22.10.12

Dreieimpuls for stivt legeme [LL 6.6]

Fra sist:

$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ = dreiemoment relativ $\vec{r}_0$ (= valgt ref.punkt)

$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$ = dreieimpuls —— " ——

$\Rightarrow \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$; N2 for rotasjon

For partikkelsystem (m_i ; $i = 1, 2, \ldots$) :

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i$ = totalt dreiemoment på systemet, relativt $\vec{r}_0$

$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$ = total dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$

$\dot{\vec{L}}_i = \ldots \text{som sist} \ldots = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \underbrace{m_i \dot{\vec{v}}_i}_{= \vec{F}_i} = \vec{\tau}_i$

$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau}$; N2 for rotasjon

Fra før (s. 54): $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ = total kin. energi for stivt legeme

Tilsvarende:

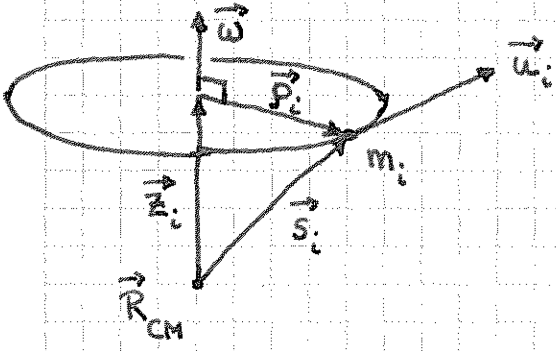
$$\boxed{\vec{L} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}}$$

= total dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$ for stivt legeme (med sylindersymmetri om $\hat{\omega}$)

Banedreieimpuls rel. $\vec{r}_0$: $M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn") : $I_0 \vec{\omega}$ (uavh. av $\vec{r}_0$)

Bevis (jfr s. 55):



relativkoord.

$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$

$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$ ← relativhastighet

$(\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra før: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V}$$

$$+ \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= banedreieimpulsen relativt $\vec{r}_0$ pga CM's bevegelse (jfr. $\vec{L}$ for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

$$= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.}$$ = dreieimpuls pga masseelementenes bevegelse relativt CM

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel.} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for vilkårlig partikkelsystem (ikke nødv. vis stivt legeme); alternativt $\int_M dm(\vec{s} \times \vec{u})$ for $\vec{L}_{rel}$ hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevise!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times s_i) = \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}\, s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \right\}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \right\}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \, \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

<u>Hvis</u> sylindersymmetri om $\hat{\omega}$, dvs om $\hat{z}$:

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra <u>like store</u> masseelementer i (x_i, y_i, z_i) og $(-x_i, -y_i, z_i)$ <u>kansellerer</u>.

Dette er <u>ofte</u> tilfelle, men ikke alltid.

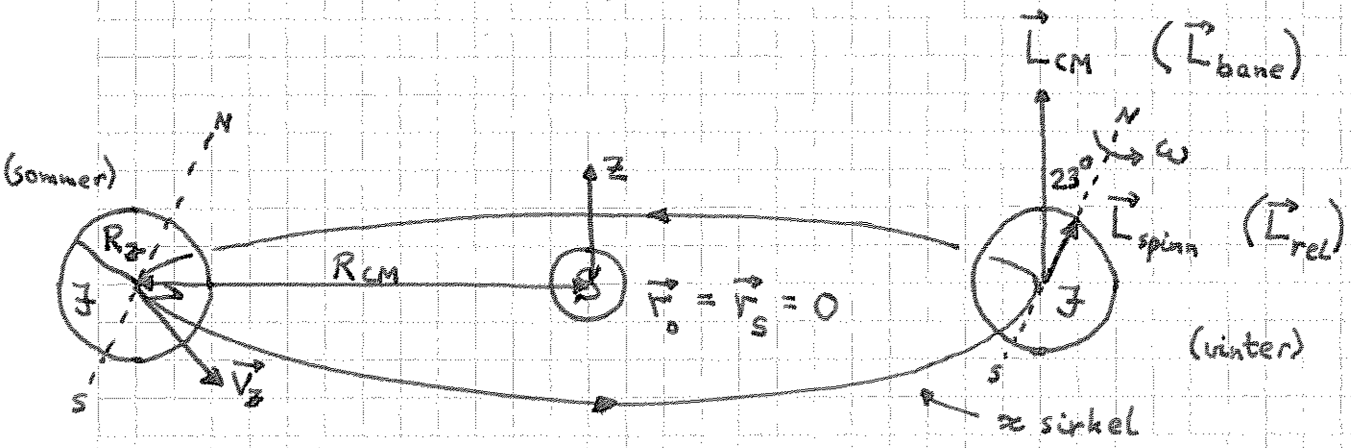
Men <u>hvis</u> sylindersymmetri om $\hat{\omega}$: $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

<u>qed</u>

Eksempler, rotasjonsdynamikk

Eks 1: Jordas dreieimpuls



$$\vec{L}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times M_J \vec{V}_J = R_{CM} M_J V_J \hat{z}$$

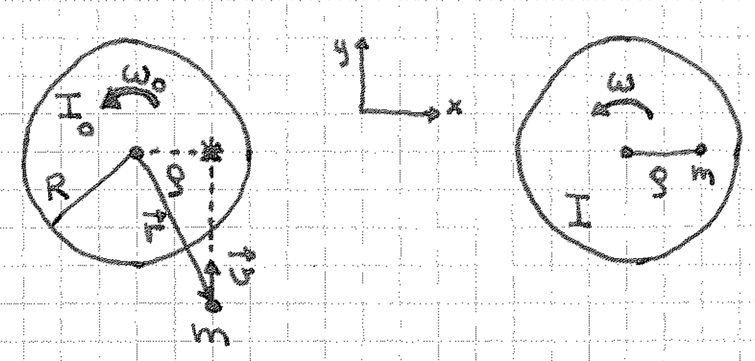
$$\vec{L}_{spinn} = I_0 \vec{\omega} \; ; \quad \omega = 2\pi / 24h$$

$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{spinn}$ = total dreieimpuls

$\approx \vec{L}_{CM}$ fordi $L_{spinn} \ll L_{CM}$ (Eks. des 2011, oppg 1f)

(23.10.12)

Eks 2: Innhopp på karusell



Masse m lander (*) uelastisk på karusellen, "støtparameter" ρ. Hva blir ω etter landing?

[Jfr Lab nr 6]
[og Eks. des 2011, oppg 4]

Løsn: $E \neq$ konst. (uelastisk støt)

$\vec{p} \neq$ konst. (ytre kraft $\vec{F}$ fra aksling på karusellen)

men

L_z = konst. relativt ref. punkt $\vec{r}_0$ i akslingen, fordi $\vec{F}$ har null arm, og dermed er $\vec{\tau}_{ytre} = 0$.

Før støt: $L_z^i = I_0 \omega_0 + m \rho v$

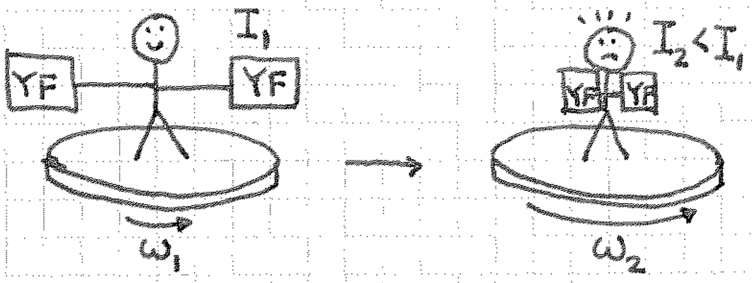
Etter støt: $L_z^f = I\omega$, med $I = I_0 + m\rho^2$

Dermed: $I_0\omega_0 + m\rho v = (I_0 + m\rho^2)\omega$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{I_0\omega_0 + m\rho v}{I_0 + m\rho^2}}} \underset{\omega_0 \neq 0}{\overset{\text{anta}}{=\!=}} \omega_0 \cdot \frac{I_0 + \frac{m\rho v}{\omega_0}}{I_0 + m\rho^2}$$

Ser at $\omega > \omega_0$ hvis $m\rho v/\omega_0 > m\rho^2$, dvs $v > \rho\omega_0$, dvs du (m) har større hastighet (v) enn landingsstedet ($\rho\omega_0$), og karusellen får en dytt mot klokka, som gir økt ω. OK!

(22.10.12) Eks 3: Piruett



$\vec{\tau}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$

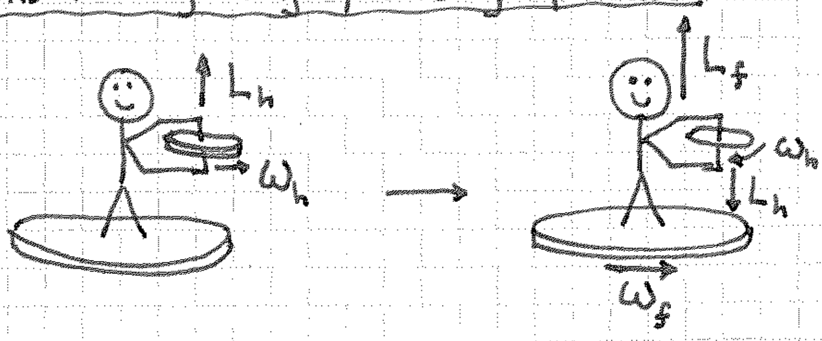
$\Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1$

$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2}$

$= K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1$

Eks 4: Sykkelhjul, stol og foreleser



$\Delta\vec{L} = 0$

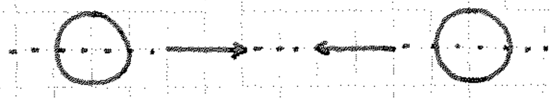
$\Downarrow$

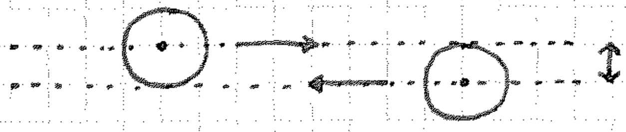
$L_f \approx 2 L_h$

Hit
22.10.12

23.10.12

Litt om ikke-sentralt støt [(YF Ex 8.6 + 8.12, LL 5.3)]

Sentralt støt:  (se s. 41)

Ikke-sentralt støt:  b = støt-parameter

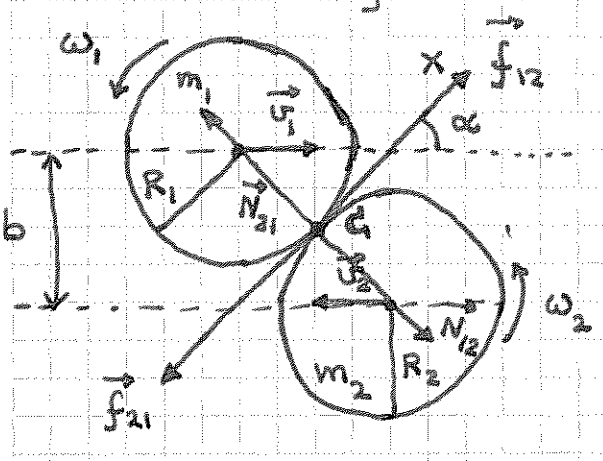
Komplikasjoner (sentralt → ikke-sentralt):

1D → 2D eller 3D

kun normalkrefter → normalkrefter og friksjon

ikke rotasjon → rotasjon

Kontaktpunkt i støtøyeblikket (like før, $t = 0^-$)
(anta sirkulære skiver, dvs 2D):
på friksjonsfritt underlag
(≈ curling!)



$\vec{F}_{12} = \vec{N}_{12} + \vec{f}_{12}$ = kraft fra 1 på 2

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ = kraft fra 2 på 1

Friksjon i kontaktpunkt C dersom relativ tangentiell hastighet $\Delta v_{Cx} \neq 0$.

$$\Delta v_{Cx} = v_{1Cx} - v_{2Cx} = (v_{1x} + \omega_1 R_1) - (v_{2x} - \omega_2 R_2)$$

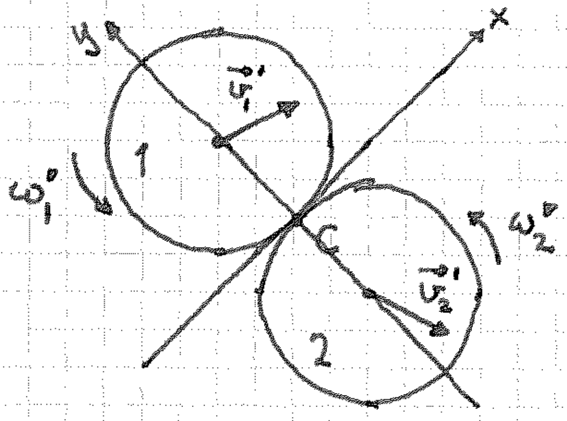
$$= v_1 \cos\alpha + \omega_1 R_1 - v_2 \cos\alpha + \omega_2 R_2$$

$$= (v_1 - v_2) \cdot \frac{b}{R_1 + R_2} + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$$

Da er $f = \mu \cdot N$ ($f = |\vec{f}_{12}| = |\vec{f}_{21}|$, $N = |\vec{N}_{12}| = |\vec{N}_{21}|$,
μ = kinetisk friksjonskoeff.)

($f = 0$ hvis $\Delta v_{Cx} = 0$; "synkronisert" kontaktpunkt)

Rett etter støtøyeblikket ($t = 0^+$):



Ukjente: $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, ω_1', ω_2'
(dvs. 6 skalare størrelser)

Prinsipper for løsning:

Ingen ytre krefter $\Rightarrow$ $\Delta\vec{p} = 0$ og $\Delta\vec{L} = 0$ $(\vec{L} = L_z\hat{z})$

Relativt C har alle krefter null arm, så da er

$\Delta L_z^1 = 0$ og $\Delta L_z^2 = 0$ (hver skive for seg).

Hva med energibevarelse? $K = K_t + K_r$ (transl. + rot.)

Hvis friksjon: $\Delta K < 0$ (alltid)

Hvis uelastisk støt langs y-aksen: $\Delta K < 0$

$\Delta K = 0$ kun hvis elastisk støt og synkronisert kontaktpunkt, $\Delta v_{cx} = 0$. Kan ha $\Delta K_t > 0$ og $\Delta K_r < 0$, evt. omvendt.

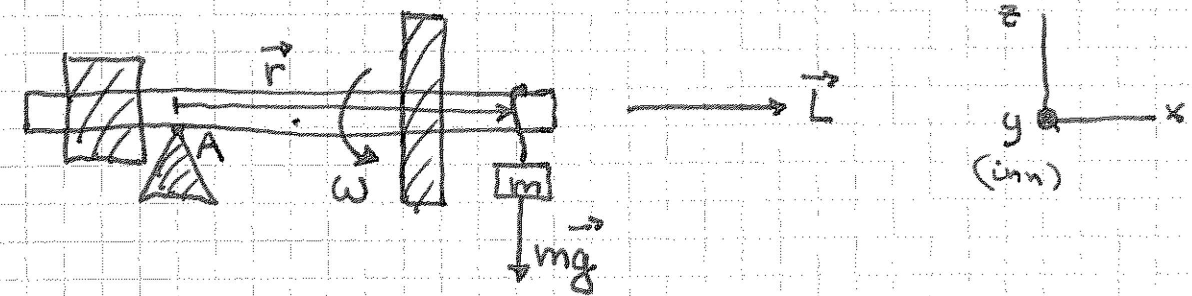
Friksjon reduserer $|\Delta v_{cx}|$, til null hvis μ er stor nok.

Snooker / Biljard: 2D $\vec{v}$, 3D $\vec{\omega}$, $v_2 = \omega_2 = 0$ (2 kuler)

Bordtennis: 1 kule i 3D ($m_2, R_2 \to \infty$; $v_2 = \omega_2 = 0$; bordet!)

Presesjon. Gyroskop, snurrebass [YF 10.7, LL 6.10]

Gyroskop, kvalitativt:



Uten lodd (m): (Dynamisk) Likevekt med roterende skive,

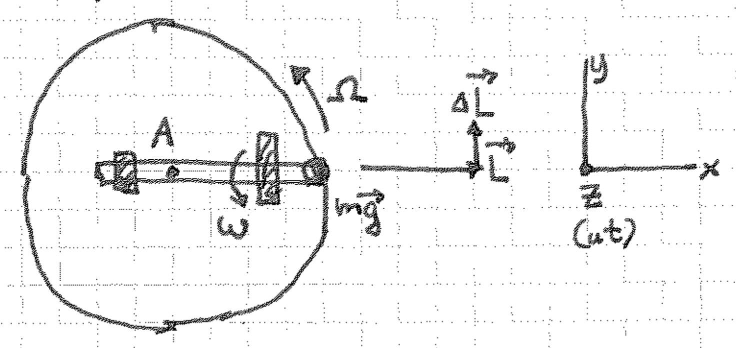
$$\vec{\omega} = \omega\hat{x} \; ; \quad \vec{L} = L_i \hat{x} \qquad (L_i = I_{skive} \cdot \omega)$$

Med lodd (m) i avstand $\vec{r}$ fra A:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = mrg\,\hat{y}$$

$\Rightarrow \Delta\vec{L} \sim \hat{y} \Rightarrow$ rotasjon mot klokka (sett ovenfra) om z-aksen, presesjon, vinkelfrekvens Ω ($\ll \omega$)

Sett ovenfra:



Observerer:

- større $m\vec{g}$ $\Rightarrow$ raskere presesjon
- lengre $\vec{r}$ $\Rightarrow$ —— " ——
- vipping opp og ned ("nutasjon") (se TFY4345)

Hit 23.10.12