08.10.12

N2 for partikkelsystem. Tyngdepunktbevegelse [YF8.5, LL5.8] (48)

For partikkel i: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, N)$

der $\vec{F}_{ji}$ = kraft fra partikkel j på partikkel i

$\Rightarrow$ Total indre kraft på part. i: $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

Bruk def. av $\vec{R}_{CM}$, ta d^2/dt^2 av denne og multipliser med M

$$\Rightarrow M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \overset{N2}{=} \sum_i \left\{ \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right\}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}}_{=0} = 0$$

Dermed:

$$\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

Dvs: Tyngdepunktet $\vec{R}_{CM}$ til partikkelsystem beveger seg som om hele massen M er samlet i $\vec{R}_{CM}$ og utsettes for summen av alle ytre krefter $\vec{F}_{ytre}$ som virker på systemet.

Systemets <u>totale bevegelse</u> blir <u>tyngdepunktbevegelsen</u> pluss eventuell <u>bevegelse relativt CM</u>, slik som <u>rotasjon</u> og <u>vibrasjon</u>.

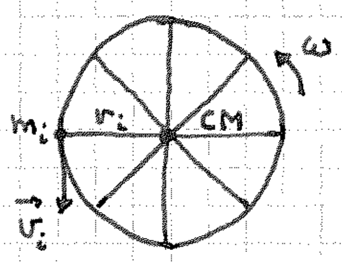
Vi skal se nærmere på <u>rotasjon</u>.

(Stive legemer $\Rightarrow$ ingen vibrasjon.)

Rotasjon [YF 9+10, LL 5.5+5.9, 6]

Innledning:

- roterende hjul



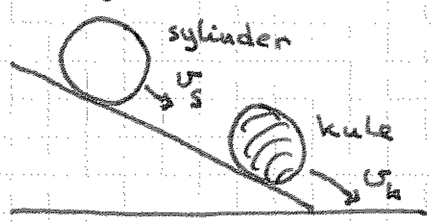
$K_{trans} = 0$ siden CM i ro, men

$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$

Impuls: $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, men

<u>dreieimpuls</u> $\neq 0$

- rulling på skråplan



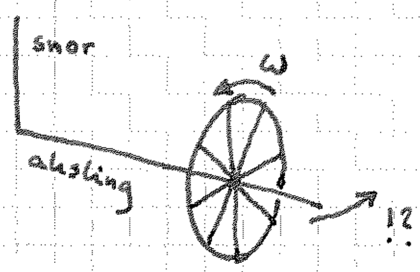
Hvilke krefter virker? Rotasjonsdynamikk.

Hvor angriper kreftene?

<u>Dreiemoment</u>.

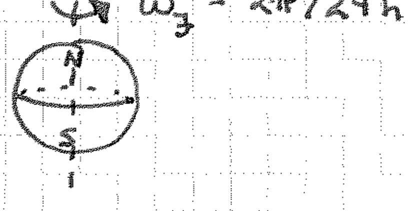
Hvorfor $v_k > v_s$? Hvorfor rulling? Friksjonens rolle.

- komplisert dynamikk



presesjon; gyroskop

- dynamikk <u>i</u> roterende system



Foucaults pendel;

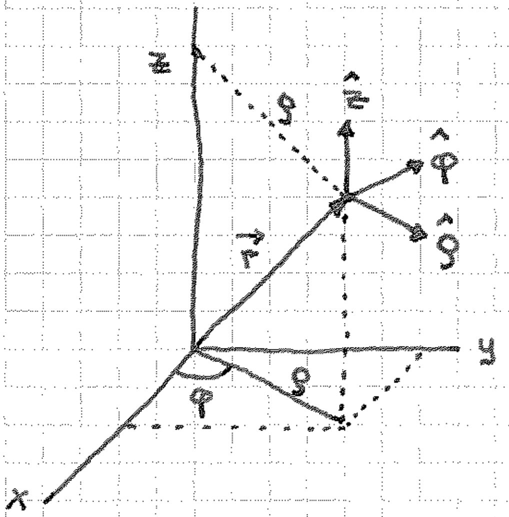
Corioliskraft ⇒ avbøyning

- stort sett <u>stive legemer</u> $\overset{\text{def.}}{=}$ system med punktmasser i <u>fast innbyrdes avstand</u>

Sirkelbevegelse (rep.) [YF 9.1-3, LL 1.8]

Rotasjon om gitt akse, f.eks. $\hat{z}$

⇒ Hensiktsmessig med <u>sylinderkoordinater</u>:



Kartesisk: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Sylinderkoord: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

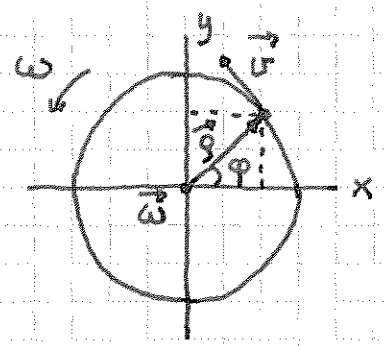
Relasjoner:

$x = \rho\cos\varphi\,,\quad y = \rho\sin\varphi\,,\quad z = z$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \varphi = \arctan(y/x)$

$r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Dermed, for rot. om z-aksen:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho\, d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}\,,\quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega$ (periode)

$f = 1/T = \omega/2\pi$ (frekvens)

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ (vinkelakselerasjon)

$v = \omega\rho$ (banehastighet)

$a_{\parallel} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho$ (baneakselerasjon)

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho$ (sentripetalaks.)

$\vec{a}_{\perp} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$ (øving 2)

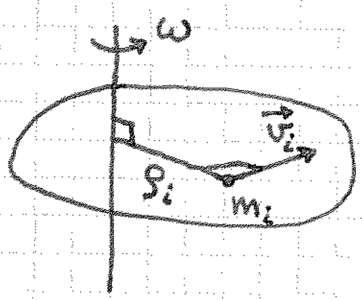
$\vec{a} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho}$ (total akselerasjon)

For stivt legeme:

Alle m_i har felles ω og α, mens v, $a_\perp$ og $a_{\parallel}$ øker med økende ρ

Rotasjonsenergi [YF 9.4, LL 6.4]

Anta rotasjon om fast akse:



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_i m_i \rho_i^2\right\}\omega^2$$

Merk:
- K avhenger av massens fordeling
- $\sum_i m_i \rho_i^2$ framtrer som sentral størrelse

Treghetsmoment ("Moment of inertia") [YF 9.4, LL 6.3]

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment om gitt akse,

$[I] = kg \cdot m^2$ — ρ_i er m_i sin avstand fra rot. aksen
($\Rightarrow$ I avhenger av valgt akse)

Dermed: $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ (Sammenlign: $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$)

Hvis kontinuerlig massefordeling:

$m_i \rightarrow \Delta m_i \longrightarrow dm$, $\Sigma \rightarrow \int$

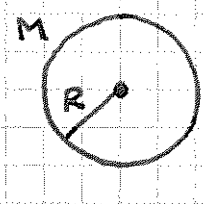
$$\Rightarrow \boxed{I = \int_{\text{legemet}} \rho^2 \, dm}$$

ρ = avst. fra aksen til dm

$dm = \lambda \, d\ell$, $\sigma \, dA$, $\rho \, dV$ (s. 45)
(1D) (2D) (3D)

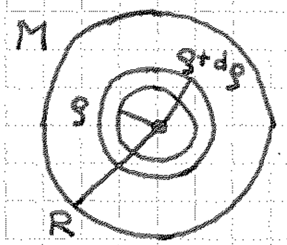
(•) Eksempler, med akse gjennom CM :

Eks 1 : Ring



$$I_0 = \int_{ring} \rho^2 \, dm = R^2 \int_{ring} dm = \underline{MR^2}$$

Eks 2: Tynn skive



= sum av tynne ringer med radius ρ og masse dm = total masse • arealandel

$= M \cdot (dA/A)$

$= M \cdot (2\pi\rho \cdot d\rho / \pi R^2)$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{skive} \rho^2 \, dm = \int_0^R \rho^2 M \frac{2\pi\rho \, d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \underline{\tfrac{1}{2} MR^2}$$

Hit 08.10.12

09.10.12

Eks 1a: Hul sylinder. Som ring. $\Rightarrow I_0 = MR^2$

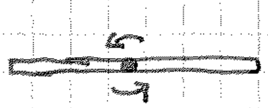
Eks 2a: Kompakt sylinder. Som skive $\Rightarrow I_0 = \frac{1}{2} MR^2$

På øving 8:

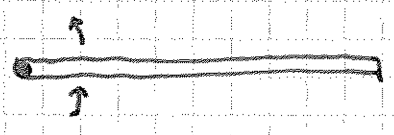
Eks 3: Kuleskall : $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 4: Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Eks 5: Stang, lengde L : $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$



Eks 6: Om akse gjennom stangas ende:



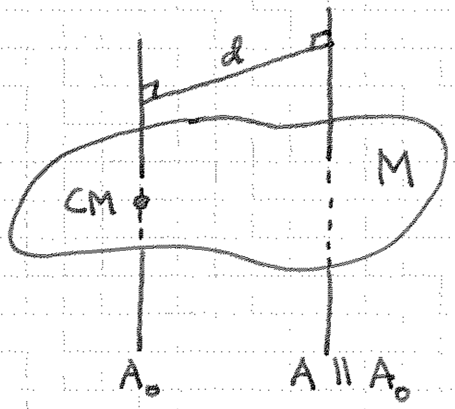
$I = \frac{1}{3} ML^2$

Treghetsradius R_a

$I_0 = MR_a^2$, dvs som om hele massen M ligger i avstand R_a fra aksen

Objekt	ring	skive	kuleskall	kompakt kule	stang
R_a/R	1	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/5}$	$1/\sqrt{12}$

Steiners sats (Parallellakseteoremet) [YF 9.5, LL 6.3]



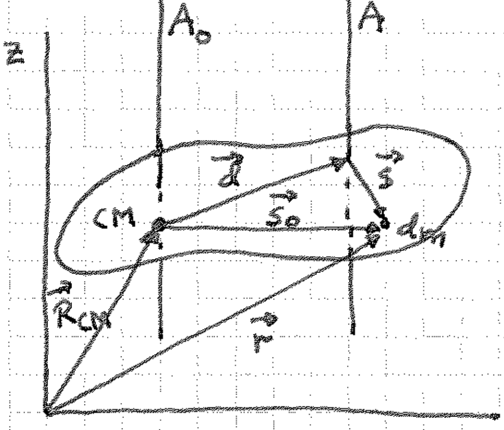
om A_0 : I_0 (gjennom CM)

om $A \parallel A_0$: I

d = avst. mellom A_0 og A

Da er $\boxed{I = I_0 + Md^2}$

Bevis:



$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0$$
$$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$$
$$\vec{s}_0 = \vec{\rho}_0 + \vec{z}_0$$
$$\vec{s} = \vec{\rho} + \vec{z}$$
$$\vec{z} = \vec{z}_0 \quad (\text{siden } \vec{d} \perp \hat{z})$$

Dermed: $\vec{\rho} - \vec{\rho}_0 = \vec{s} - \vec{s}_0 = -\vec{d}$, dvs $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 - \vec{d}$

(der $\vec{\rho}, \vec{\rho}_0$ er avst. til dm fra A, A_0)

$$\Rightarrow I = \int \rho^2 \, dm = \int \rho_0^2 \, dm + d^2 \int dm - 2\vec{d} \cdot \int \vec{\rho}_0 \, dm$$
$$= I_0 + Md^2 - 2\vec{d} \cdot \int \vec{\rho}_0 \, dm$$

Siste ledd:

$$\vec{d}\cdot\int\vec{\rho}_0\,dm = \vec{d}\cdot\int(\vec{s}_0-\vec{z}_0)\,dm \overset{\vec{d}\cdot\vec{z}_0=0}{=} \vec{d}\cdot\int\vec{s}_0\,dm$$

$$= \vec{d}\cdot\int(\vec{r}-\vec{R}_{CM})\,dm = \vec{d}\cdot\underbrace{\int\vec{r}\,dm}_{=M\vec{R}_{CM}} - \vec{d}\cdot\vec{R}_{CM}\underbrace{\int dm}_{=M} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I = I_0 + Md^2}\ , \quad \text{qed}$$

~ · ~

Kinetisk energi for stivt legeme [YF 10.3, LL 6.6]

Generell bevegelse ~~for~~ stivt legeme:

Translasjon (av CM) + Ren rotasjon om akse gjennom CM

[Kan velge andre punkter enn CM, men CM er hensiktsmessig!]

Da er total kinetisk energi

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\,\omega^2}$$

med

M = legemets masse

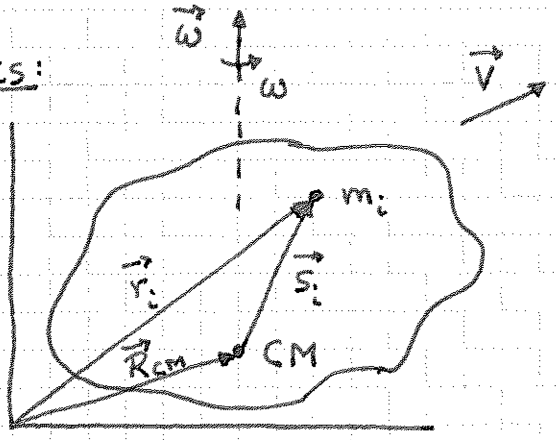
$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = tyngdepunktets hastighet

I_0 = legemets treghetsmoment om aksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for bevegelsen relativt CM

Merk at både $\vec{V}$ og $\vec{\omega}$ kan endre seg med tiden.

Bevis:



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i, \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}, \quad \vec{u}_i = \dot{\vec{s}}_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i \right)^2$$

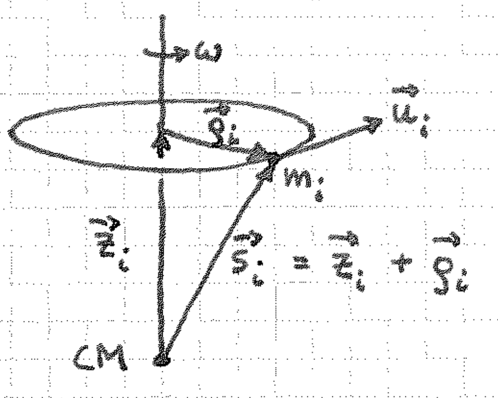
$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(V^2 + u_i^2 + 2 \vec{V} \cdot \vec{u}_i \right)$$

1. ledd: $\frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) V^2 = \frac{1}{2} M V^2$

3. ledd: $\sum_i m_i \vec{V} \cdot \vec{u}_i = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{s}_i = 0$, fordi

$$\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \right) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$$

2. ledd: Bevegelse relativt CM, ren rotasjon om akse gjennom CM, velg $\hat{z}$ som rot. akse



$$\vec{u}_i = \dot{\vec{s}}_i = \underbrace{\dot{\vec{z}}_i}_{=0} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$= \rho_i \omega \hat{\varphi}_i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

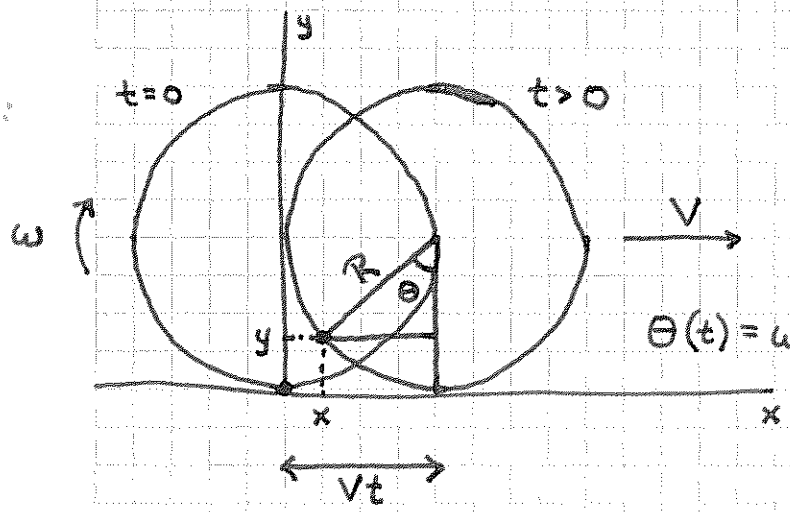
$\Rightarrow$

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

<u>qed</u>

Rulling [YF 10.3, LL 6.7]

Ren rulling : ingen relativ-bevegelse i kontaktpunktet



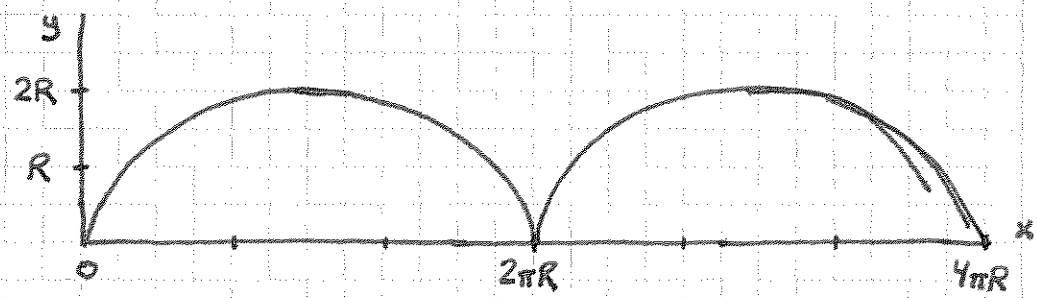
Fra figur:

$$x(t) = Vt - R\sin\theta$$
$$= Vt - R\sin\omega t$$

$$\theta(t) = \omega \cdot t$$

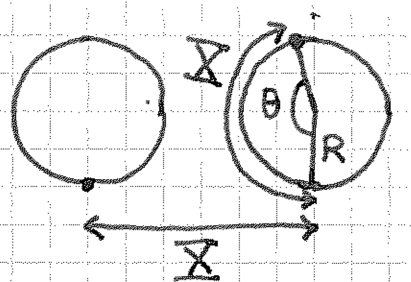
$$y(t) = R - R\cos\theta$$
$$= R - R\cos\omega t$$

$\Rightarrow$ syklocide:



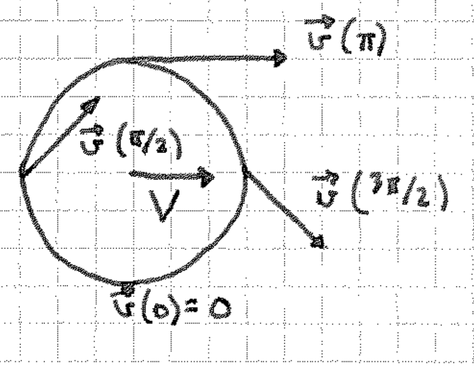
$$\dot{x} = V - \omega R\cos\omega t\,, \quad \dot{y} = \omega R\sin\omega t$$

Rullebetingelse(r):



$$X = R\theta$$
$$V = \dot{X} = R\omega$$
$$A = \ddot{X} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x}\, V(1-\cos\theta) + \hat{y}\, V\sin\theta$$



$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$$
$$\vec{v}(\pi/2) = V\hat{x} + V\hat{y}$$
$$\vec{v}(\pi) = 2V\hat{x}$$
$$\vec{v}(3\pi/2) = V\hat{x} - V\hat{y}$$

Hit
08.10.12