sum_i \tau_i$ = totalt dreiemoment om rot. aksen

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$ N2 for rotasjon om fast akse

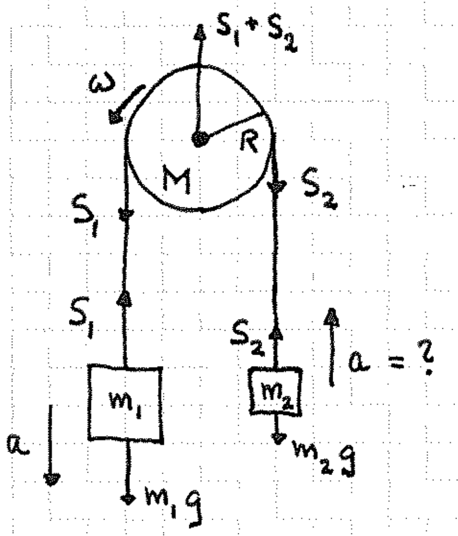
Jf $F = M\dot{v}$, N2 for translasjon (1D)

$$\frac{dW}{dt} = \omega \cdot \tau \,, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\, d\varphi} = \text{arbeid utført av } \tau \text{ ved rotasjon } d\varphi$$

Jf $dW = F\,ds$ = arbeid utført av F ved forflytning ds (1D)

Eks 1: Atwoods maskin (øving 8, oppg 3) [Demo!]



N2 for m_1: $m_1 g - S_1 = m_1 a$

— " — m_2: $S_2 - m_2 g = m_2 a$

⇒ To ligninger, tre ukjente (S_1, S_2, a)!

Lign. nr 3: N2 for skivas rotasjon

$$\tau = I_0 \dot{\omega} \;; \quad I_0 = \tfrac{1}{2} MR^2$$

Snora glir ikke $\Rightarrow v = \omega R \Rightarrow a = \dot{\omega} R$

Netto dreiemoment på skiva (fra snora): $\tau = S_1 \cdot R - S_2 \cdot R$

$$\Rightarrow (S_1 - S_2) R = \tfrac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{a}{R} = \tfrac{1}{2} MRa \Rightarrow S_1 - S_2 = \tfrac{1}{2} Ma$$

N2 for $m_1 \Rightarrow S_1 = m_1 g - m_1 a$

N2 for $m_2 \Rightarrow S_2 = m_2 g + m_2 a$

$$\Rightarrow m_1 g - m_1 a - (m_2 g + m_2 a) = \tfrac{1}{2} Ma$$

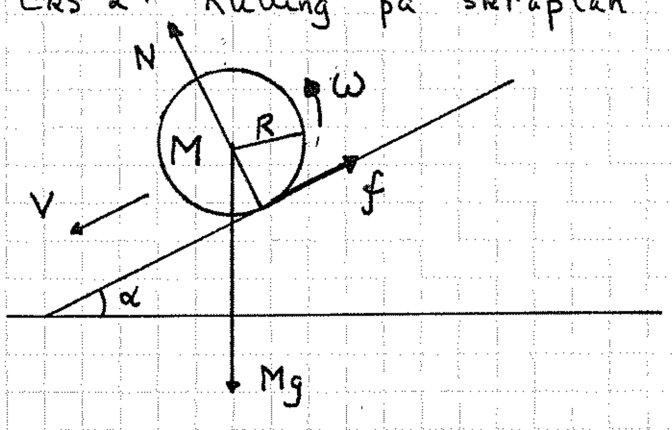
$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2 + M/2) a$$

Hit 24.10.11

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g$$

(som vi fant med energibetraktning i øving 8!)

26.10.11 Eks 2: Rulling på skråplan



Ingen bevegelse ⊥ skråplanet

$\Rightarrow a_\perp = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\alpha$

N2 langs skråplanet: $Mg\sin\alpha - f = M\dot{V}$ (tyngepunkt-bevegelsen)

(1 lign., 2 ukjente: f og $\dot{V}$)

N2 for rot. om akse gjennom CM:

$$\tau = f\cdot R = I_0\dot{\omega} \overset{\text{ren}}{\underset{\text{rulling}}{=}} I_0\dot{V}/R \Rightarrow f = I_0\dot{V}/R^2$$

$$\Rightarrow Mg\sin\alpha - I_0\dot{V}/R^2 = M\dot{V}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \underline{\underline{\frac{g\sin\alpha}{1 + I_0/MR^2}}}$$

$$f = \frac{I_0}{R^2}\dot{V} = \underline{\underline{\frac{Mg\sin\alpha}{1 + MR^2/I_0}}}$$

$$f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\alpha$$

$\Rightarrow \mu_s$ må minst være $\mu_s^{min} = \frac{\tan\alpha}{1 + MR^2/I_0}$ for å få ren rulling

	I_0/MR^2	$\dot{V}$	μ_s^{min}
Kule	2/5	$\frac{5}{7}g\sin\alpha$	$\frac{2}{7}\tan\alpha$
Skive	1/2	$\frac{2}{3}g\sin\alpha$	$\frac{1}{3}\tan\alpha$
Ring	1	$\frac{1}{2}g\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\tan\alpha$

[Demo:

Kappløp på skråplan.]

Mekanisk likevekt
[YF 11.1-11.3, LL 7.1]

N1, translasjon:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \text{konst.}$$

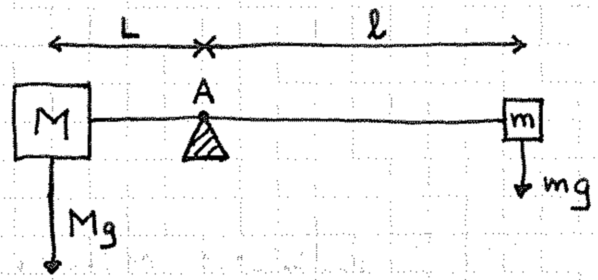
N1, rotasjon om fast akse:

$$\tau = \sum_i \tau_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \text{konst.}$$

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for mekanisk likevekt.

Statisk likevekt: $V = 0$, $\omega = 0$

Eks 1: Vektstang ("Vippehuske") ("Spett")



$m_{stang} \ll m, M$

Likevekt mhp rotasjon om A: $Mg \cdot L - mg \cdot \ell = 0$

$$\Rightarrow M \cdot L = m \cdot \ell$$

(N1, translasjon ⇒ normalkraft $N = Mg + mg$, rettet oppover, fra på stanga i A)

Konvensjonelt fortegnsvalg for τ:

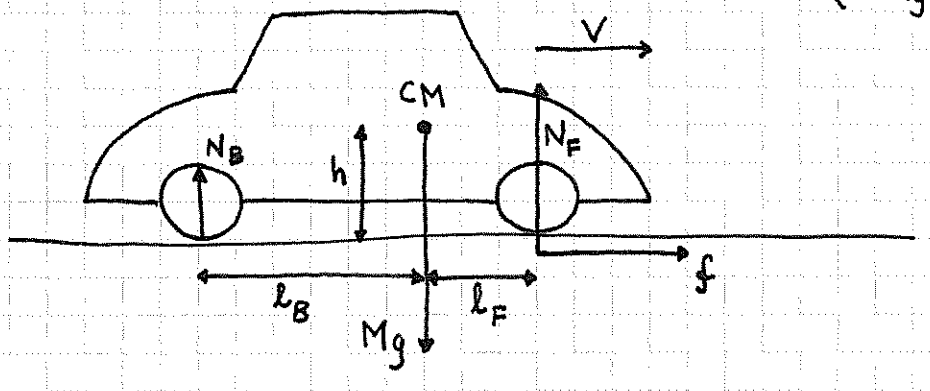
$\tau > 0 \Rightarrow$ rotasjon mot klokka $(\Rightarrow + MgL)$

$\tau < 0 \Rightarrow$ —"— med —"— $(\Rightarrow - mg\ell)$

[Pass på at fortegnene på V og ω blir konsistente.]

Eks 2: Bil som akselererer

Dvs: rotasjonslikevekt ($\tau = 0$) men ikke translasjonslikevekt
($\Rightarrow$ "dynamisk likevekt")



Motoren $\Rightarrow$ dreiemoment på aksling foran (anta forhjulstrekk)
$\Rightarrow$ forhjul roterer med klokka og skyver veibanen bakover ($-f$)
$\overset{N3}{\Rightarrow}$ veibanen skyver forhjul og bil framover (f)

N2 vertikalt: $N_B + N_F - Mg = 0$

N2 horisontalt: $f = M\dot{V}$

N2 for rotasjon om akse gjennom CM:

$$\tau = N_F \ell_F + f \cdot h - N_B \ell_B = 0$$

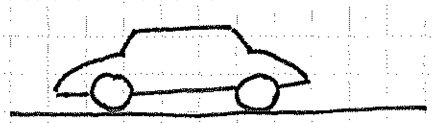
$$\Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{N_B \ell_B - N_F \ell_F}{Mh}$$

$\dot{V} = 0 \Rightarrow N_B \ell_B = N_F \ell_F$ (OK; "vektstang")

$\dot{V} > 0 \Rightarrow N_B \ell_B > N_F \ell_F$, økt "vekt" på bakhjulene

$\dot{V} < 0 \Rightarrow N_B \ell_B < N_F \ell_F$, økt "vekt" på forhjulene

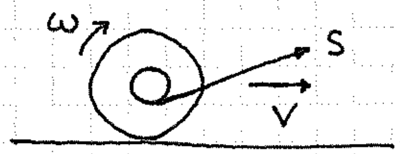
Velkjent:



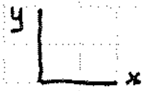
$\dot{V} > 0$

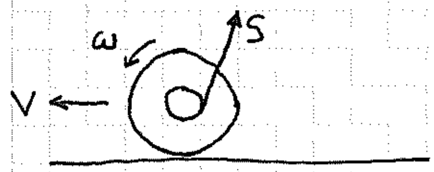
$\dot{V} < 0$

Eks 3: Snelle, Jojo [Demo!]

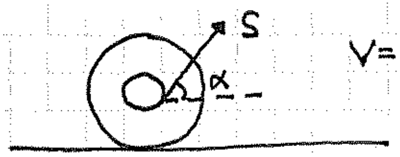


$\Sigma F_x > 0, \quad \Sigma \tau_i < 0 \qquad (\Sigma F_y = 0)$



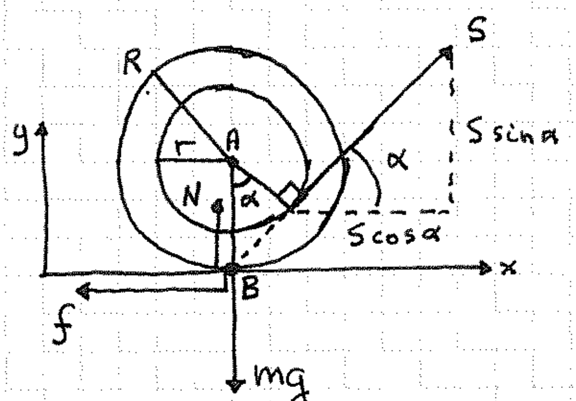


$\Sigma F_x < 0, \quad \Sigma \tau_i > 0 \qquad (\Sigma F_y = 0)$



$V = 0, \; \omega = 0 \qquad \Sigma F_x = 0, \; \Sigma \tau_i = 0, \; \Sigma F_y = 0$

$\boxed{\alpha = ?}$



Krefter på snella:

S = snordrag

f = friksjon

mg = tyngde

N = normalkraft

$$0 = \Sigma F_x = S\cos\alpha - f \Rightarrow \underline{f = S\cos\alpha}$$

$$0 = \Sigma F_y = S\sin\alpha + N - mg \Rightarrow \underline{N = mg - S\sin\alpha}$$

$$0 = \Sigma \tau_A = S\cdot r - f\cdot R \Rightarrow Sr = fR = SR\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha = r/R}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2r &= 157 \text{ mm} \\ 2R &= 248 \text{ mm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{157}{248} \approx \underline{\underline{51^\circ}}$$

Alternativt, rot. likevekt om B:

f, N og mg har null arm mhp B $\Rightarrow$ bidrar ikke til τ_B

$\Rightarrow$ S må også ha null arm mhp B $\Rightarrow$ Snoras forlengelse går gjennom B i statisk likevekt $\Rightarrow$ $\underline{\cos\alpha = r/R}$ ses direkte fra figuren!

Hit 26.10.11