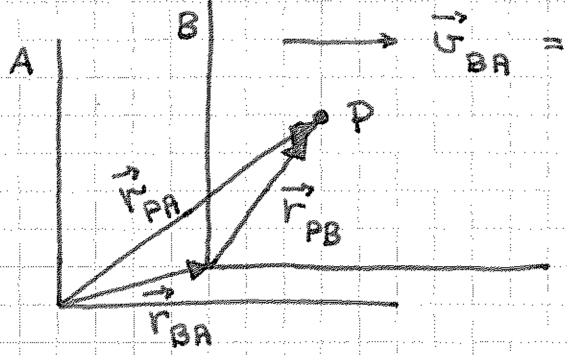
10.09.12

Inertialsystemer. Relativitetsprinsippet

[YF 3.5 + 4.2 , LL 1.9 + 2.7]



$\longrightarrow$ $\vec{v}_{BA}$ = hastighet til B målt i A

A: labsystem (i ro)

B: system i bevegelse

P: objekt

Ser at: $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$

Dermed: $\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$ og $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$

Hvis $\vec{v}_{BA}$ = konst., måles samme aks. for P i A og B,

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \qquad (\vec{a}_{BA} = 0)$$

Da er A og B inertialsystemer relativt hverandre.
N1 gjelder kun i et inertialsystem.
Hvis ytre kraft $\vec{F}$ virker på P, vil samme ligning (fysiske lov), $\vec{F} = m\vec{a}$ (med $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} = \vec{a}$), beskrive observert bevegelse til P i både A og B.

Dette er i tråd med relativitetsprinsippet:

Fysikkens lover må ha samme form i alle inertialsystemer.

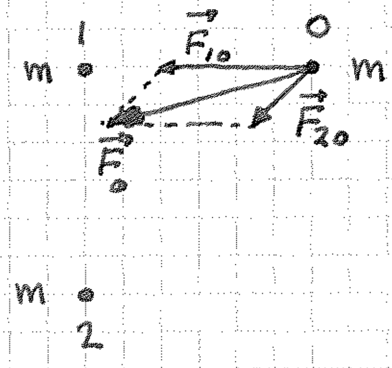
Jorda roterer, om egen akse og omkring sola.
Jordas overflate er derfor bare et tilnærmet inertialsystem.

I roterende system oppleves krefter pga rotasjonen:

sentrifugalkraft og corioliskraft

Mer om dette senere.

Superposisjonsprinsippet (SPP) [YF 4.1]

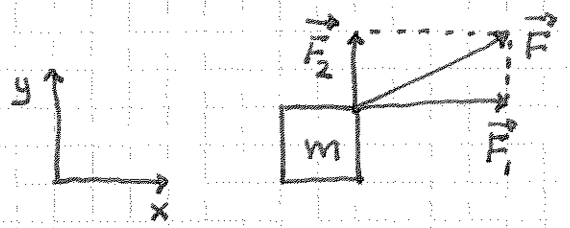


Netto kraft på masse 0 fra 1 og 2: $\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$

$\Rightarrow$ Masse 0 får akselerasjon

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{m}\vec{F}_0 = \frac{1}{m}\sum_j \vec{F}_{j0}$$

"Omvendt" kan vi dermed dekomponere:



$$\vec{a} = \vec{F}/m$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = F_1/m\,, \quad \ddot{y} = F_2/m$$

Newtons lover, anvendelser [YF 5, LL 3]

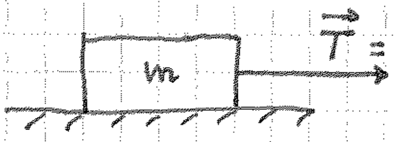
Strategi:

- Finn alle ytre krefter $\vec{F}_i$ som virker på legemet
- Tegn figur: kraftdiagram ("free body diagram")
  - legemets omgivelser representeres av krefter på legemet (tyngde $m\vec{g}$, snordrag $\vec{S}$, friksjon $\vec{f}$, normalkraft $\vec{N}$, ...)
  - tegn alle ytre krefter en gang
  - pil starter der $\vec{F}_i$ angriper
  - pilenes lengde prop. med $|\vec{F}_i|$
- Velg hensiktsmessig koord. system
- Bruk N2, $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i/m$ (evt N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$)

Friksjon [YF 5.3, LL 3.1]

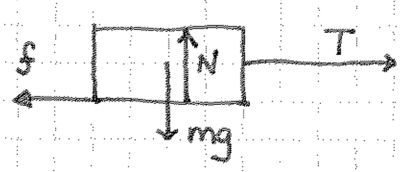
- Kontaktkrefter, rettet mot (potensiell) relativ bevegelse
- Ønsket (bremse bil) og uønsket (energitap i motor)
- Skiller gjerne mellom tørr og våt friksjon

Tørr friksjon



$\vec{T}$ = trekk-kraft

Kraft-diagram:



Statisk friksjon (kloss i ro):

N1 $\Rightarrow$ $f = T$

Empirisk: $f_{max} = \mu_s \cdot N$ (Her: $f_{max} = \mu_s \cdot mg$)

Kinetisk friksjon (kloss i bevegelse):

$$f = \mu_k \cdot N$$

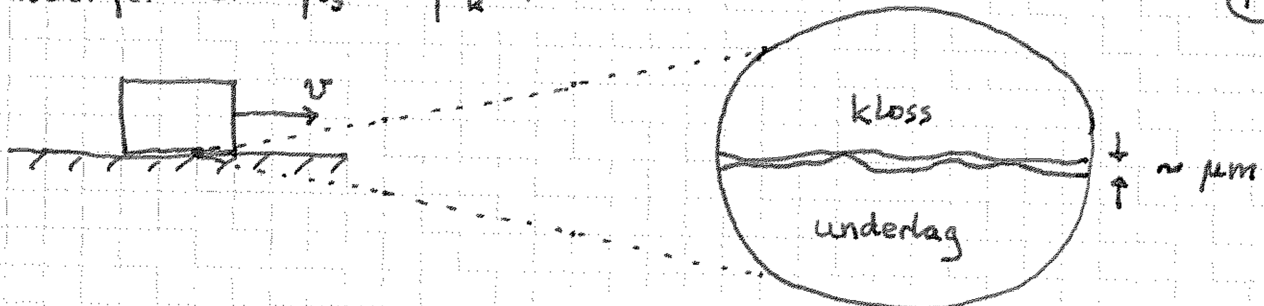
μ_k, μ_s er <u>friksjonskoeffisienter</u>

$[\mu_k] = [\mu_s] = 1$ (dim.løse)

Noen typiske tallverdier:

materialer	μ_s	μ_k
tre mot tre	0.25–0.50	0.2
gummi mot tørr asfalt	1.0	0.8
—"— våt —"—	0.30	0.25

Hvorfor er $\mu_s > \mu_k$?

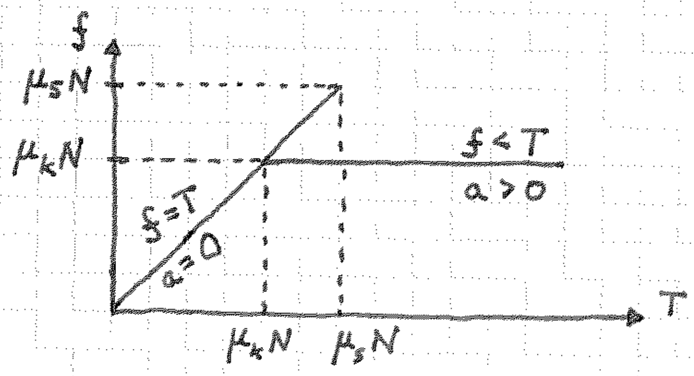


$v = 0 \Rightarrow$ godt grep mellom flatene

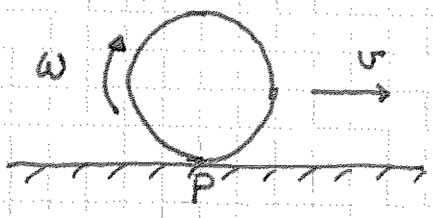
$v > 0 \Rightarrow$ tendens til å flyte oppå

$\Rightarrow \mu_s > \mu_k$

Dermed, for $f\,(T)$:



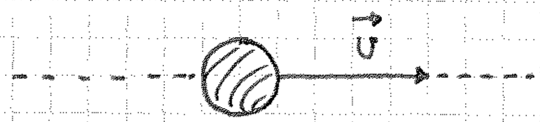
Rulling:



Ren rulling: kontaktpunkt P i ro, tilnærmet null friksjonsarbeid, $f \leq \mu_s N$

Sluring: P i bevegelse relativt underlaget, $f = \mu_k N$

Friksjon i gasser og væsker (våt friksjon) [YF 5.3]



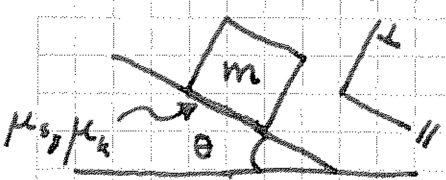
antar legeme rotasjonssymmetrisk mhp $\vec{v}$ -aksen

- Liten hastighet v:
  Pen ("laminær") strømning av fluidet rundt legemet, $\vec{f}_\ell = -k\vec{v} = -kv\hat{v}$
  (Kan utledes fra Newtons lover)

  Eks: Kule, $f_\ell = 6\pi\eta R v$, der R = kulas radius og η = fluidets viskositet

- Stor v:
  Turbulent strømning, $\vec{f}_t = -Dv^2\hat{v}$ ("drag")
  (empirisk)

Eks 1: Kloss på skråplan



- Friksjonskraft f, i ro? i bevegelse?
- Minimal μ_s for kloss i ro?
- Akselerasjon, $a_\parallel$, hvis μ_s for liten?

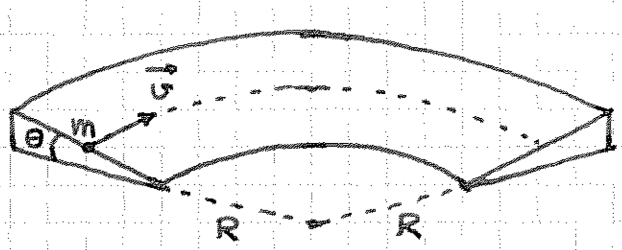
Løsning:

- I ro: $\Sigma F_\parallel = 0 \Rightarrow f = mg\sin\theta$
  I bevegelse: $f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$
- $f \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg\sin\theta / mg\cos\theta = \tan\theta$
- Hvis $\theta > \arctan\mu_s$: $a_\parallel = \Sigma F_\parallel / m = (mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta)/m$
  $= g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

Hit 10.09.12

11.09.12

Eks 2: Kjøring i dosert sving [YF 5.4, LL 3.4]



θ = doseringsvinkel

R = krumningsradius

m = bilens masse

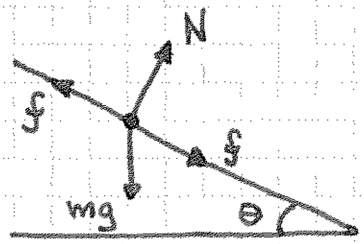
μ = statisk friksjonskoeff. (gummi / asfalt)

Oppg: Finn v_{min}, v_{max} slik at bilen ikke glir hhv inn, ut. ($\Rightarrow$ uniform sirkelbeveg.)

Finn og skisser $N(v)$ og $f(v)$.

Løsning:

Kraftdiagram:



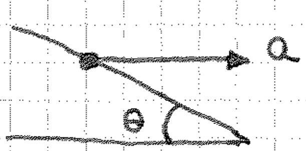
$$f_{max} = \mu N$$

Liten v $\Rightarrow$ potensiell bevegelse innover $\Rightarrow$ $\vec{f}$ utover

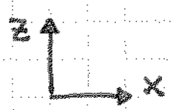
Stor v $\Rightarrow$ ———"——— utover $\Rightarrow$ $\vec{f}$ innover

Hensiktsmessig koord. system:

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse: $a = v^2/R$, med retning inn mot sirkelens sentrum



$\Rightarrow$ vi velger



(ikke

)

Bruker N2, med kjent aks. $\vec{a} = \hat{x}\, v^2/R$:

$$\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = (m v^2/R)\,\hat{x}$$

der $\vec{N} = N\sin\theta\,\hat{x} + N\cos\theta\,\hat{z}$

$\vec{f} = \pm f\cos\theta\,\hat{x} \mp f\sin\theta\,\hat{z}$ (stor / liten v)

$m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N\sin\theta \pm f\cos\theta = mv^2/R \quad (1)$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow N\cos\theta \mp f\sin\theta - mg = 0 \quad (2)$$

Med $f = f_{max} = \mu N$ gir dette v_{max} og v_{min}, med hhv øvre og nedre fortegn. Ta f.eks. (1)/(2):

$$v_{\substack{max\\min}} = \sqrt{gR\,\frac{\sin\theta \pm \mu\cos\theta}{\cos\theta \mp \mu\sin\theta}} = \underline{\sqrt{gR\,\frac{\tan\theta \pm \mu}{1 \mp \mu\tan\theta}}}$$

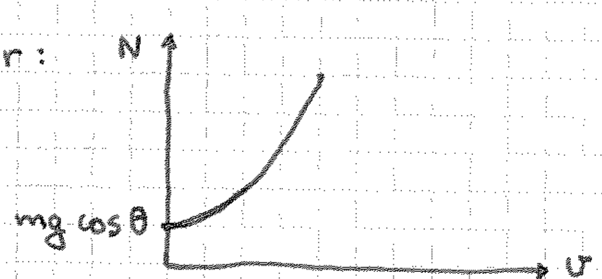
For gitt v finner vi $N(v)$ ved å ta $(1)\cdot\sin\theta + (2)\cdot\cos\theta$:

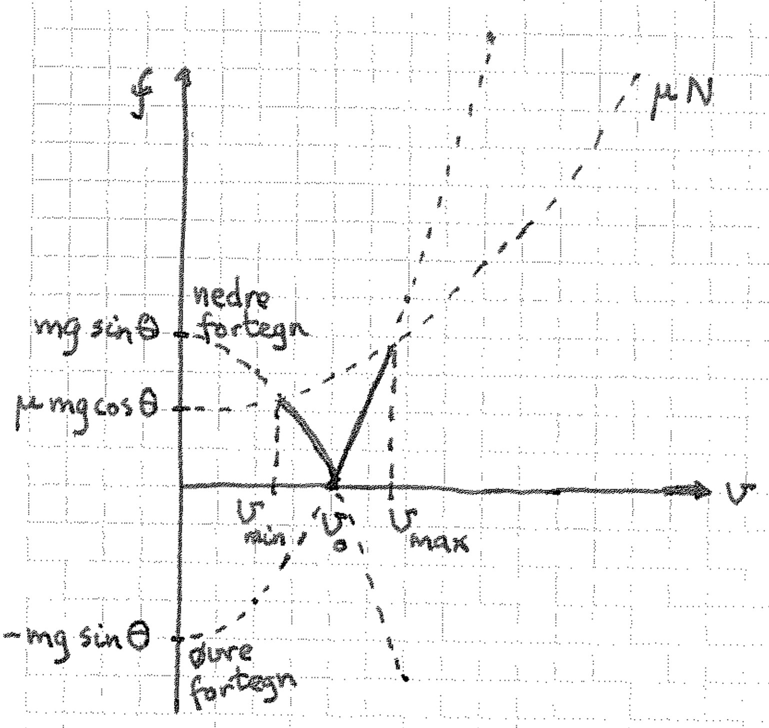
$$N(v) = \frac{m\sin\theta}{R}v^2 + mg\cos\theta$$

Deretter $f(v)$ ved å ta $\pm(1)\cdot\cos\theta \mp (2)\cdot\sin\theta$:

$$f(v) = \pm\frac{m\cos\theta}{R}v^2 \mp mg\sin\theta \qquad (f \geq 0)$$

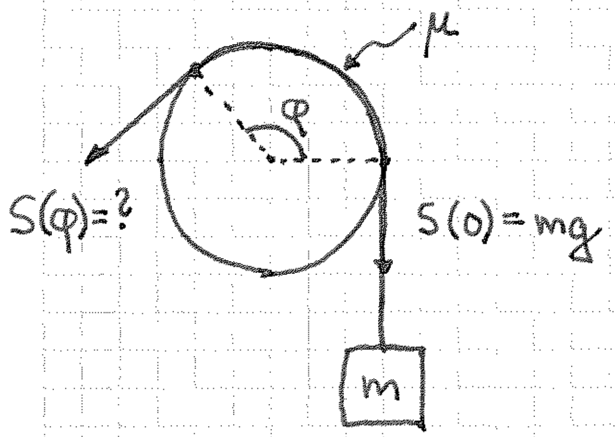
Skisser:





- Ser at $f=0$ for $v = v_0 = \sqrt{gR\tan\theta}$.
- Ser at $v_{min} = 0$ hvis $\mu\, mg\cos\theta > mg\sin\theta$, dvs $\mu > \tan\theta$. Dvs: Kan stå i ro uten å gli (jf Eks 1).

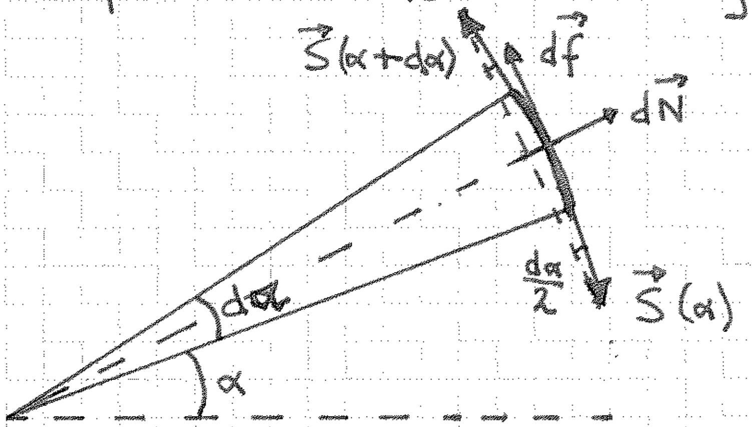
Eks 3: Tau rundt sylinder



Demo (med PVC-rør, hyssing og lodd) viser at påkrevd snordrag for å holde lodd oppe, evt heise opp lodd, avhenger sterkt av φ, dvs vinkel med kontakt mellom tau og sylinder. Finn $S(\varphi)$.

Her er $S(\varphi)$ ikke konstant
$\Rightarrow$ må tenke differensielt

Se på taubit mellom α og $\alpha + d\alpha$:



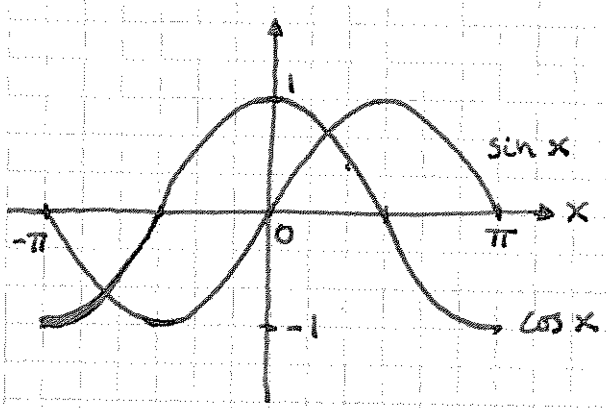
$d\vec{f}$ = friksjonskraft fra sylinder på taubit
$d\vec{N}$ = normalkraft —— " ——
$\vec{S}$ = snordrag fra resten av tauet på taubiten

$$N1 \Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$

Øvre fortegn: $S(\varphi) < S(0)$ $\Rightarrow$ friksjon hindrer lodd å falle
Nedre —"— : $S(\varphi) > S(0)$ $\Rightarrow$ —— " —— heising av lodd

Normalt: $S(\alpha + d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$ (24)



Vi ser at, for $|x| \ll 1$ er

$\sin x \approx x$

$\cos x \approx 1$

Dessuten: $S(\alpha + d\alpha) \approx S(\alpha)$

$$\Rightarrow S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2\,S(\alpha)$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

$$dS \pm df = 0$$

$$S\,d\alpha - dN = 0$$

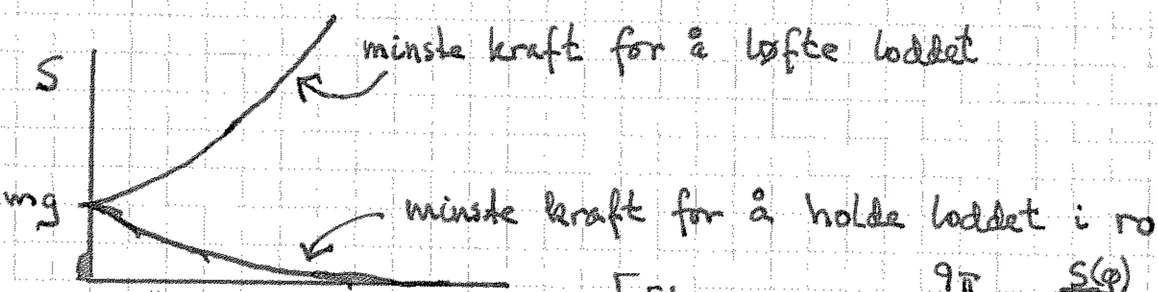
Lodd i ro inntil $df = \mu\, dN$.

$$\Rightarrow dS = \mp df = \mp \mu\, dN = \mp \mu S\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^{\varphi} \mu\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = \mp \mu \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0)\, e^{\mp \mu \varphi}} \qquad (S(0) = mg)$$



[Eks: $\mu = 0.2$, $\varphi = \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \frac{S(\varphi)}{S(0)} = 0{,}06$!]

Hit 1.09.12