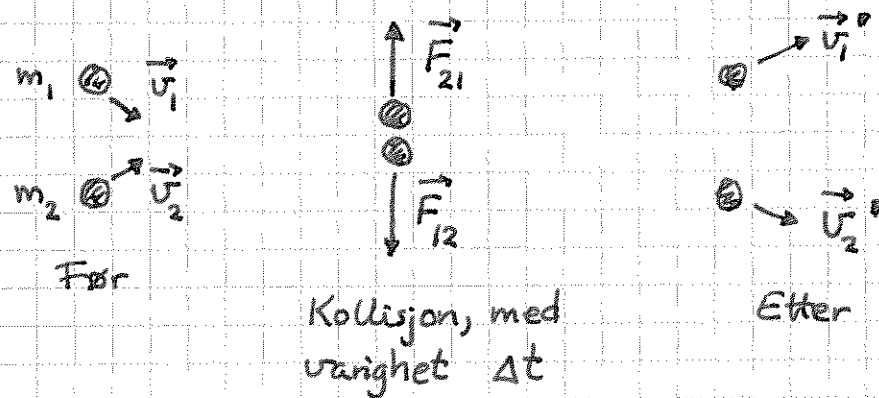


= (kortvarige) støt mellom to legemer:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \stackrel{N2}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

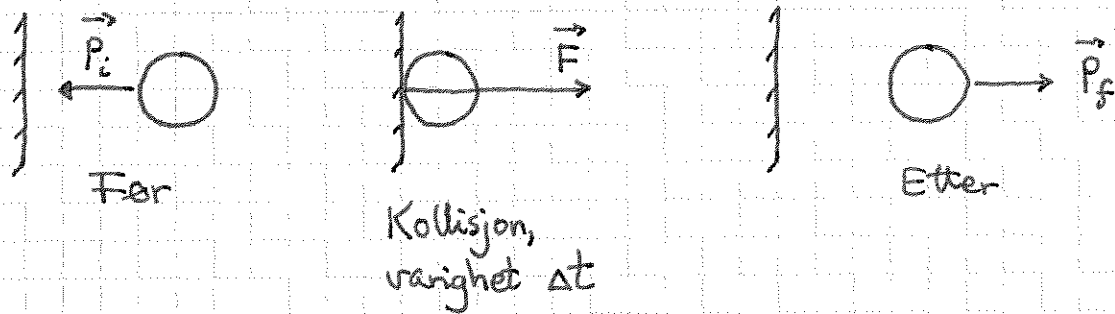
Kommentarer:

- $\vec{F}_{12}(t)$ typisk ukjent, men så lenge $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, garanterer N3 at total impuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ er konst.
- Hvis $\vec{F}_{\text{ytre}} \neq 0$, men neglisjerbar i løpet av kollisjonen ($F_{\text{ytre}} \ll F_{\text{indre}}$), er $\vec{P} \approx \text{konst.}$

Kraftstøt ("Impulse") [YF 8.1, LL 5.2]

(39)

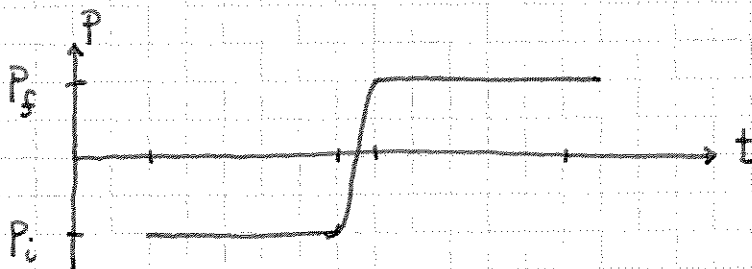
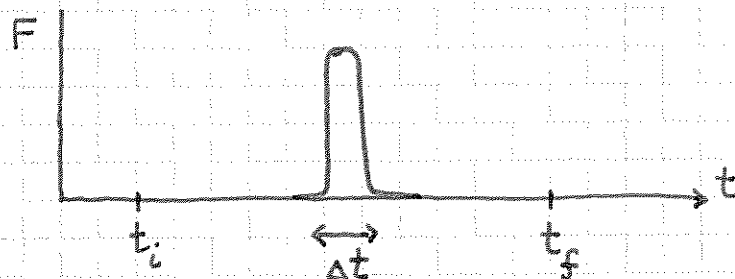
Ball mot vegg:



$$d\vec{p} \stackrel{N2}{=} \vec{F} \cdot dt = \text{ballens impulsending i løpet av } dt$$

\Rightarrow Ballens totale impulsending i kollisjonen:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \int_{\Delta t} \vec{F} \cdot dt$$



$$\text{Kraftstøt } \vec{J} \text{ er: } \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \Delta\vec{p} \quad (\text{"Impulsloven"})$$

Kan ofte anslå F , hvis kjennskap til / estimat for Δp og Δt .

Eks: Anslå gjennomsnittlig kraft $\langle F \rangle$ på en bordtennisball (fra racketen).
Sammenlign $\langle F \rangle$ med tyngden.

(40)

Løsning: $m = 2.7 \text{ g}$, $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim -30 \text{ m/s}$,
 $\Delta t \sim 1 \text{ ms}$ (støtvarighet)

$$\Rightarrow \langle F \rangle \approx \frac{m \Delta v}{\Delta t} \sim \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \cdot 40}{10^{-3}} \text{ N} = \underline{108 \text{ N}}$$

$$\frac{\langle F \rangle}{mg} = \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \sim \frac{40000}{10} = \underline{4000}$$

\Rightarrow GK & neglisjere mg i støtet

Ulike typer kollisjoner [YF 8.3, LL 5.3]

Elastisk: $\Delta E = 0$ ($\Delta K = 0$)

Uelastisk: $\Delta K < 0$

Fullstendig uelastisk: Kolliderende legemer henger sammen etter kollisjonen \Rightarrow Felles hastighet, og maks. $|\Delta K|$

(Tap $\Delta K \Rightarrow$ deformasjoner, varme, lyd...)

Merk: Så lenge $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ (evt neglisjerbar under kollisjonen), er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner

Indre krefter opptrer i par, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (N3), og bidrar ikke til endring i systemets totale impuls.

Eks: Sentralt støt [YF 8.2-8.4, LL5.3]

(41)

Før: $0 \rightarrow v_A$ $v_B \leftarrow 0$ (i)
 m_A m_B

Etter: $v_A' \leftarrow 0$ $0 \rightarrow v_B'$ (f)

$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{m_A v_A + m_B v_B}_{P_i} = \underbrace{m_A v_A' + m_B v_B'}_{P_f}$ (Her: $v_B < 0$)

Hvis elastisk støt: $\Delta K = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$

Fra $\Delta p = 0$: $m_A (v_A - v_A') = m_B (v_B' - v_B)$ (1)

Fra $\Delta K = 0$: $m_A (v_A + v_A')(v_A - v_A') = m_B (v_B' + v_B)(v_B' - v_B)$ (2)

(2)/(1) $\Rightarrow v_A + v_A' = v_B + v_B'$

$\Rightarrow v_A' - v_B' = -(v_A - v_B)$ (3)

(Dvs: Relativhastighetene skifter fortegn i kollisjonen.)

(1) og (3) gir:

$v_A' = \frac{m_B}{m_A + m_B} \left\{ 2v_B + v_A \frac{m_A - m_B}{m_B} \right\}$

$v_B' = \frac{m_A}{m_B + m_A} \left\{ 2v_A + v_B \frac{m_B - m_A}{m_A} \right\}$

Hvis fullstendig uelastisk støt:

$v_A' = v_B' = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$ (direkte fra $\Delta p = 0$)

Hvis delvis uelastisk støt: Kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente

\Rightarrow trenger en ekstra opplysning (v_A' , v_B' eller ΔK etc)

Elastisk støt mot vegg:

$$v_B = 0, \quad m_B \gg m_A \quad (m_B \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow v_A^i = \frac{m_B}{m_B} \cdot v_A \cdot \left(\frac{-m_B}{m_B} \right) = -v_A$$

$$v_B^i = \frac{m_A}{m_B} \cdot 2v_A = 0$$

Impulsbevarelse:

$$P_A^i = m_A v_A^i = -m_A v_A$$

$$P_B^i = m_B v_B^i = m_B \cdot \frac{m_A}{m_B} \cdot 2v_A = 2m_A v_A$$

$$\Rightarrow P_A^i + P_B^i = m_A v_A = P_A + P_B, \quad \text{OK}$$

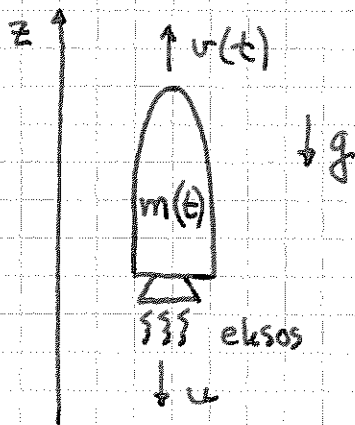
Energibevarelse:

$$K_A^i = \frac{1}{2} m_A v_A^i{}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$K_B^i = \frac{1}{2} m_B v_B^i{}^2 = \frac{1}{2} m_B \cdot \left(\frac{m_A}{m_B} \cdot 2v_A \right)^2 = 2 \frac{m_A^2 v_A^2}{m_B} = 0$$

$$\Rightarrow K_A^i + K_B^i = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = K_A + K_B, \quad \text{OK}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6, LL 5.4]



Anta $v(0) = 0$ og $m(0) = m_0$.

Forbrent drivstoff pr tidsenhet: $-\frac{dm}{dt}$
($dm < 0$)

Eksosens hastighet relativt raketten: u
($u > 0$)

Bruk N2 til å finne ligning for $v(t)$.

Løsning:

Impuls ved tid t for rakett + gjenværende drivstoff:

$$p(t) = m(t) v(t)$$

$$N2: F_{ytre}(t) = \frac{dp}{dt} \quad \text{med} \quad F_{ytre} = -m(t)g$$

$$dp = p(t+dt) - p(t)$$

$$= \underbrace{[m(t) + dm]}_{m(t+dt)} \underbrace{[v(t) + dv]}_{v(t+dt)} + \underbrace{(-dm)}_{\substack{\text{forbrønt} \\ \text{drivstoff} \\ \text{i løpet av} \\ dt}} \cdot \underbrace{(v(t) - u)}_{\substack{\text{eksosens} \\ \text{hastighet} \\ \text{relativt} \\ \text{jorda}}} - m(t)v(t)$$

$$= m(t)dv + v(t)dm - v(t)dm + u dm \quad (+ dm \cdot dv)$$

$$= m(t)dv + u dm$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = m(t) \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{F_{ytre} + F_{skjuv} = m(t) \frac{dv}{dt}}$$

$$\text{med } F_{skjuv} = -u \frac{dm}{dt} > 0 \quad (\text{siden } u > 0 \text{ og } dm < 0)$$

$$\text{På og nær bakken: } F_{ytre} = -m(t)g$$

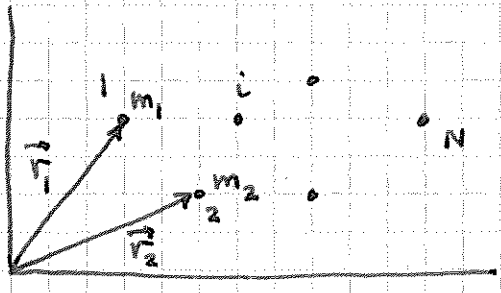
$$\text{I "outer space": } F_{ytre} = 0$$

Mer på øving.

Hit
24.09.12

25.09.12

Tyngdepunkt [YF 8.5, LL S.6 + S.8]



System med N partikler, masse
 m_1, m_2, \dots, m_N i posisjon
 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massecenter (CM = "center of mass"):

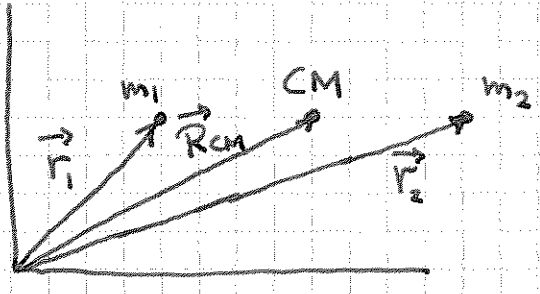
$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Tyngdepunkt = Massecenter hvis
 $g = \text{konst.}$ i hele systemet

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

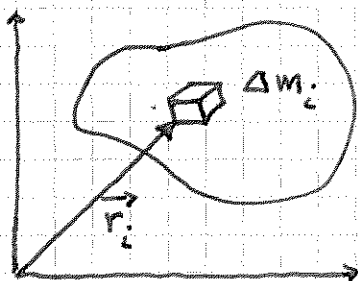
Ek: $N=2$



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) & \text{hvis } m_1 = m_2 \\ \vec{r}_1 & \text{hvis } m_1 \gg m_2 \\ \vec{r}_2 & \text{hvis } m_1 \ll m_2 \end{cases}$$

Kontinuerlig massefordeling [LL 6.1]

(45)



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int dm \vec{r}}{\int dm}$$

der begge integrander går "over legemet".

$$\int_{\text{legemet}} dm = M = \text{legemets masse}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm}$$

3D (kloss, kompakt kule etc.):

$$dm = \rho dV, \quad \rho = \text{masse pr volumenet, } [\rho] = \text{kg/m}^3$$

$$dV = \text{volumenelement} = dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{i kartesiske koord.})$$

2D (tynn skive, kuleskall etc.):

$$dm = \sigma dA, \quad \sigma = \text{masse pr flateenhet, } [\sigma] = \text{kg/m}^2$$

$$dA = \text{flateelement} = dx \cdot dy \quad (\text{i kart. koord.})$$

1D (tynn stang, ring etc.):

$$dm = \lambda \cdot dl, \quad \lambda = \text{masse pr lengdeenhet, } [\lambda] = \text{kg/m}$$

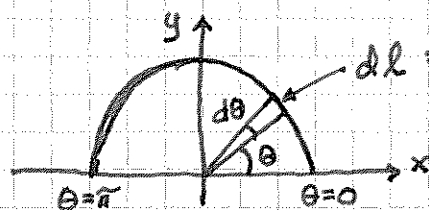
$$dl = \text{linjeelement} = dx \quad (\text{i kart. koord.})$$

Formen på legemet, dvs typen symmetri, avgjør hvor slags koordinater som er hensiktsmessig.

Vises best med noen eksempler!

1D-eks: Halv sirkel, radius R , masse λ pr lengdeenhet

46



$$dl = R \cdot d\theta, \quad dm = \lambda \cdot dl = \lambda R d\theta$$

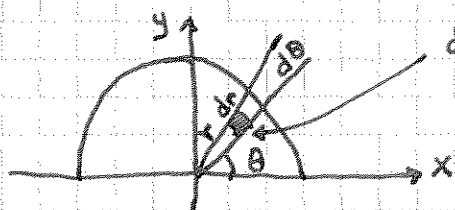
$$\vec{r} = \hat{x} R \cos\theta + \hat{y} R \sin\theta$$

$$\vec{R}_{CM} = X_{CM} \hat{x} + Y_{CM} \hat{y}; \quad \text{symmetri} \Rightarrow X_{CM} = 0$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm; \quad M = \lambda \cdot \pi R$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^\pi R \sin\theta \cdot \lambda R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi (-\cos\theta) = \frac{2R}{\pi} \approx \underline{0.64 R}$$

2D-eks: Halv sirkulær skive (tynn), masse σ pr flateenhet



$$dA = dr \cdot r d\theta, \quad dm = \sigma r dr d\theta,$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\theta + \hat{y} r \sin\theta$$

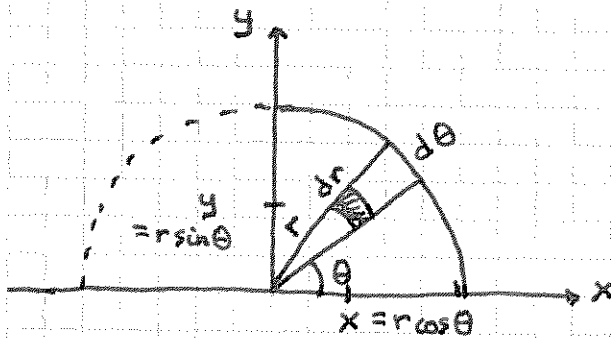
$$\text{symmetri} \Rightarrow X_{CM} = 0; \quad M = \sigma A = \sigma \cdot \pi R^2 / 2$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^\pi r \sin\theta \cdot \sigma r dr d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \cdot \left(\int_0^R \frac{1}{3} r^3 \right) \cdot \left(\int_0^\pi -\cos\theta \right) = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{0.42 R}$$

3D-eks: Halvkule, masse ρ pr volumenet

(47)

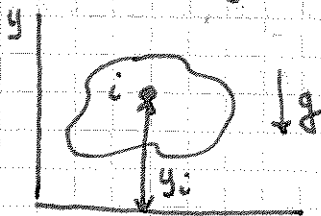


- Rotasjon av kvant skive om y-aksen \Rightarrow halvkule
- Rot. av $dA = r dr d\theta$ om y-aksen \Rightarrow volumelement (ring)
 $dV = dA \cdot 2\pi x$
 $= r dr d\theta \cdot 2\pi r \cos\theta$

- $X_{CM} = Z_{CM} = 0$ av symmetrigrunner
- Hela "dV-ringen" har samme verdi for y
- $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \rho \pi R^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{CM} &= \frac{1}{M} \int y dm \\ &= \frac{3}{2\rho\pi R^3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^R r \sin\theta \cdot \rho \cdot \overbrace{2\pi r^2 dr \cos\theta d\theta}^{dV} \\ &= \frac{3}{R^3} \left(\int_0^R \frac{1}{4} r^4 \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) = \frac{3R}{8} = \underline{0.375 R} \end{aligned}$$

Eks: Pot. energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



Velg $U=0$ ved $y=0$
 $\Rightarrow U_i = m_i g y_i = \text{pot. energi for } m_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i \quad \begin{array}{l} \text{Anta} \\ g = \text{konst.} \end{array} = g \sum_i m_i y_i \\ &= g \cdot M \cdot Y_{CM} \end{aligned}$$

\Rightarrow Pot. energi U som om hele massen $M = \sum_i m_i$ er samlet i $Y_{CM} = M^{-1} \sum_i m_i y_i$, ders (f.eks.) i massesenteret R_{CM}

Mit
5.09.12