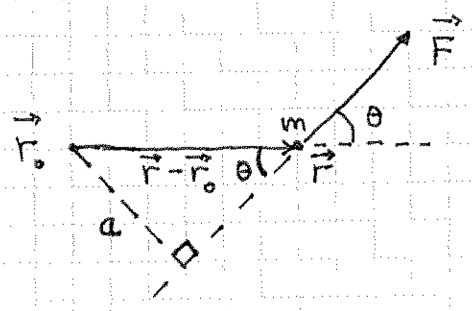
31.10.11

Rotasjon i 3D [YF 10.1+2+5+6+7 ; LL 5.5, 5.9, 6.x]

Dreiemoment

Punktmasse m i posisjon $\vec{r}$:



$$\vec{\tau} \stackrel{def}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

$= \vec{F}$'s dreiemoment relativt $\vec{r}_0$; $\vec{r}_0$ = valgt referansepunkt

$\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$; fortegn via høyrehåndsregel
($\Rightarrow \vec{\tau}$ ut av planet i fig. ovenfor)

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$$

dreiemoment = arm × kraft

arm = $a = |\vec{r} - \vec{r}_0| \sin\theta$ = avstand fra $\vec{r}_0$ til linjen definert ved $\vec{F}$ (se figur ovenfor)

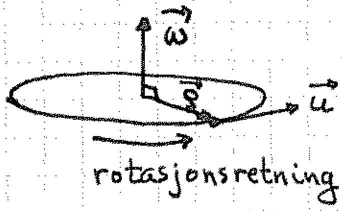
For system med flere masseelementer m_i i posisjon $\vec{r}_i$ påvirket av krefter $\vec{F}_i$:

$\vec{\tau}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$ = dreiemoment fra $\vec{F}_i$, relativt $\vec{r}_0$

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$ = totalt dreiemoment på systemet, relativt $\vec{r}_0$

Valgt referansepunkt $\vec{r}_0$ er felles for hele systemet.

Vinkelhastighet som vektor, $\vec{\omega}$ (kjent fra før, se s. 11):



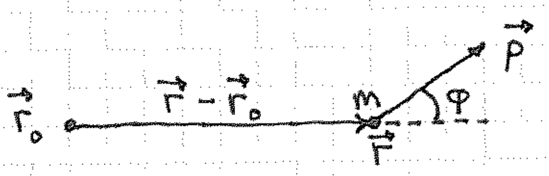
$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ = hastighet

Fortegn på $\vec{\omega}$ via h.h. regel

(rotasjon mot klokka $\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ ut av planet)

Dreieimpuls

Punktmasse m i $\vec{r}$ med impuls $\vec{p} = m\vec{v}$:



$$\vec{L} \overset{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

= punktmassens dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$;

$\vec{r}_0$ = valgt referansepunkt (som for $\vec{\tau}$)

Dermed er: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ Vektoriell N2 for rotasjon

(Jf. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, vektoriell N2 for translasjon)

Bevis for $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \right\}$$

Anta m = konst., og $\vec{r}_0$ = konst. eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \vec{v}}_{= m\vec{v} \times \vec{v} = 0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{v}} \overset{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} \overset{\text{def}}{=} \vec{\tau}$$

qed

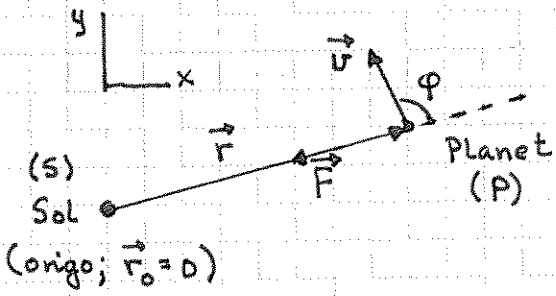
Konserveringslov for dreieimpuls (punktmasse):

$$\boxed{\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}}$$

(Jf: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$; konserveringslov for impuls)

Merk: At $\vec{L} = \text{konst.}$ for isolert system er like fundamentalt som at $\vec{p} = \text{konst.}$ og $E = \text{konst.}$ (når alle energiformer regnes med).

Eks: Keplers 2. lov, Flatesatsen

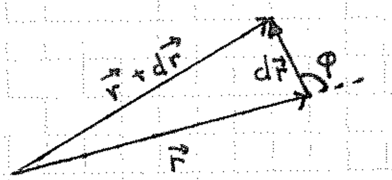


S, P $\approx$ punktmasser $(R_S, R_P \ll r)$

$\vec{F} \sim -\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

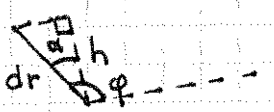
$\Rightarrow \vec{L} = L_z \hat{z} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{konst.}$

$L_z = m r v \sin\varphi$



Areal sveipet over av $\vec{r}$:

$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin\varphi$

[

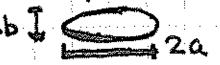
$h = dr \cos\alpha = dr \cos(\varphi - \pi/2) = dr \sin\varphi$]

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \sin\varphi = \frac{1}{2} r v \sin\varphi = \frac{1}{2m} L_z = \text{konst.}$$

$\Rightarrow \vec{r}$ (= vektor fra sol til planet) sveiper over like stort areal (dA) pr tidsenhet (dt) langs hele (ellipse-)banen rundt sola. (Keplers 2. lov)

[1. lov: Planetenes baner er ellipser, med sola i det ene av to brennpunkter.

3. lov: $T^2/a^3 = \text{konst.}$ for alle planetene; T = omløpstid, a = store halvakse]



For <u>stivt legeme</u>; dvs system med masseelementer m_i i pos. $\vec{r}_i$ med hastighet $\vec{v}_i$:

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i = \text{dreieimpulsen til } m_i \text{ relativt } \vec{r}_0$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \text{legemets totale dreieimpuls relativt } \vec{r}_0$$

$$\dot{\vec{L}}_i = \text{... som på s. 74...} = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{\tau}_i$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau},$$

så hvis $\vec{\tau} = 0$, er $\vec{L}$ = konstant også for stivt legeme (og for partikkelsystemer generelt)

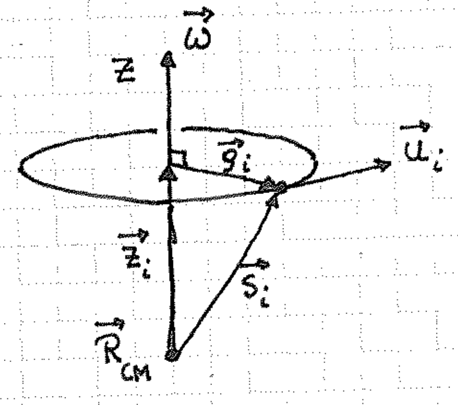
Fra før har vi (s 64):

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

= total kinetisk energi for stivt legeme med masse M, tyngdepunktshastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$, instantan rotasjon om akse gjennom CM med vinkelhastighet $\vec{\omega}$, og treghets-moment I_0 mhp rotasjonsaksen

Naturlig spørsmål er da: Kan vi på tilsvarende måte skrive $\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel}$, dvs som sum av bidrag fra bevegelsen til CM (relativt det valgte $\vec{r}_0$, selvsagt!) og bidrag fra masseelementenes bevegelse relativt CM ?

Svaret er <u>ja</u>! Utgangspunkt for beviset er (som på s. 64) <u>Eulers teorem</u>, som slår fast at et stivt legemes instantane bevegelse relativt CM alltid kan beskrives som en rotasjon, med vinkelhastighet $\vec{\omega}(t)$, om en akse gjennom CM. (Eulers teorem bevises ikke her.)



$\vec{s}_i$ og $\vec{u}_i$ er relativkoord. og relativhastighet:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i \qquad (\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra før: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ (s 11 og 74)

$= \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} + \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i$$

$$+ \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$

= banedreieimpulsen pga CM's bevegelse, relativt $\vec{r}_0$

2. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$

Husk: $\vec{R}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = \sum_i m_i \vec{r}_i / M$ (se også s 64)

$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = 0$ ($\vec{V}$ "inngår ikke" i summen over i)

3. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{s}_i)}_{= \vec{u}_i} = (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$

4. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel}$ = bidrag pga massedementenes bevegelse relativt CM (uavhengig av valg av $\vec{r}_0$!)

Hit 31.10.11

2.11.11

Vi ser nærmere på $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$

Matematisk identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}\, s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\}$$

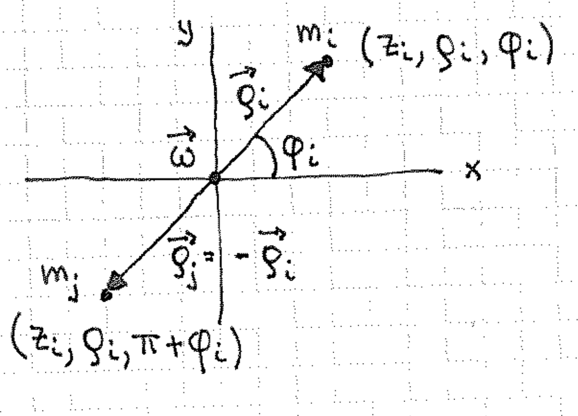
Her er: $\vec{\omega}\, s_i^2 = \vec{\omega}\,(z_i^2 + \rho_i^2)$

$$\vec{s}_i(\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) = (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i)(z_i \omega) = z_i^2 \vec{\omega} + z_i \omega \vec{\rho}_i$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\, s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) = \rho_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{= I_0} \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis legemet har sylindersymmetri om en akse som faller sammen med rotasjonsaksen, er $\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = 0$, fordi bidraget fra m_i i posisjon $(z_i, \vec{\rho}_i)$, dvs sylinderkoordinatene (z_i, ρ_i, φ_i), vil kanselleres av bidraget fra $m_j (= m_i)$ i posisjon $(z_j = z_i,\ \vec{\rho}_j = -\vec{\rho}_i)$, dvs sylinderkoordinatene $(z_i, \rho_i, \pi + \varphi_i)$:



Vi vil stort sett ha dette oppfylt (men unntak finnes), og da er $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = I_0 \vec{\omega} = \vec{L}_{rel}$

Konklusjon, for stivt legeme (med sylindersymmetri om akse som faller sammen med rot. aksen $\hat{\omega}$):

$$\boxed{\vec{L} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}}$$

Total dreieimpuls (rel. $\vec{r}_0$) = Banedreieimpuls (rel. $\vec{r}_0$) + Spinn (uavh. av $\vec{r}_0$)

Kommentar til symmetriargumentet s 78:

Overgang til kontinuerlig massefordeling gir

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \rightarrow \int dm\, z \vec{\rho} = \int \underbrace{dV \cdot \mu}_{dm} \cdot z \vec{\rho}$$

Her er μ legemets masse pr volumenhet, og hvis vi har sylindersymmetri om rot. aksen (z-aksen), er μ uavhengig av φ, dvs $\mu(\vec{r}) = \mu(z, \rho)$.

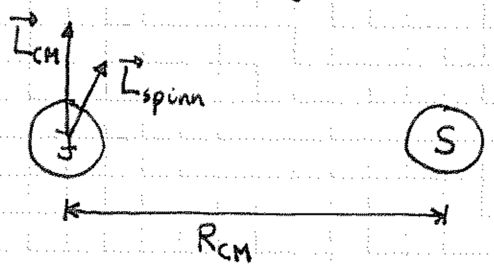
I såfall:

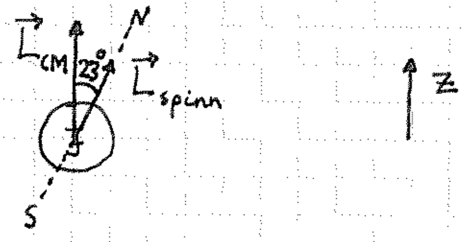
$$\int_V dV\, \mu z \vec{\rho} = \int_L dz\, z \int_A dA\, \mu(z,\rho) \vec{\rho},$$

og her blir $\int_A dA\, \mu(z,\rho)\vec{\rho} = 0$

pga at bidragene fra $\vec{\rho}$ og $-\vec{\rho}$ kansellerer hverandre.

Eks 1: $\vec{L}$ for jorda i banen rundt sola (tilnærmet sirkel)

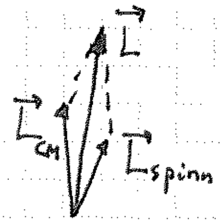




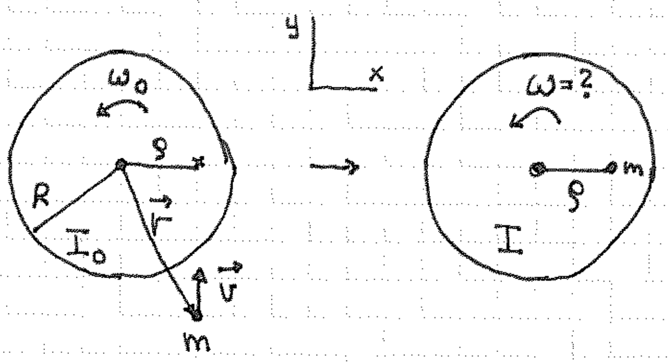
$$\vec{L}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times M_J \vec{V}_J = R_{CM} M_J V_J \, \hat{z}$$

$$\vec{L}_{spinn} = I_0 \, \vec{\omega} \quad \left(\text{med } \omega = 2\pi/(24h)\right)$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{spinn} = \text{total dreieimpuls}$$



Eks 2: Karusell



Du har masse m og lander fullstendig uelastisk på karusellen, som vist i figuren. Hva blir ω ~~etter~~ landingen?

Løsning: Kan ikke bruke energibevarelse (uelastisk støt)

Kan ikke bruke impulsbevarelse (det virker ytre kraft $\vec{F}$ fra akslingen på karusellen i støtøyeblikket)

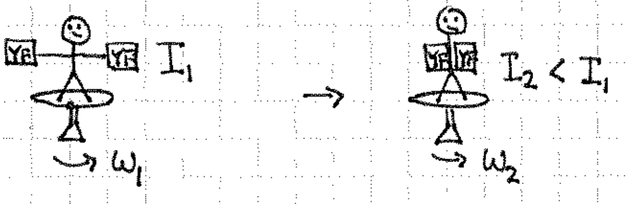
Kan bruke dreieimpulsbevarelse mhp referanse $\vec{r}_0$ i akslingen, for da ~~har~~ $\vec{\tau}_{ytre} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ ingen z-komponent, og L_z er bevart for systemet "du og karusellen".

Før støt: $L_z^i = I_0 \omega_0 + m \rho v$ Etter: $L_z^f = I \omega$; $I = I_0 + m\rho^2$

$$\Rightarrow \omega = \frac{I_0 \omega_0 + m\rho v}{I_0 + m\rho^2} = \underline{\omega_0 \, \frac{I_0 + m\rho v/\omega_0}{I_0 + m\rho^2}}$$

Ser at $\omega > \omega_0$ hvis $m\rho v/\omega_0 > m\rho^2$, dvs $v > \rho\omega_0$, OK! Da har du større hastighet enn landingsstedet og karusellen gis en dytt mot klokka!

Eks 3: Piruett. Demo med foreleser, kontorstol og 2 stk YF



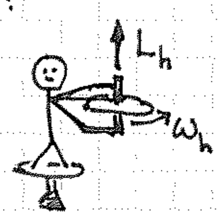
$\vec{\tau}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$

$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

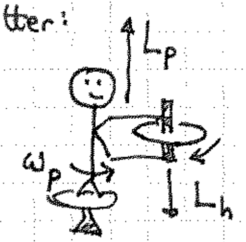
$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1$

Eks 4: Sykkelhjul og stol. Demo

Før:



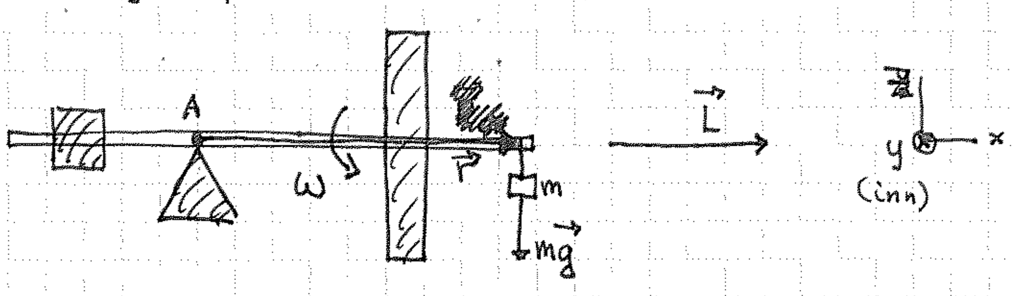
Etter:



$\Delta\vec{L} = 0$

$\Rightarrow L_p = 2L_h$

Eks 5: Gyroskop (Kvalitativt først)



Før m henges på er stang w/roterende skive i likevekt, $\vec{L} = L_i\,\hat{x}$

Ekstra tyngde $m\vec{g}$ i avstand $\vec{r}$ fra A

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = mrg\,\hat{y}$

$\Rightarrow \Delta\vec{L} \sim \hat{y} \Rightarrow$ rotasjon mot klokka (sett ovenfra), presesjon om z-aksen

Større tyngde $M\vec{g}$ gir raskere presesjon, samt "vipping" opp og ned, nutasjon.

Hit 02.11.11