15.10.12

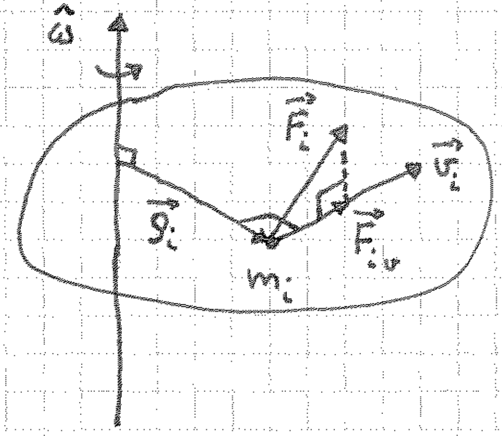
Kinetisk energi:

$\omega = V/R$, $\quad I_0 = c \cdot MR^2 \quad$ (ring: $c = 1$; kompakt kule: $c = \frac{2}{5}$ etc)

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2}$$

Rotasjonsdynamikk [YF 10; LL 6, 5]

Starter "enkelt" med essensielt "1D", dvs rotasjon om <u>fast akse</u>, eller i det minste <u>akse med fast orientering</u>. (Dvs: $\hat{\omega}$ = konst.)



$\vec{v}_i = \rho_i \omega \hat{\varphi}_i$ = hastigheten til m_i

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}_i$ = avst. fra aksen til m_i

$\vec{F}_i$ = netto ytre kraft på m_i

F_{iv} = komponenten av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

Total effekt tilført legemet:

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv} \rho_i \omega,$$

som gir endring i kinetisk energi $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$,

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed: $\quad \underbrace{\sum_i F_{iv} \rho_i}_{\text{ny sentral størrelse!}} = I \dot{\omega}$

<u>Dreiemoment</u> (evt: Kraftmoment): ("Torque")

$\tau_i = F_{iv} \rho_i$ = kraftens dreiemoment om rot. aksen

Her er: F_{iv} = kraftens komponent langs $\vec{v}_i$

ρ_i = kraftens <u>arm</u> = avstand fra aksen til kraftens angrepspunkt

Totalt dreiemoment om rot. aksen: $\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i F_{iv} \rho_i$

Dermed: [YF 10.3

$$\boxed{\tau = I\dot{\omega}}$$ N2 for rotasjon om fast akse

Jfr. $F = M\dot{V}$, N2 for translasjon (1D)

Arbeid utført ved rotasjon: [YF 10.4

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega = \tau \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\, d\varphi}$$ Arbeid utført av τ ved rotasjon $d\varphi$

Jfr. $dW = F\,ds$ = arbeid utført av F ved forflytning ds (1D)

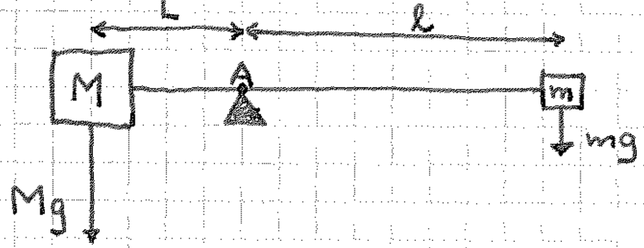
<u>Mekanisk likevekt for stivt legeme</u> [YF 11.1–11.3, LL 7.1]

N1, translasjon: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{V} = \text{konst.}$

N1, rotasjon om fast akse: $\tau = \sum_i \tau_i = 0 \Rightarrow \omega = \text{konst.}$

<u>Statisk</u> likevekt: $V = 0$, $\omega = 0$

Eks 1: Vektstang i likevekt [YF 11.2



$(m_{stang} \approx 0)$

$V = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow N_A = Mg + mg$ (oppover)

("normalkraft fra ▲ på stanga i A)

$\omega = 0 \Rightarrow \sum_i \tau_i^A = 0$ (velger τ mhp akse gjennom A)

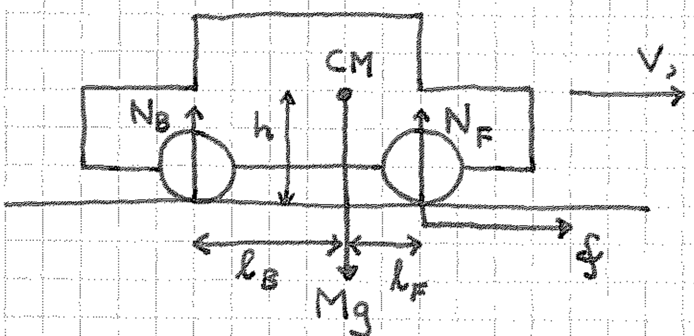
Konvensjonelt fortegnsvalg : $\tau > 0 \Rightarrow$ rotasjon mot klokka

$\tau < 0 \Rightarrow$ —"— med —"—

$\Rightarrow + Mg \cdot L - mg \cdot l = 0$ (N_A har null arm mhp A)

$\Rightarrow \underline{M \cdot L = m \cdot l}$

Eks 2: Bil som akselererer



Motor $\Rightarrow$ dreiemoment på aksling foran (hvis forhjulstrekk)

$\Rightarrow$ forhjul roterer (med klokka) og skyver bakken bakover

(kraft $-f$) $\overset{N3}{\Rightarrow}$ bakken skyver bilen framover (f)

N2 vertikalt $\Rightarrow$ $N_B + N_F - Mg = 0$

N2 horisontalt $\Rightarrow$ $f = M\dot{V}$

N2 for rotasjon om akse gjennom CM:

[ikke stivt legeme, men neglisjerer rotasjon av hjulene, dvs antar $K_{rot}^{hjul} \ll K_{trans}^{bil}$]

$$\tau = N_F l_F + f h - N_B l_B = 0$$

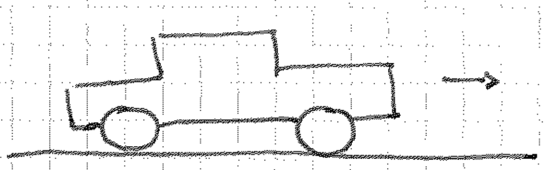
[Velger fritt $\tau = N_\perp \rho$ eller $\tau = N \rho_\perp$, der $N_\perp$ er komp. av $\vec{N}$ langs $\vec{\rho}$ og $\rho_\perp$ er komp. av $\vec{\rho}$ langs $\vec{N}$. Har her valgt sistnevnte variant.]

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{V}} = \frac{f}{M} = \underline{\frac{N_B l_B - N_F l_F}{M h}}$$

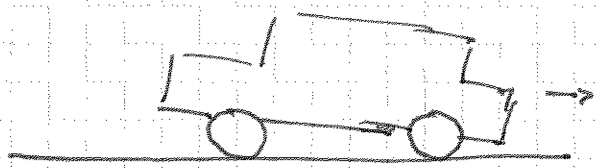
$\dot{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B l_B = N_F l_F$, OK; "vektstang"

$\dot{V} > 0 \quad \Rightarrow \quad N_B l_B > N_F l_F$, økt "vekt" på hjul bak

$\dot{V} < 0 \quad \Rightarrow \quad N_B l_B < N_F l_F$, —"— foran

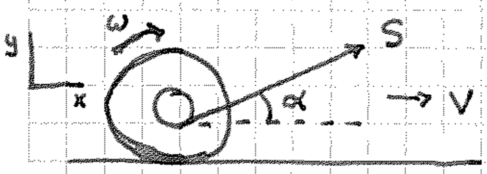


$\dot{V} > 0$



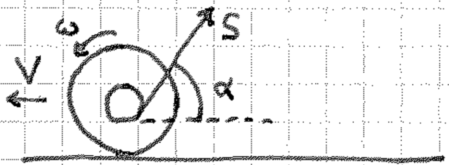
$\dot{V} < 0$

Eks 3: Snelle (Jojo)



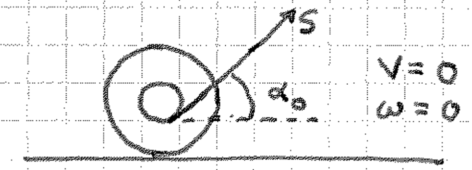
liten α ⇒ snella ruller mot høyre

$\Rightarrow \sum F_x > 0$ og $\sum \tau_i < 0$



stor α ⇒ ruller mot venstre

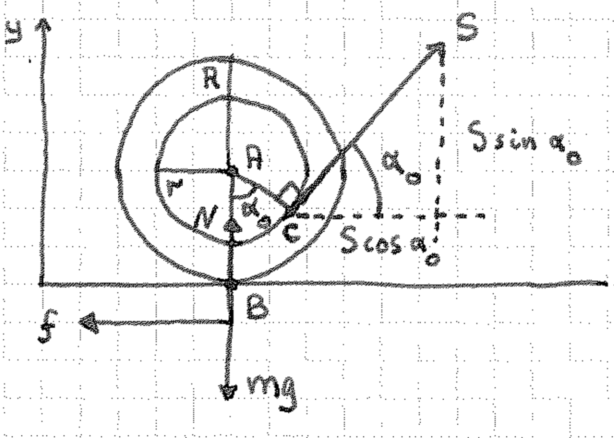
$\Rightarrow \sum F_x < 0$ og $\sum \tau_i > 0$



snelle i ro

$\Rightarrow \sum F_x = 0$ og $\sum \tau_i = 0$

$\boxed{\text{Bestem } \alpha_0}$ ($\sum F_y = 0$ i alle tilfeller)



Krefter på snella:

S = snordrag [kraft fra rett del av snor på "oppsnurret" del av snor i C, overført til snella som friksjonskraft fra snor på snelle]

f = friksjon, mg = tyngde,

N = normalkraft

$N2_x \Rightarrow S\cos\alpha_0 = f$

$N2_y \Rightarrow S\sin\alpha_0 + N = mg$ (trengs ikke for å finne α_0)

$N2_A \Rightarrow Sr = fR = SR\cos\alpha_0 \Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha_0 = r/R}}$

$2r = 157$ mm, $2R = 248$ mm $\Rightarrow \alpha_0 \approx \underline{51°}$

Alternativ:

$N2_B$: f, N og mg har <u>null arm</u> mhp B ⇒ null bidrag til τ_B

⇒ S må også ha null arm mhp B

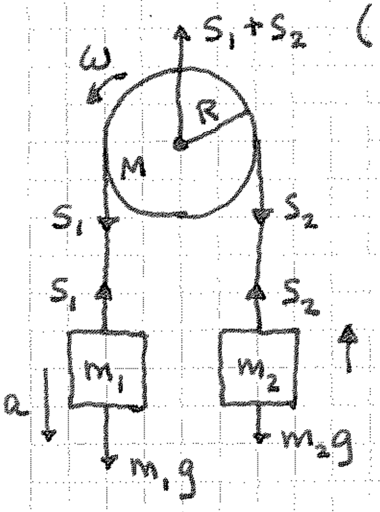
⇒ snoras forlengelse går gjennom B

⇒ <u>ser direkte fra figuren</u> at $\underline{\cos\alpha_0} = r/R$

Hit 15.10.12

16.10.12

Eks 4: Atwoods maskin (øving 8)



Anta at snora ikke glir på skiva

$\Rightarrow v = \omega R$ og $a = \dot{\omega} R$

N2, transl. for m_1 og m_2:

$$m_1 g - S_1 = m_1 a$$

$$S_2 - m_2 g = m_2 a$$

N2, rotasjon for skiva: $\tau = I_0 \dot{\omega}$

med $\tau = S_1 R - S_2 R$ og $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$

Dermed:

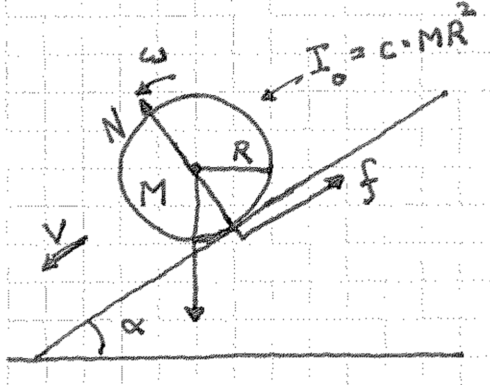
$$(S_1 - S_2) R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R a \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{2} M a$$

og $S_1 - S_2 = m_1 g - m_1 a - (m_2 a + m_2 g) = (m_1 - m_2) g - (m_1 + m_2) a$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g}}$$

(øv. 8: energibevarelse)

Eks 5: Rulling på skråplan [YF 10.3



- Hva blir $\dot{V}$ ved ren rulling?
- Hvor stor må μ_s minst være for å få ren rulling?

N2 (N1) $\perp$ skråplan $\Rightarrow a_\perp = 0 \Rightarrow N = Mg \cos\alpha$

N2 $\parallel$ skråplan $\Rightarrow Mg \sin\alpha - f = M\dot{V}$

N2, rotasjon om akse gjennom CM: $f \cdot R = I_0 \dot{\omega} = I_0 \dot{V}/R$

$$\Rightarrow f = I_0 \dot{V}/R^2 = c \cdot M \dot{V}$$

Dermed: $Mg \sin\alpha - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = g \cdot \frac{\sin\alpha}{1+c}}}$

som gir $f = cM\dot{V} = Mg \dfrac{c \sin\alpha}{1+c} \leq f_{max} = \mu_s N$

$= \mu_s Mg \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s^{min} = \dfrac{c}{1+c} \tan\alpha}}$ (for å få ren rulling)

	$c = \dfrac{I_0}{MR^2}$	$\dot{V}$	μ_s^{min}
Ring; Hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin\alpha$	$\frac{1}{2} \tan\alpha$
Bordtennisball	2/3	$\frac{3}{5} g \sin\alpha$	$\frac{2}{5} \tan\alpha$
! Sprettball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin\alpha$	$\frac{2}{7} \tan\alpha$
Skive	1/2	$\frac{2}{3} g \sin\alpha$	$\frac{1}{3} \tan\alpha$
"Mystisk sylinder"	~ 1/10	~ $\frac{10}{11} g \sin\alpha$	~ $\frac{1}{11} \tan\alpha$

<u>Friksjonens rolle ved rulling</u> [YF 10.3

Perfekt stivt legeme og underlag $\Rightarrow$ kontaktpunkt i ro

(dvs: legeme og underlag synkronisert i kontaktpunkt mhp rotasjon)

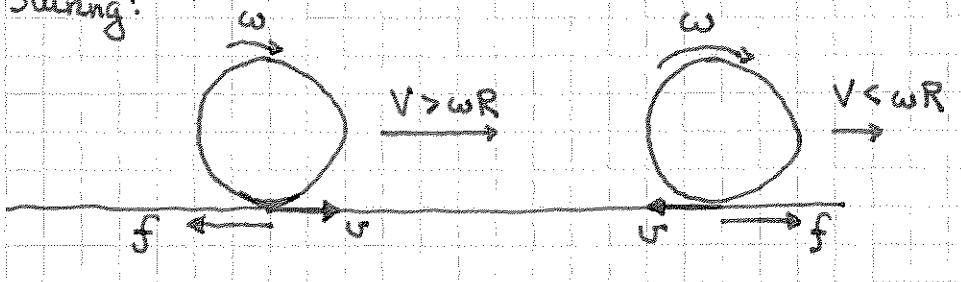
$\Rightarrow$ ingen mekanisk energi tapt pga friksjon ; "$\mu_r = 0$"

Men friksjonskrefter "sørger for" rulling, jfr $f \cdot R = I_0 \dot{\omega}$

i eks. 5 ovenfor, og <u>ren</u> rulling kun hvis $\mu_s \geq \mu_s^{min}$.

Ren rulling: $V = \omega R$, $A = \alpha R$, $f \leq \mu_s N$

Sluring:



$f = \mu_k N$

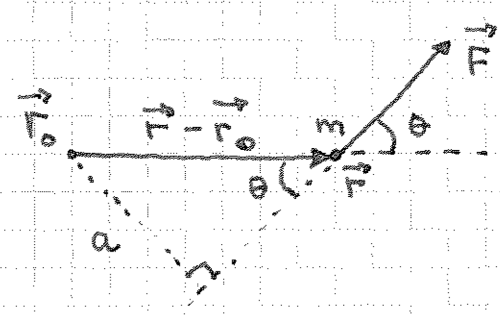
Som alltid er f rettet <u>mot</u> (potensiell) relativ bevegelse

i kontaktpunktet.

Rotasjonsdynamikk, vektorielt [YF 10.1+2+5+6+7, LL 5.5, 5.9, 6]

Dreiemoment [YF 10.1

Punktmasse m i pos. $\vec{r}$:



$$\vec{\tau} \overset{\text{def}}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}$$

$= \vec{F}$ sitt dreiemoment relativt $\vec{r}_0$, der $\vec{r}_0$ er et valgt referansepunkt

Retning:

$\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

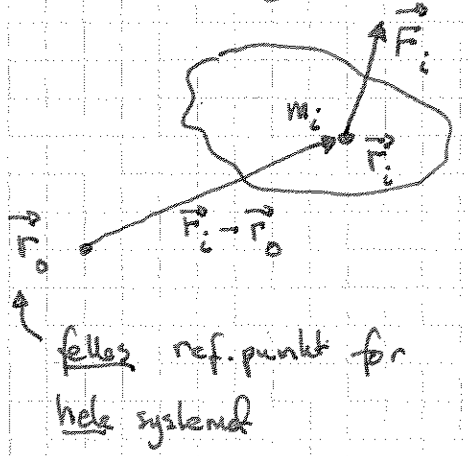
Fortegn via høyrehåndsregel ($\vec{\tau}$ ut av planet ovenfor)

Abs.verdi:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$$

med $a = |\vec{r}-\vec{r}_0| \sin\theta$ = kraftens arm = avst. fra $\vec{r}_0$ til linjen definert ved $\vec{F}$

For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$$

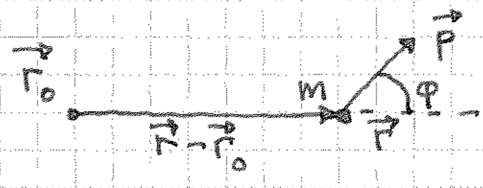
⇒ Totalt dreiemoment på systemet, relativt $\vec{r}_0$:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$$

[YF 10.5

Dreieimpuls (a.k.a. spinn) ("angular momentum") 65

Punktmasse m i pos. $\vec{r}$ med impuls $\vec{p} = m\vec{v}$:



$$\vec{L} \overset{\text{def}}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{p} = m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}$$

$=$ m's dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$ (= valgt ref. punkt)

Dermed følger:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

N2 for rotasjon, vektorielt
(Jfr. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, N2 for translasjon)

Bevis:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\right\}$$

Anta m = konst, og $\vec{r}_0$ = konst. (evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$)

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\vec{v}}_{=0} + m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\dot{\vec{v}}$$

$$\overset{N2}{=} (\vec{r}\times\vec{r}_0)\times\vec{F} \overset{\text{def}}{=} \vec{\tau} \qquad \underline{\text{Qed}}$$

Dreieimpulsbevarelse [YF 10.6

$$\boxed{\vec{\tau} = 0 \implies \vec{L} = \text{konst.}}$$ (Jfr: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$)

$\vec{L}$ = konst. for isolert system; like fundamentalt som at
$\vec{p}$ og E er konst. for isolert system

Hit 16.10.12