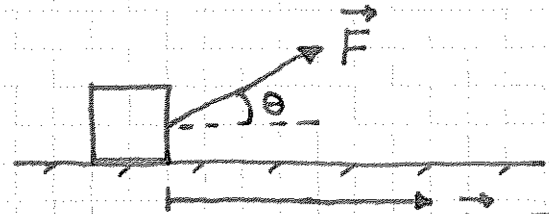
17.09.12

Arbeid og energi [YF 6 og 7, LL 4]

Vi skal se at diverse bevaringslover følger fra Newtons lover.

Ikke egentlig noen ny fysikk, men nyttig: Gir innsikt, og snarveier til å løse problemer.

Arbeid [YF 6.1-6.3, LL 4.1]



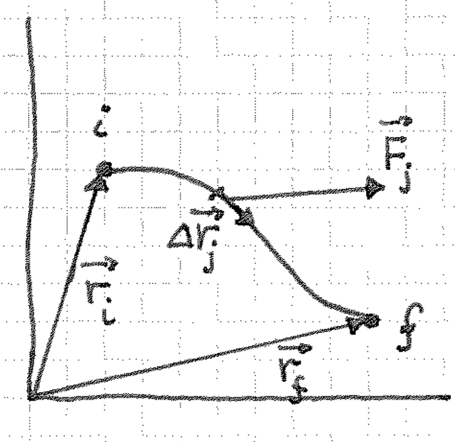
$\vec{r}$ = forflytning av legemet

Arbeid utført av kraft $\vec{F}$ på legemet:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos\theta$$

$$[W] = N \cdot m = J \quad \text{(joule)}$$

Mer generelt (varierende $\vec{F}$ og/eller "urett" vei):



i = start-tilstand ("initial")

f = slutt-tilstand ("final")

Tilhørende tid, posisjon, hastighet:

t_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$

t_f, $\vec{r}_f$, $\vec{v}_f$

Arbeid utført av $\vec{F}_j$ ved forflytning $\Delta\vec{r}_j$:

$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j$$

$\Rightarrow$ Totalt arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$\underline{W} = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \underline{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

("veiintegral")
("linjeint.")

Kinetisk energi [YF 6.2, LL 4.2]

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt, \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (m = \text{konst.})$$

$$\Rightarrow W = \int_i^f m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_i^f \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{=v^2}\right)dt$$

$$= m \Big|_i^f \left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Kinetisk energi: $\boxed{K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2}$

Dermed: $\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$

Arbeid utført av ytre kraft = endring i legemets kin. energi

Effekt [YF 6.4, LL 4.1]

Effekt $\overset{\text{def}}{=}$ arbeid pr tidsenhet: $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$

$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \underline{\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$[P]$ = J/s = Nm/s = W (watt)

[Andre mye brukte enheter for energi:
1 eV (elektronvolt) = $1.6\cdot 10^{-19}$ J ; 1 kWh = 3.6 MJ]
(kilowatt-time)

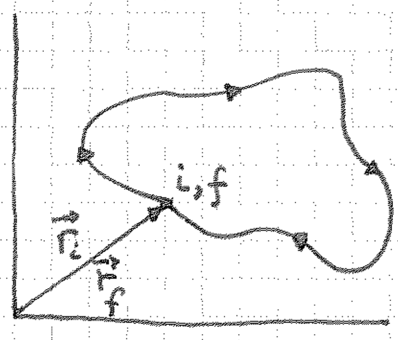
Konservative krefter. Potensiell energi. Energibevarelse

[YF 7.1–7.4, LL 4.3–4.5]

Konservativt system: System uten energilekkasje (dissipasjon) fra mekanisk energi til andre energiformer (varme, lyd etc.)

(Friksjonsarbeid => dissipasjon)

Anta at $\vec{F}$ er konservativ kraft:



i = legemets mekaniske tilstand initielt, gitt ved $\vec{r}_i$ og $\vec{v}_i$

f = legemets mek. tilst. til slutt, gitt ved $\vec{r}_f$ og $\vec{v}_f$

Her er $f = i$, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ og $\vec{v}_f = \vec{v}_i$,

og dermed $K_f = K_i$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ har utført null arbeid på rundturen: $W = \Delta K = 0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f = \vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \text{for kons. kraft } \vec{F}$$

evt:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0} \qquad \text{—— " ——}$$

integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$\boxed{U(\vec{r}) \overset{\text{def}}{=} -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Her er $\vec{F}$ en kons. kraft, og vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$

Forventer: $-\vec{F}$ er (en slags) derivert av U

Gradient. Partiellderivert

$U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ = skalar funksjon av x,y,z

Da er:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$$ = den partiellderiverte av U mhp x

Tilsvarende for $\partial U/\partial y$ og $\partial U/\partial z$

Eksempel:

$$U(x,y,z) = z^2 e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = z^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2}$$

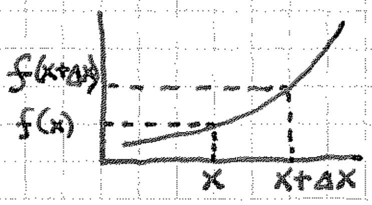
$$\frac{\partial U}{\partial y} = z^2 \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2+y^2}$$

Forflytning fra $\vec{r}$ til $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ gir endring i U:

$$\Delta U = U(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - U(\vec{r}) \approx \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z$$

Jf. funksjoner av en variabel:



$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx \frac{df}{dx}\Delta x$$

Når $\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$ (dvs $|\Delta\vec{r}| \to 0$):

$$dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

(= et totalt differensial)

Kan skrive dU som skalarprod. av to vektorer:

$$dU = \left\{\hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right\} \cdot \underbrace{\left\{\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right\}}_{d\vec{r}\ \text{("veielement")}}$$

Definerer operatoren ∇ (nabla):

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

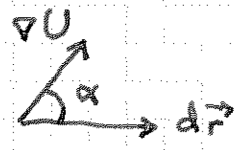
Dermed:

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$$

$$\nabla U = \text{gradienten til } U = \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Vi vet at

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = |\nabla U| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



$\Rightarrow$ Vi får maksimal endring dU når vi velger $d\vec{r}$ i samme retning som ∇U (dvs $\alpha = 0$)

$\Rightarrow$ ∇U er vektor som peker i den retning som U øker raskest

Videre er $|\nabla U| = \dfrac{dU_{max}}{|d\vec{r}|}$

Tilbake til krefter og pot. energi:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (U(\vec{r}_0) = 0)$$

Har også: $U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dU$

Dermed:
$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Sammenligning med $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$ gir:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

U = potensiell energi

Konservativ kraft

På komponentform:

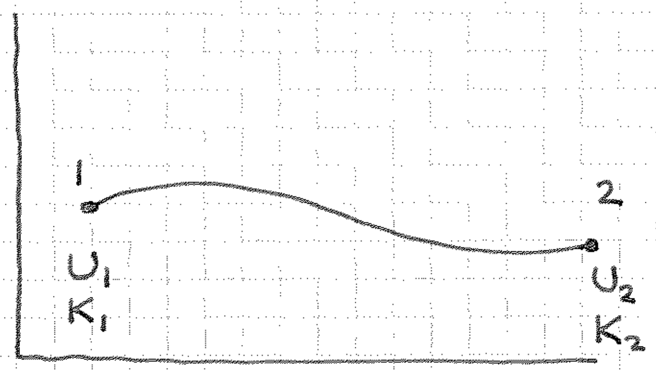
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$U(\vec{r})$ og $U(\vec{r}) + \text{konst.}$ gir samme $\vec{F}$ $\left(\nabla \text{ konst.} = 0\right)$

og dermed samme fysikk

$\Rightarrow$ vi kan fritt velge $U=0$ hvor vi vil

Mekanisk energibevarelse [YF 7.3, LL 4.5]



$$U_1 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad , \qquad U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Fra før: $K_2 - K_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\Rightarrow \quad U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

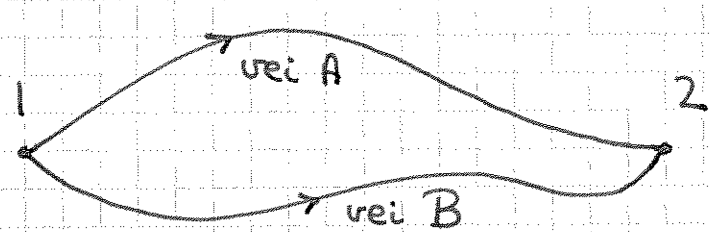
Dvs:

> Total mekanisk energi, $E = K + U$, er konstant for et konservativt system

Hit
17.09.12

$\boxed{\text{Konservativ kraft } \vec{F} \text{ utfører arbeid } W \text{ som er uavhengig av veien}}$

Bevis:



Fra sist: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Dermed:

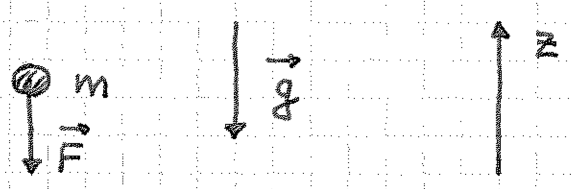
$$\left\{ \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \right\}_A + \underbrace{\left\{ \int_2^1 \vec{F}\cdot d\vec{r} \right\}_B}_{= \left\{ -\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \right\}_B} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \right\}_A = \left\{ \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} \right\}_B$$

<u>QED</u>

La oss se på noen eksempler.

Eks 1: Tyngdefeltet



Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$.

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$$

$d\vec{r} = \hat{z}\,dz$ (evt. $\hat{x}\,dx$ og $\hat{y}\,dy$ gir null bidrag til $\vec{F}\cdot d\vec{r}$)

$$U(z) = -\int_0^z (-mg\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{\underline{mgz}}$$

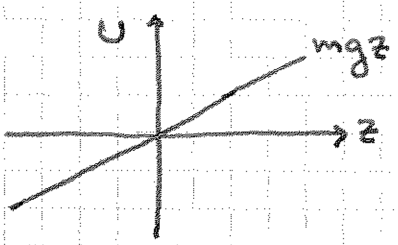
Anta $v(0) = 0$; da er total energi $E_0 = K_0 + U_0 = 0$

For $z<0$: $U(z) = mgz < 0$

$$K = W = \int_0^z F\,dz = -mgz > 0$$

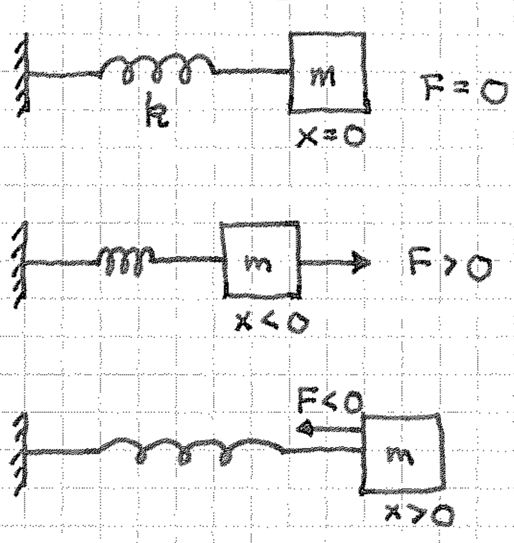
$E = K + U = 0 = E_0$; OK – energibevarelse!

$\vec{F}$ fra U:



$$\vec{F} = -\nabla U$$
$$= -\hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}(mgz)$$
$$= \underline{-mg\,\hat{z}} \quad \text{ok.}$$

Eks 2: Ideell fjær. Hookes lov



Hookes lov:

$\vec{F} = -kx\,\hat{x}$

k = fjærkonstant

$[k] = N/m$

Velg $U(0) = 0 \Rightarrow U(x) = -\int_0^x (-kx\,\hat{x})\cdot(\hat{x}\,dx) = \underline{\frac{1}{2}kx^2}$

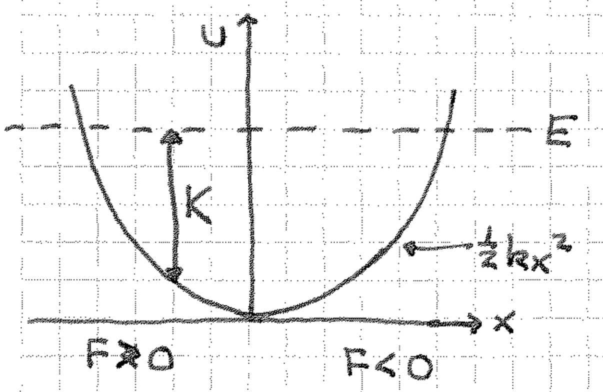
Anta $v = v_0$ når $t = 0$, og $x(0) = 0$

$\Rightarrow E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

For $x \neq 0$: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

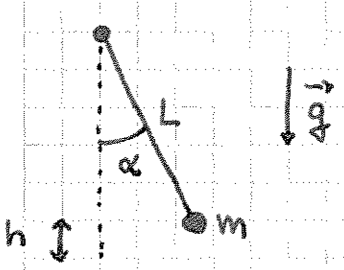
$\Rightarrow K = K_0 + W = \frac{1}{2}mv_0^2 + \int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$

$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$; OK.



$\vec{F} = -\nabla U = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx\,\hat{x}$, OK.

Eks 3: Matematisk pendel



- Finn U, K og E uttrykt ved α og $\dot{\alpha}$
- Diskuter bevegelsen for ulike verdier av E

(Velg $U = 0$ for $\alpha = 0$)

(Anta masseløs snor eller stang, lengde L)

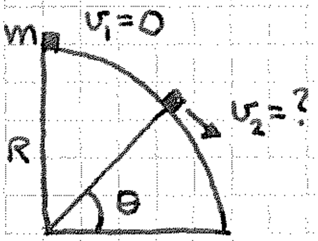
$$\left.\begin{aligned} U(\alpha) &= mgh = mgL\,(1-\cos\alpha) \\ K &= \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\,(L\dot{\alpha})^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgL\,(1-\cos\alpha)$$

- $E_{min} = 0$ for $U_{min} = K_{min} = 0$. m i ro ved $\alpha = 0$
- $0 < E \leq mgL$: svingninger mellom α_1 og $-\alpha_1$, der $0 < \alpha_1 \leq \pi/2$
- $mgL < E \leq 2mgL$: stang $\Rightarrow$ svinger mellom α_2 og $-\alpha_2$, der $\pi/2 < \alpha_2 \leq \pi$; snor $\Rightarrow$ skrått kast fra vinkel α_3 der snordraget forsvinner ($S = 0$)
- $2mgL < E \leq \frac{5}{2}mgL$: stang $\Rightarrow$ rotasjon ; snor $\Rightarrow$ skrått kast når $S = 0$
- $\frac{5}{2}mgL < E$: rotasjon for stang og snor, fordi $S > 0$ når m er på toppen (ved $\alpha = \pi$)

Flere spm: Ved hvilken vinkel α_3 blir $S = 0$, for E mellom mgL og $\frac{5}{2}mgL$?
Hvor stor hastighet v_3 har m da ?

(Mer om dette på en øving !)

Eks 4: Gli på kvartsirkel (uten friksjon)



$$E_2 = E_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_2^2 + mgR \sin\theta = mgR$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_2 = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

Går over til skrått kast når normalkraften fra underlaget forsvinner (N = 0). Ved hvilken vinkel skjer dette?

— · —

Ikke-konservative krefter

F.eks. friksjonskraft $\vec{f}$

Da vil mekanisk energi "gå tapt" (som varme)

$$\Delta E = W_f = \underbrace{\int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r}}_{= \text{ friksjonsarbeid}} < 0$$ (da $\vec{f}$ rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$)

W_f avhenger av veien fra 1 til 2

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ er <u>ikke</u> konservativ,

og vi har <u>ikke</u> et tilhørende potensial

Impuls. Kollisjoner. Partikkelsystemer [YF 8, LL 5]

For legeme med konst. masse m:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Impuls = masse * hastighet

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

(Andre navn på $\vec{p}$: bevegelsesmengde, driv, massefart.
Engelsk: (linear) momentum)

Dermed: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ Enhet: $[p] = \text{kg}\cdot\text{m/s}$

Gir umiddelbart loven om impulsbevarelse:

Hvis Σ (ytre krefter) = 0, er legemets impuls $\vec{p}$ bevart

Meget nyttig! Vi har mange slags prosesser og kollisjoner der mekanisk energi ikke er bevart, men hvis $\vec{F}_{ytre} = 0$, er alltid $\vec{p}$ = konstant.

Hit
18.09.12