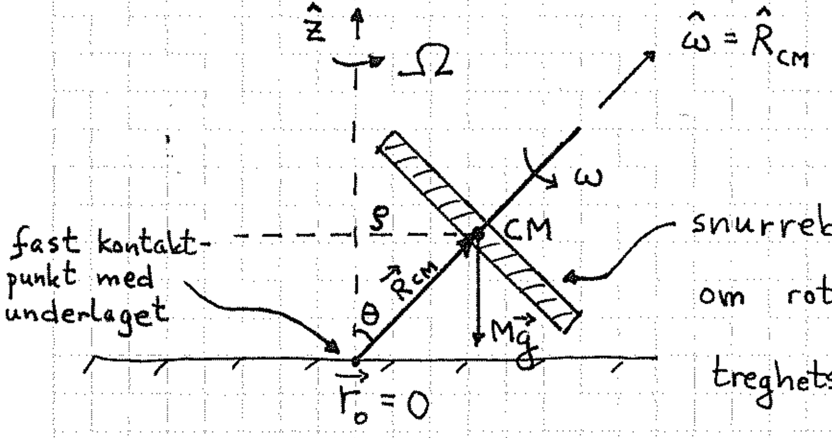
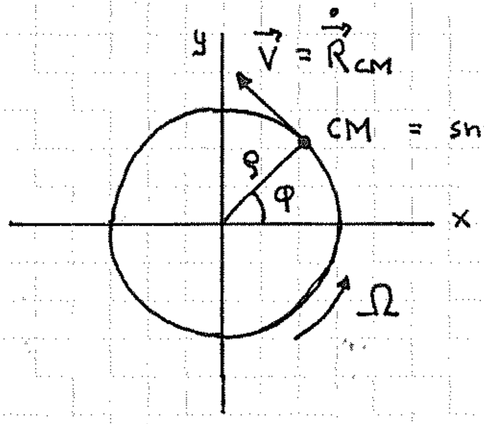
Presesjon med snurrebass



snurrebass med sylindersymmetri om rotasjonsaksen $\hat{\omega}$; treghetsmoment I_0 mhp $\hat{\omega}$-aksen

- Rask rotasjon ("spinn") om $\hat{\omega}$-aksen, vinkelhastighet ω
- Langsom rotasjon av CM ("presesjon") om $\hat{z}$-aksen, vinkelhastighet $\Omega = d\varphi/dt$:



CM = snurrebassens tyngdepunkt

$$\rho = R_{CM} \sin\theta$$
$$V = \Omega\rho$$

For gitt M, R_{CM}, I_0 og ω, <u>hva blir Ω</u>?

Total dreieimpuls (mhp $\vec{r}_0 = 0$):

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0\vec{\omega}$$

Bevegelsesligning (N2 for rotasjon):

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$$

med dreiemoment (også mhp $\vec{r}_0 = 0$)

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg \sin(\pi - \theta)\,\hat{\varphi}$$
$$= \hat{\varphi}\, R_{CM} Mg \sin\theta$$

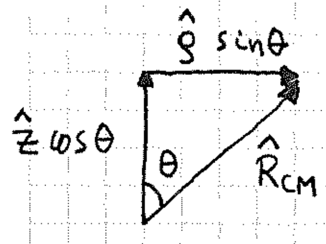
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ M\vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0\,\vec{\omega} \right\}$$

$$= M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}} + I_0\,\omega\,\dot{\hat{\omega}}$$

(fordi $M\dot{\vec{R}}_{CM} \times \vec{V} = M\vec{V} \times \vec{V} = 0$, og $\omega = \text{konst.}$)

$$|M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}| = |M\vec{R}_{CM} \times (-\frac{V^2}{\varrho}\hat{\varrho})|$$

$$= MR_{CM} \cdot \frac{(\Omega\varrho)^2}{\varrho} \cdot |\hat{R}_{CM} \times (-\hat{\varrho})|$$



$$\hat{R}_{CM} \times (-\hat{\varrho}) = (\hat{z}\cos\theta + \hat{\varrho}\sin\theta) \times (-\hat{\varrho})$$

$$= -\cos\theta\,\underbrace{(\hat{z} \times \hat{\varrho})}_{=\hat{\varphi}} - \sin\theta\,\underbrace{(\hat{\varrho} \times \hat{\varrho})}_{=0}$$

$$\Rightarrow |M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}| = MR_{CM}\,\Omega^2\varrho\cos\theta = \underline{MR_{CM}^2\,\Omega^2\sin\theta\cos\theta}$$

$$|I_0\dot{\vec{\omega}}| = I_0\omega\,|\dot{\hat{\omega}}| = I_0\omega\,|\dot{\hat{R}}_{CM}| = I_0\omega\,\frac{1}{R_{CM}}\,|\dot{\vec{R}}_{CM}|$$

$$= I_0\omega\,R_{CM}^{-1} \cdot V = I_0\omega\,R_{CM}^{-1} \cdot \Omega R_{CM}\sin\theta$$

$$= \underline{I_0\,\omega\,\Omega\,\sin\theta}$$

Hvis $\omega \gg \Omega$, og I_0 er av samme størrelsesorden som MR_{CM}^2 ("$I_0 \sim MR_{CM}^2$"), så ser vi at

$$|I_0\dot{\vec{\omega}}| \gg |M\vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}|$$

Dvs: $\vec{\tau} \approx I_0\,\dot{\vec{\omega}}$

som betyr at dynamikken i problemet domineres av snurrebassens <u>spinn</u> ($I_0\vec{\omega}$), mens <u>banedreieimpulsen</u> ($M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}$) kun utgjør et lite bidrag til den totale $\vec{L}$

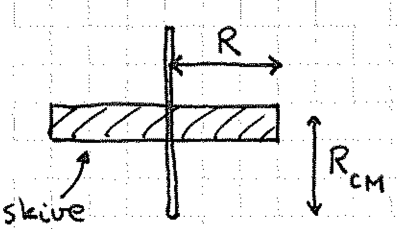
Nå kan vi bestemme Ω:

$$|\vec{\tau}| \approx |I_0 \dot{\vec{\omega}}|$$

$$\Rightarrow \quad M g R_{CM} \sin\theta \approx I_0 \, \omega \, \Omega \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Omega \approx M g R_{CM} / I_0 \omega}}$$

Vi antok $\omega \gg \Omega$, som nå innebærer $\omega \gg M g R_{CM} / I_0 \omega$, dvs $\omega^2 \gg M g R_{CM} / I_0$. Antar vi nå at vi har en "lubben" snurrebass, med $I_0 \approx M R_{CM}^2$, får vi det enkle overslaget $\omega \gg \sqrt{g / R_{CM}}$.



$$I_0 = \tfrac{1}{2} M R^2 \gtrsim \tfrac{1}{2} M R_{CM}^2 \quad \Rightarrow \quad I_0 \approx M R_{CM}^2$$

Ex: Leketøy, $R_{CM} = 5\,\text{cm} \Rightarrow \omega \gg \sqrt{10/0.05} \approx 14\,\text{s}^{-1}$, inket problem!

Da blir $\Omega \approx g / \omega R_{CM} \approx 200/\omega$, som med $\omega = 20\pi\ \text{s}^{-1}$ (dvs $T_\omega = 0.1\,\text{s}$) gir $\Omega = 10/\pi \approx \pi$, dvs en presesjons periode $T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 2\,\text{s}$. Rimelig !?

Ex: Sykkelhjul, kvalifiserte gjetninger!

$T_\omega \sim 1/5\ \text{s}$; $R_{CM} \sim 1/5\ \text{m}$; $M \sim 4\ \text{kg}$; $R \sim 1/4\ \text{m}$, $g \simeq 10\ \text{m/s}^2$

$$\Rightarrow T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi I_0 \omega}{M g R_{CM}} = \frac{2\pi M R^2 \, 2\pi / T_\omega}{M g R_{CM}} \sim \frac{4\pi^2 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot 5}{10 \cdot 1/5}$$

$$= \frac{5\pi^2}{8} \approx \frac{48}{8} = \underline{6\,\text{s}}. \quad \text{Rimelig!}$$

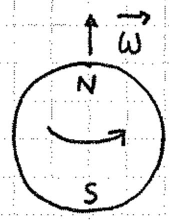
(For flere detaljer: TFY 4345 Klassisk mekanikk)

Roterende koordinatsystem

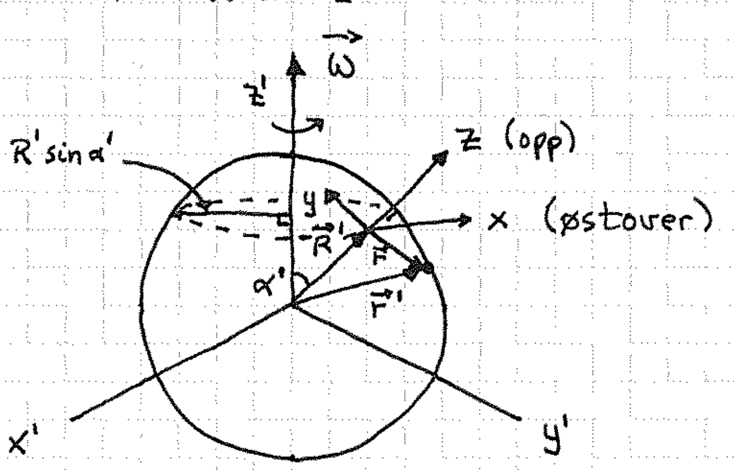
Til nå: Koord. system i ro, dvs inertialsystem, $S' = (x', y', z')$

Nå: Koord. system som roterer med $\vec{\omega}$ = konst., $S = (x, y, z)$

Eks: Jorda, $\vec{\omega} = \dfrac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \hat{z}'$



[Ser bort fra $\vec{L}_{CM}$ pga banebevegelsen rundt sola]



$\vec{R}'$ = origo i S

$\vec{r}'$ = legemets posisjon målt i S'

$\vec{r}$ = ——— " ——— S

$\vec{r}' = \vec{R}' + \vec{r}$

(som alle avhenger av tiden t)

Ser på $\vec{A}$ = en eller annen fysisk vektorstørrelse som kan måles i både S (som <u>roterer</u> med jorda) og S' (som ligger <u>fast</u>); f.eks. posisjon, hastighet etc.

$\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'}$ = endring i $\vec{A}$ pr tidsenhet, målt i S'

$\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}$ = ——— " ——— S

Siden S roterer med vinkelhastighet $\vec{\omega}$ i S', har vi

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}}$$

Bevises ikke, men "sannsynliggjøres" i et eksempel.

Eks: $\vec{A}$ = Trondheims posisjon.

Velger origo i S i Trondheim $\Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{R}\,'$

og $\vec{r} = 0$ = konstant.

Dermed: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = 0$, og $\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

Fra figur s. 85: $\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{R}' = \omega R' \sin\alpha' \cdot \hat{\varphi}'$

OK: $(d\vec{r}\,'/dt)_{S'}$ er Trondheims hastighet målt i S', som stemmer med høyre side av ligningen, da $\omega \cdot R' \sin\alpha'$ nettopp er banehastigheten for uniform sirkelbevegelse med radius $R' \sin\alpha'$ og vinkelhastighet ω. Her er retningen $\hat{\varphi}' = \hat{x}$, dvs østover.

Mål: Å finne sammenhengen mellom kraften $\vec{F}'$ som virker på legemet i S' og kraften $\vec{F}$ som virker på legemet i S. I følge Newton (N2) er dette det samme som å finne sammenhengen mellom akselerasjonene i S' og S.

Strategi: Bruk ligningen nederst s. 85, først med $\vec{A} = \vec{r}\,'$ = legemets posisjon målt i S', og dernest med $\vec{A} = \vec{v}\,' = d\vec{r}\,'/dt$ = legemets hastighet målt i S'.

- $\vec{A} = \vec{r}\,' : \quad \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{s'}}_{= \vec{v}\,' = \text{legemets hastighet målt i } S'} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}$

$$\vec{u} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_s = \text{legemets hastighet målt i } S$$

[$\vec{R}\,'$ ligger fast i S ($\vec{R}\,'$ = origo i S)
$\Rightarrow (d\vec{R}\,'/dt)_s = 0$]

- $\vec{A} = \vec{v}\,' = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{s'}$:

$$\underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{s'}}_{\text{legemets akselerasjon målt i } S'} = \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{s'} + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{s'}\right)_s$$

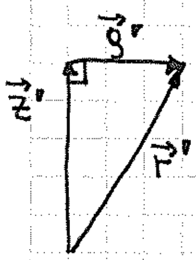
$$= \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}\right] + \left(\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}\right]\right)_s$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_s}_{= \vec{u}} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{u} + \dot{\vec{u}}$$

Vektoridentitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
(se s. 78)

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \vec{\omega}\,(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,') - \vec{r}\,'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$



$$= \vec{\omega}\left(\omega\hat{z}' \cdot (z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\right) - (z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\,\omega^2$$

$$= \underbrace{\vec{\omega}\,\omega z' - z'\hat{z}'\,\omega^2}_{=0} - \vec{\rho}\,'\omega^2$$

$$= -\omega^2\vec{\rho}\,'$$

N2 i S' : $\vec{F}\,' = m\left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{s'}$

N2 i S : $\vec{F} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_s = m\dot{\vec{u}}$

Dermed:

$$\vec{F}' = m\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)_{S'} = -m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\,\vec{\omega}\times\vec{u} + \underbrace{m\dot{\vec{u}}}_{=\vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}' + m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}}$$

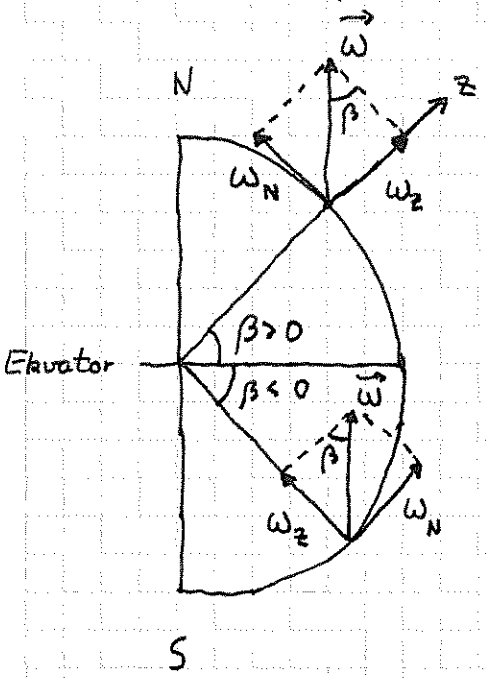
$m\omega^2\vec{\rho}'$ = sentrifugalkraften; retning normalt på og bort fra rotasjonsaksen

$2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$ = Corioliskraften; retning normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{\omega}$, virker kun på legemer i bevegelse i S ($\vec{u}\neq 0$)

Hit 07.11.11

09.11.11

Corioliskraften



- $\vec{F}_c = 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$
- $\vec{\omega} = \omega_z\hat{z} + \omega_N\hat{N}$
- Anta hastighet horisontalt, $\vec{u} = \vec{u}_h$
- Mest interessert i virkningen av $\vec{F}_c$ horisontalt. (Vertikalt domineres bevegelsen av tyngdekraften.)

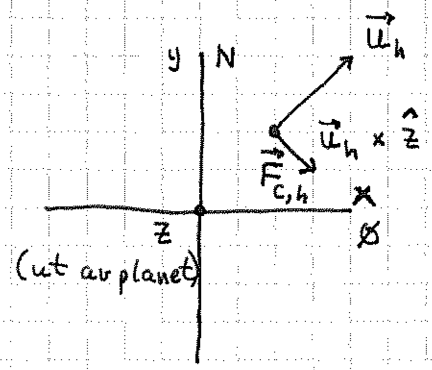
$\Rightarrow$ ser på

$$\vec{F}_{c,h} = 2m\left(\vec{u}_h\times\vec{\omega}\right)_h$$

Med horisontal $\vec{u}_h$ vil bare $\omega_z \hat{z}$ bidra til $\vec{F}_{c,h}$:

$$\vec{F}_{c,h} = 2m\,\omega_z\, \vec{u}_h \times \hat{z}$$

På nordlige halvkule:

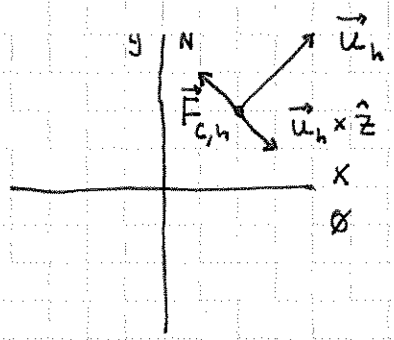


$\omega_z > 0$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{c,h}$ <u>samme</u> retning som $\vec{u}_h \times \hat{z}$

$\Rightarrow$ avbøyning mot <u>høyre</u>

På sørlige halvkule:

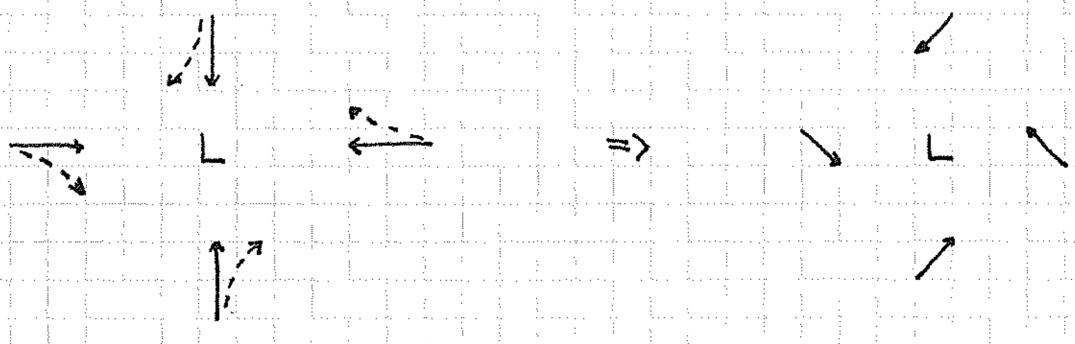


$\omega_z < 0$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{c,h}$ <u>motsatt</u> retning av $\vec{u}_h \times \hat{z}$

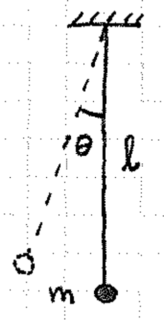
$\Rightarrow$ avbøyning mot <u>venstre</u>

Eks: Værkart med lavtrykk (nordlige halvkule)



Luft strømmer fra steder med høyt trykk til steder med lavt trykk, og dermed inn mot et lavtrykkssenter (L). $\vec{F}_{c,h}$ gir avbøyning mot høyre, og dermed strømning mot klokka rundt L.

Foucaultpendelen



Pendel i Realfagbygget:

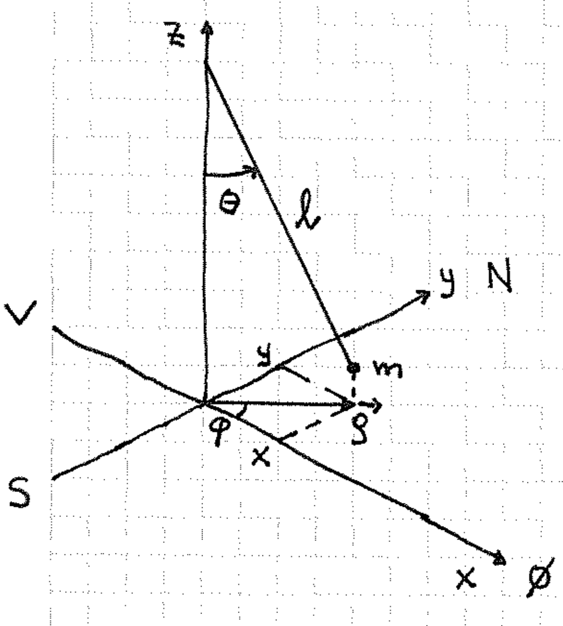
$\ell = 25\,\text{m}, \quad T = 10\,\text{s}$

Max utsving fra likevekt: ca 1 m

$\Rightarrow \theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ hele tiden

Pendelen henger i et roterende koordinatsystem (Jorda!) på breddegrad $\beta = 63.5°$. "Rask" svingning fram og tilbake styres av tyngdekraftens komponent tangentielt til pendelkulas sirkelbane. Vi analyserer dette først.

I tillegg får pendelkula en liten avbøyning mot høyre pga Corioliskraften $2m\vec{u}\times\vec{\omega}$. Kulas hastighet er nesten helt horisontal, $\vec{u} = \vec{u}_h = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$, og vi kan bruke $\vec{F}_{c,h}$ som øverst s. 89.

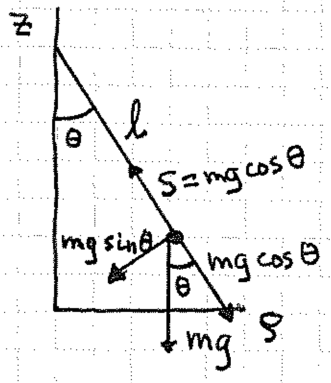


$$\vec{\rho} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

$$\rho = \ell\sin\theta \approx \ell\theta$$

$$x = \rho\cos\varphi \approx \ell\theta\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi \approx \ell\theta\sin\varphi$$



N2 ∥ sirkelbanen: $-mg\underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta} = ma = -m\ell\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

(Fortegn: $\theta > 0$ i figuren)

$$x = \underbrace{(\ell\cos\varphi)}_{\text{konst.}}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = (\ell\cos\varphi)\,\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow$ samme ligning for x som for θ: $\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$

$$y = \underbrace{(\ell\sin\varphi)}_{\text{konst.}}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = (\ell\sin\varphi)\,\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow$ samme ligning for y som for θ: $\ddot{y} + \frac{g}{\ell}y = 0$

Generell løsning: $x(t) = A\sin\Omega_0 t + B\cos\Omega_0 t$; $\Omega_0^2 = g/\ell$

og tilsvarende for $y(t)$. [Kjent fra R2 på VGS!]

<u>Corioliskraften</u> gir et lite ekstra bidrag til disse ligningene:

$$\vec{u}_h \times \hat{z} = (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \times \hat{z} = -\dot{x}\hat{y} + \dot{y}\hat{x}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{c,h} = 2m\omega_z(\dot{y}\hat{x} - \dot{x}\hat{y})$ der $\omega_z = \omega\sin\beta$ (se figur s. 88)

$\Rightarrow$ Total kraft i x-retning (vel: vi neglisjerer sentrifugalkraften!):

$F_x = S_x + F_{c,hx}$ ($\vec{S}$ = snordraget)

$$= -mg\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}\cdot\underbrace{\underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta}\cdot\cos\varphi}_{=x/\ell} + 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{y}$$

$$= -mgx/\ell + 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{y}$$

Total kraft i y-retning:

$F_y = S_y + F_{c,hy}$

$$= -mg\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}\cdot\underbrace{\sin\theta\cdot\sin\varphi}_{\approx\theta\cdot\sin\varphi = y/\ell} - 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{x}$$

$$= -mgy/\ell - 2m\omega\sin\beta\cdot\dot{x}$$

Innfører $\varepsilon \equiv \omega\sin\beta \Rightarrow$

$$F_x = -mgx/\ell + 2m\varepsilon\dot{y}$$
$$F_y = -mgy/\ell - 2m\varepsilon\dot{x}$$

N2 i x- og y-retning gir da

$$-mgx/\ell + 2m\varepsilon\dot{y} = m\ddot{x}$$
$$-mgy/\ell - 2m\varepsilon\dot{x} = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} - 2\varepsilon\dot{y} + \Omega_0^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{x} + \Omega_0^2 y = 0$$

La oss se på tallverdier:

$$\Omega_0 = \sqrt{g/\ell} = \sqrt{9.81/25} \approx 0.63 \ s^{-1}$$

$$\varepsilon = \omega \cdot \sin\beta = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot \sin 63.5^\circ \approx 6.5 \cdot 10^{-5} \ s^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \ll \Omega_0 \qquad [\varepsilon/\Omega_0 \approx 10^{-4}]$$

Løsningen av de to koblede diff-ligningene er da, når vi velger initialbetingelsene $x(0) = y(0) = 0$ og $\vec{u}(0) = V\hat{x}$:

$$x(t) = \frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cdot \cos\varepsilon t$$
$$y(t) = -\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cdot \sin\varepsilon t$$

faktoren $\sin\Omega_0 t$:

pendelens "raske" svingning fram og tilbake, periode

$T = 2\pi/\Omega_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 10\,s$

faktoren $\cos\varepsilon t = \cos(\omega(\sin\beta)\cdot t)$, evt. $\sin\varepsilon t$:

en langsom dreining av pendelens svingeretning, forårsaket av Corioliskraften $2m\vec{u}\times\vec{\omega}$, retning med klokka på nordlige halvkule (mot klokka på sørlige halvkule),

periode $T_F = 2\pi/\varepsilon = 2\pi/\omega\sin\beta = 1\text{ døgn}/\sin\beta \underset{\beta=63.5^\circ}{\overset{\text{i Trondheim}}{=}} \approx 26.8\,h$

$\Rightarrow$ det tar ca 13.4 timer for pendelen å velte alle pendelpinnene i U3

Kommentar til koblede ligninger og løsning s. 92:

Oppgitt løsning $x(t)$ og $y(t)$ er <u>ikke eksakt</u> løsning av de to koblede diff-ligningene, men en <u>god tilnærmelse</u> når $\varepsilon \ll \Omega_0$. La oss sette inn og se! Må regne ut $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ og $\ddot{y}$:

$$\dot{x} = V \cos\Omega_0 t \cos\varepsilon t - \frac{V\varepsilon}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t$$
$$\dot{y} = -V \cos\Omega_0 t \sin\varepsilon t - \frac{V\varepsilon}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t$$
$$\ddot{x} = -V\Omega_0 \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t - 2V\varepsilon \cos\Omega_0 t \sin\varepsilon t - \frac{V\varepsilon^2}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t$$
$$\ddot{y} = V\Omega_0 \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t - 2V\varepsilon \cos\Omega_0 t \cos\varepsilon t + \frac{V\varepsilon^2}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \sin\varepsilon t$$

Innsetting av disse uttrykkene i de to diff-ligningene resulterer i at alle ledd som <u>ikke</u> inneholder ε (i faktoren <u>foran</u> produktet av de to trigonometriske funksjonene) adderer seg til null, og at alle ledd som inneholder ε^1 også adderer seg til null.
Med andre ord: $x(t)$ og $y(t)$ er løsninger "til orden ε", eller "til lineær orden i ε", eller "til $\mathcal{O}(\varepsilon)$", som man også kan skrive dette. Dette er godt nok for oss! Ledd som inneholder ε^2 er <u>mye mindre</u> enn leddene som er proporsjonale med ε^0 og ε^1, dersom $\varepsilon \ll \Omega_0$.
Konkret er det slik at ligningen $\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{y} + \Omega_0^2 x = 0$ inneholder <u>to</u> ledd som er proporsjonale med ε^2, slik at venstre side blir

$$\varepsilon^2 \cdot \left\{ -\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t + 2\frac{V}{\Omega_0} \sin\Omega_0 t \cos\varepsilon t \right\} \neq 0,$$

så vi ser at "til orden ε^2" er $x(t)$ og $y(t)$ <u>ikke</u> løsninger.
Men, som sagt, denne lille feilen bryr vi oss ikke om.

I Matlab-programmet foucault_anim.m illustreres dreiningen av svingeretningen ved at pendelkulas posisjon, ved max utsving, merkes av ca hver halve time, over et tidsrom på 13.5 timer, som er litt mer enn en halv periode $T_F/2$ (se nederst s. 92).

Hit 09.11.11