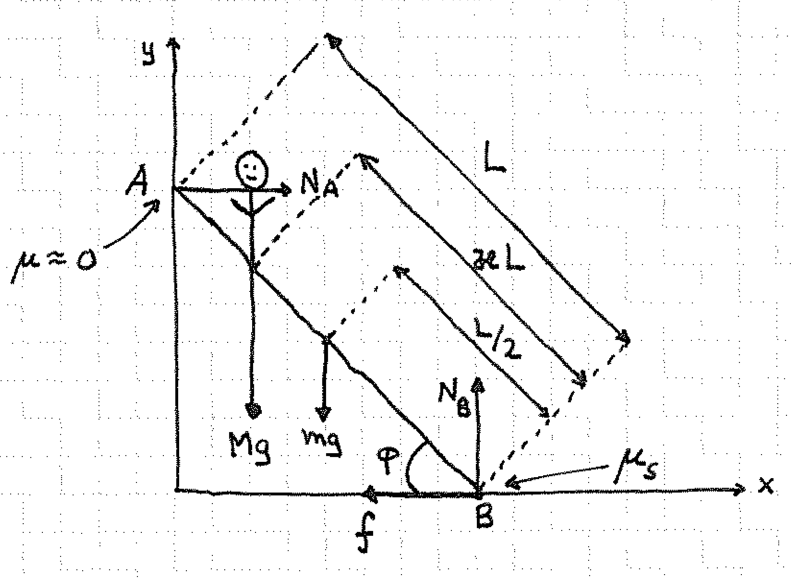
Statisk likevekt [YF 11.1–11.3, LL 7.1]

Når et legeme er i statisk likevekt, er

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (\text{sum av ytrekrefter} = 0)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \qquad (\text{sum av ytre dreiemoment} = 0, \text{ mhp ethvert referansepunkt } \vec{r}_0)$$

Eks 1: Person i stige



Aktuelle spørsmål:

- Minimal φ uten at stigen glir?
- Maksimal $\varkappa$ uten at stigen glir? ($\varkappa$ = "kappa")

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = (m+M)g \qquad (2)$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\varphi + Mg\,\varkappa L\cos\varphi - N_A L\sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

Dessuten: $f_{max} = \mu_s N_B$ (4)

Fra (3): $N_A = (m/2 + \varkappa M)g/\tan\varphi$

Kombinert med (1), (2) og (4): $\underline{m/2 + \varkappa M \le \mu_s (m+M)\tan\varphi}$

Dermed: $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{m/2 + \varkappa M}{(m+M)\mu_s}\right\}$

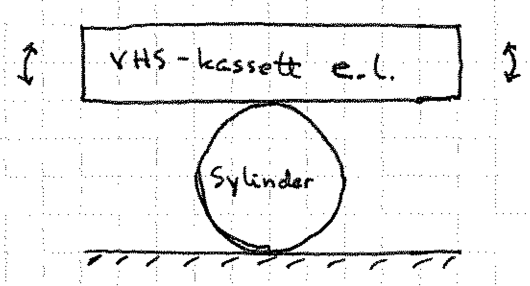
$$\varkappa_{max} = \frac{m+M}{M}\mu_s \tan\varphi - \frac{m}{2M}$$

Eksempel, tallverdier: $M = 70$ kg, $m = 5$ kg, $\mu_s = 0.3$

- Hvis $\mathcal{H} = 3/4$: $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{5/2 + 70 \cdot 3/4}{75 \cdot 3/10}\right\} \approx 68°$
- Hvis $\varphi = 45°$: $\mathcal{H}_{max} = \frac{75}{70} \cdot \frac{3}{10} \cdot 1 - \frac{5}{140} \approx 0.29$

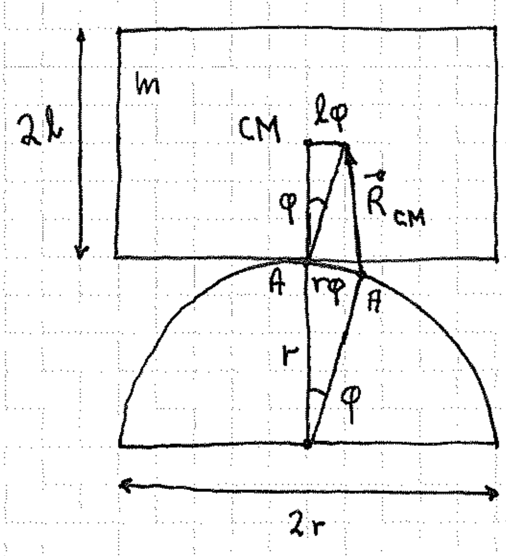
Kommentar: Hvis $\mu_s > 0$ mellom vegg og stige, (og det er den jo!) blir problemet ubestemt. Ekstra ligning $\Sigma \tau_A = 0$ gir intet nytt (prøv selv!), så vi har da 4 ukjente (f_A, f_B, N_A, N_B) men bare 3 ligninger. Må betrakte stigen som "ikke-perfekt" stivt legeme (dvs elastisk) for å komme i mål.

Eks 2: Balansering på sylinder



Stabil eller ustabil likevekt?

Kort argument:



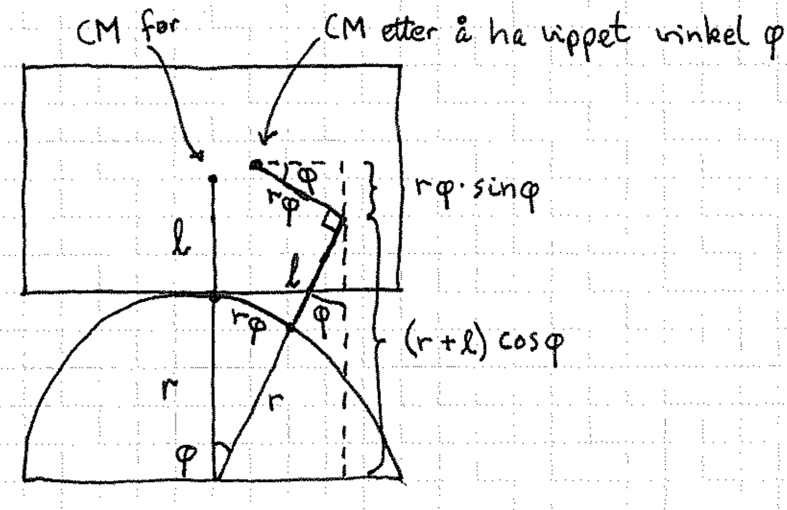
Når kassetten vippes en (liten) vinkel φ, flyttes CM (ca) horisontalt $l\varphi$, mens kontaktpunktet A flyttes (ca) horisontalt $r\varphi$.

Stabil likevekt hvis $l\varphi < r\varphi$, dvs $l < r$, fordi dreiemomentet

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times m\vec{g}$$

da gir rotasjon tilbake mot likevekt.

Alternativ løsning med energibetraktninger:



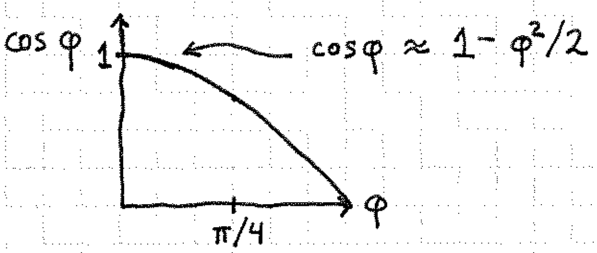
CM før: $h_i = r + \ell$

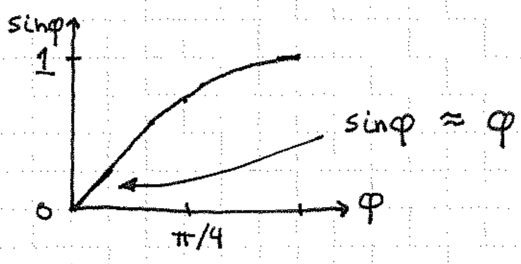
CM etter: $h_f = (r+\ell)\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi = h(\varphi)$

$\Rightarrow$ Kassettens potensielle energi: (Velger $U=0$ ved $\varphi=0$.)

$$U(\varphi) = mgh_f - mgh_i = mg\{(r+\ell)(\cos\varphi - 1) + r\varphi\sin\varphi\}$$

For små vinkler φ (dvs $\varphi \ll 1$):

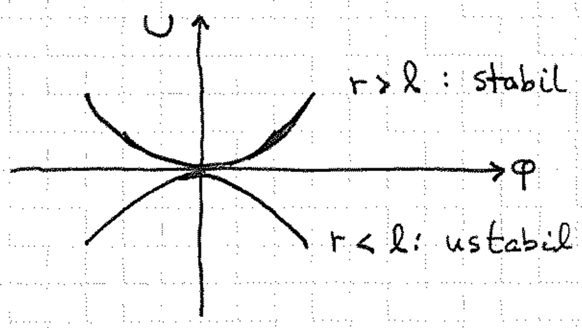




[Jf Taylorrekker; se også Rottmann.]

$$\Rightarrow U(\varphi) \approx mg\{(r+\ell)(-\varphi^2/2) + r\varphi\cdot\varphi\} = mg\varphi^2\left\{-\frac{r}{2} - \frac{\ell}{2} + r\right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}mg(r-\ell)\varphi^2}$$



Hvis $r > \ell$, vil kassetten vippe fram og tilbake omkring likevekt $\varphi = 0$. Vi har en harmonisk oscillator!

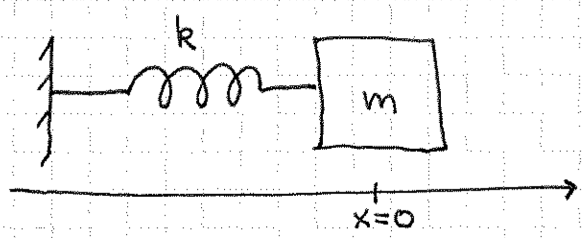
Svingninger [YF 14, LL 9]

Svingninger = Oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring en likevektsposisjon

[Kommentar: Bølger er svingninger som forplanter seg i rommet. FY1002 TFY4160]

Eksempler: Pendel (klokke, huske,...); Gitarstreng; Tidevann; Avstanden mellom jorda og sola; Vibrerende atomer i molekyler og faste stoffer; ......

Enkel harmonisk svingning [YF 14.2, LL 9.1-9.3] [Kjent fra R2, VGS]



(likevekt; F=0)

$\vec{F} = -kx\,\hat{x}$ (Hookes lov)

x = utsving fra likevekt

k = fjærkonstant

(se s. 38)

N2 horisontalt (anta friksjonsfritt underlag, evt $mg \ll kx$)

$$-kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Innfører $\omega^2 = k/m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ 1D harmonisk oscillator

Ser at både $\sin\omega t$ og $\cos\omega t$ er løsning:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\omega t) = -\omega^2 \sin\omega t \; ; \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t) = -\omega^2\cos\omega t$$

$\Rightarrow$ Generell løsning er: $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$

evt. $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

[Identiske hvis $B = A\cos\varphi$ og $C = -A\sin\varphi$, sjekk selv!]

Størrelser og begreper:

A = amplituden = max utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet $\quad [\omega] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega$ = perioden = tid pr svingning $\quad [T] = s$

$f = 1/T$ = frekvensen = antall svingninger pr tidsenhet $\quad [f] = Hz$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

Hit 14.11.11

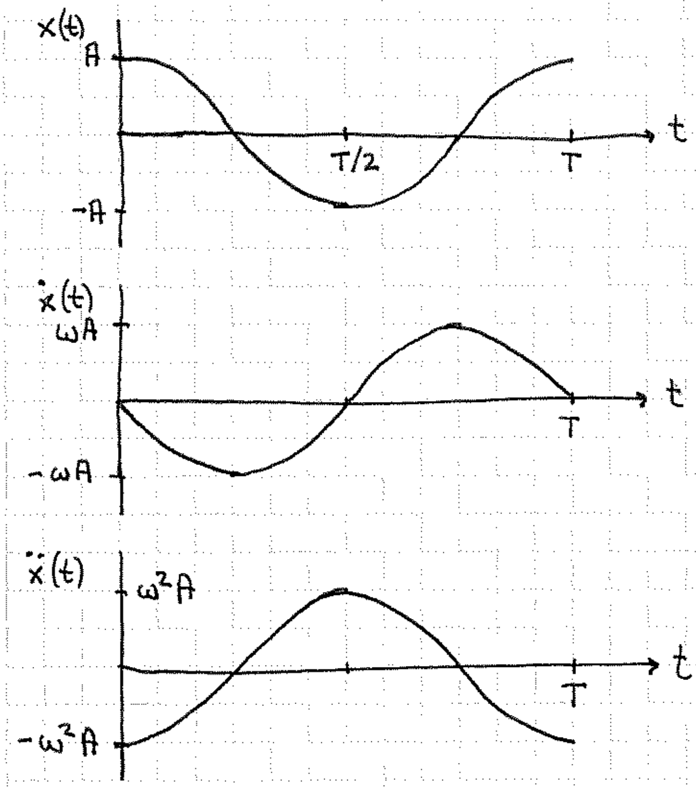
φ = fasekonstanten $\quad [\varphi] = 1$

16.11.11

Fra $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ finner vi lett $\dot{x}(t)$ og $\ddot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Grafisk, med valget $\varphi = 0$:



$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$\Rightarrow \dot{x}(t)$ <u>faseforskjøvet</u> $\pi/2$ i forhold til $x(t)$

$\ddot{x}(t) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

$\Rightarrow \ddot{x}$ faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til $\dot{x}$ og π i forhold til x

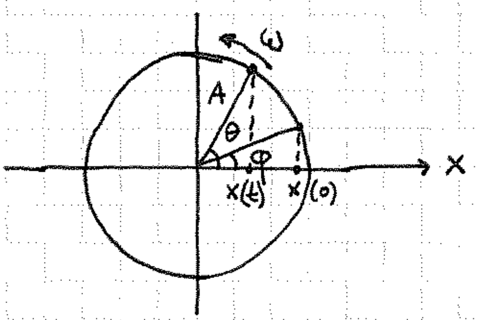
Kjennskap til to <u>initialbetingelser</u>, f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$, fastlegger A og φ:

$$x(0) = A\cos\varphi \,, \quad \dot{x}(0) = -\omega A \sin\varphi \Rightarrow \dot{x}(0)/\omega = -A\sin\varphi$$

$$\Rightarrow x(0)^2 + \dot{x}(0)^2/\omega^2 = A^2 \quad \Rightarrow A = \sqrt{x(0)^2 + \dot{x}(0)^2/\omega^2}$$

og $$\tan\varphi = -\frac{\dot{x}(0)/\omega}{x(0)} \quad \Rightarrow \varphi = -\arctan\left\{\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right\}$$

Vi kan <u>assosiere</u> 1D harm. osc. med <u>sirkelbevegelse</u>:



$\theta(t) = \omega t + \varphi$ = fasen

A = amplituden

$$x(t) = A\cos\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

<u>Energibetraktninger [YF 14.3, LL 9.4]</u>

(se også s. 38)

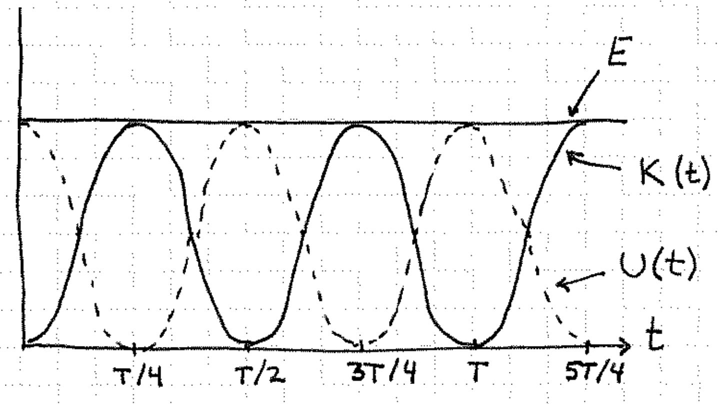
$$K(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{=k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\left[\text{Husk: } U = -\int_0^x \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_0^x (-kx)\cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 ; \quad \text{se s. 38}\right]$$

Total energi: $$E = K + U = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \text{konst.}$$

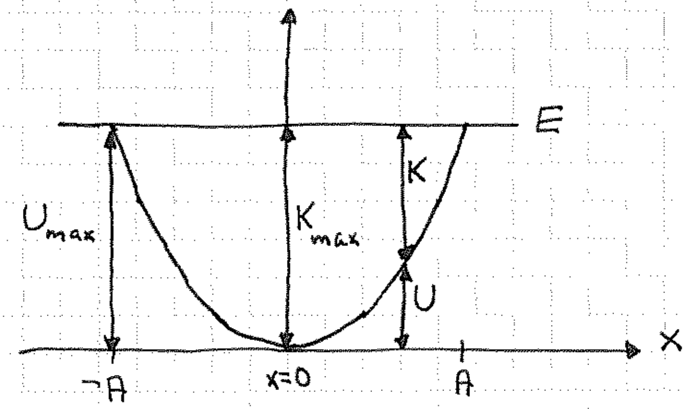
Vi har et <u>konservativt system</u>, og energien E er <u>bevart</u>.
(se s 31 - 39)



Energien "pendler" mellom kinetisk og potensiell.

$K_{max} = U_{max} = E$

$K_{min} = U_{min} = 0$



$$\vec{F} = -\nabla U = -\hat{x}\,\frac{dU}{dx}$$

$$= -\hat{x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx\,\hat{x}\,; \text{ ok!}$$

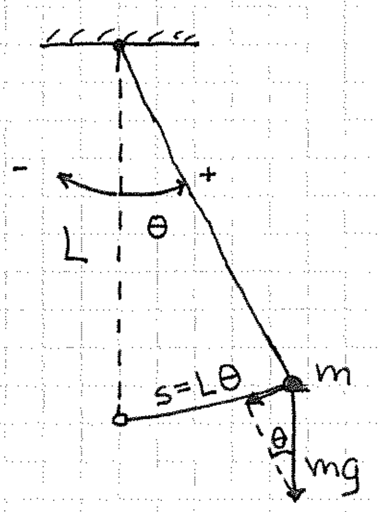
Kjennetegn for harm. osc:

- F prop. med utsving fra likevekt $(F = -kx = -m\omega^2 x)$
- U prop. med kvadratet av utsvinget $(U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2)$
- Bevegelseslikning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel, temperatur, trykk osv.

Vi ser på et par eksempler!

Eks 1: Matematisk pendel (jf. Foucault-pendelen)

[YF 14.5, LL 9.6]



Tyngdens komponent langs sirkelbuen:

$$-mg \sin\theta$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad -mg\sin\theta = m\ddot{s} = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Dette er lign. for harm. osc., med $\omega = \sqrt{g/L}$, $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Løsning: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$; θ_0 = amplitude

Demo med $L = 1$ m gir $T \approx 2$s, som stemmer bra med $2\pi\sqrt{1/9.8} \approx 2$s.

Vi ser at vi alternativt kunne ha brukt N2 for rotasjon (om festepunktet i taket):

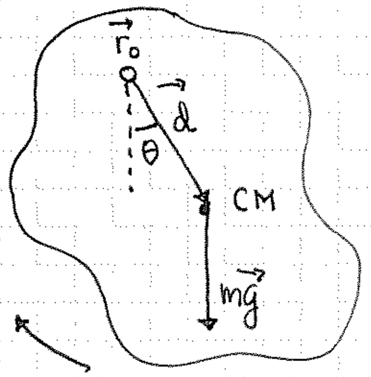
$\tau = I\alpha = I\ddot{\theta}$, med $I = mL^2$ og

$\vec{\tau} = \vec{L} \times m\vec{g}$; $\tau = -L \cdot mg \cdot \sin\theta \approx -L \cdot mg \cdot \theta$

(Fortegn: $\theta > 0 \Rightarrow \tau$ som gir rotasjon/svingning med klokka)

Eks 2: Fysisk pendel [YF 14.6, LL 9.6]

Stivt legeme, masse m, svinger om akse gjennom $\vec{r}_0$, treghetsmoment I mhp denne aksen:



$$\tau = I\ddot{\theta}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{d} \times m\vec{g}| = mgd\sin\theta$$

$$\theta > 0 \Rightarrow \tau < 0 \Rightarrow \tau = -mgd\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad -mgd\cdot\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

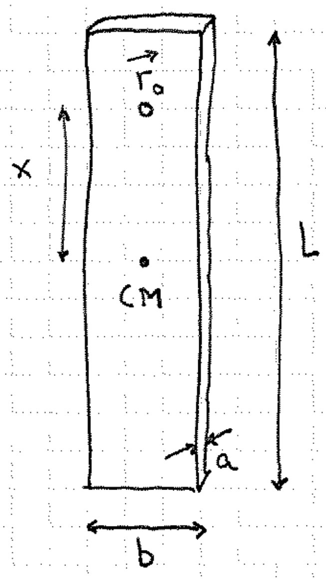
$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega = \sqrt{mgd/I}$$

Kontroll av resultat: Bør få matematisk pendel hvis vi lar stivt legeme $\rightarrow$ punktmasse m i CM:

$$I = m\cdot d^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/d}, \quad \text{OK!}$$

Eks 3: Svingende trefjøl



$L = 942$ mm, $b = 53$ mm, $a = 8$ mm

Fjøl svinger om akse gjennom $\vec{r}_0$, i avstand x fra CM.

$$I(x) = \frac{1}{12}m(L^2 + b^2) + mx^2$$

$$T(x) = 2\pi\sqrt{(L^2/12 + b^2/12 + x^2)/gx}$$

Se øving 12, oppgave 3.

<u>Demo</u> gir $T(x = 15\text{ mm}) \approx 4$ s og $T(x = 272\text{ mm}) \approx 1.5$ s.

Hit 16.11.11