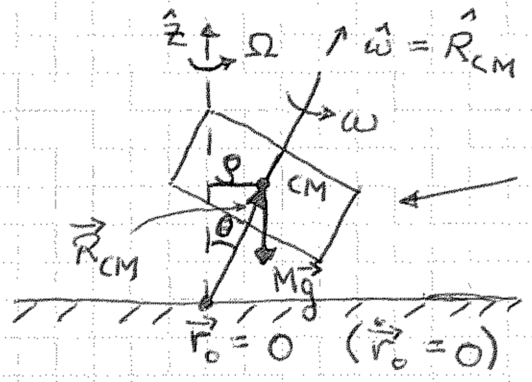
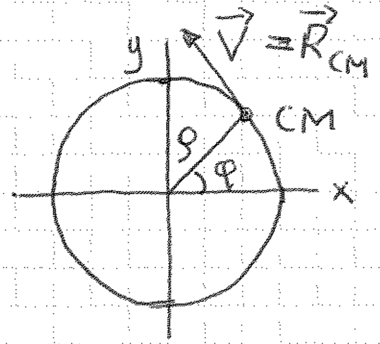
29.10.11

Eks: Snurrebass.



snurrebass; sylindersymm. om $\hat{\omega}$;
tregh.mom. I_0 mhp $\hat{\omega}$-aksen

raskt spinn om $\hat{\omega}$, langsom presesjon om $\hat{z}$, $\omega \gg \Omega$



$$\rho = R_{CM} \sin\theta$$

$$V = \rho\,\Omega$$

$$\boxed{\text{Bestem } \Omega \text{ !}}$$

Total dreieimpuls (mhp $\vec{r}_0$): $\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}$

N2, rotasjon: $\vec{\tau} = \mathring{\vec{L}}$

Ytre dreiemoment (mhp $\vec{r}_0$):

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM}\, M g\, \sin(\pi - \theta)\, \hat{\varphi}$$
$$= R_{CM}\, M g\, \sin\theta\, \hat{\varphi}$$

$$\mathring{\vec{L}} = M\vec{R}_{CM} \times \mathring{\vec{V}} + I_0 \omega\, \mathring{\hat{\omega}} \qquad (\mathring{\vec{R}}_{CM} \times \vec{V} = 0 \text{ og } \omega = \text{konst.})$$

$$|\vec{R}_{CM} \times \mathring{\vec{V}}| = |R_{CM}\hat{R}_{CM} \times (-\frac{V^2}{\rho}\hat{\rho})|$$
$$= R_{CM}\,\Omega^2 \rho\, |\hat{R}_{CM} \times \hat{\rho}|$$
$$= R_{CM}\,\Omega^2 \rho\, \sin(\pi/2 - \theta)$$
$$= R_{CM}\,\Omega^2 \rho\, \cos\theta \qquad (\rho = R_{CM}\sin\theta)$$
$$= R_{CM}^2\,\Omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$|I_0 \omega \dot{\hat{\omega}}| \approx M R_{CM}^2 \omega |\dot{\hat{\omega}}|$$

$$|\dot{\hat{\omega}}| = |\dot{\hat{R}}_{CM}| = \frac{1}{R_{CM}} |\dot{\vec{R}}_{CM}| = \frac{V}{R_{CM}} = \frac{\Omega R_{CM} \sin\theta}{R_{CM}} = \Omega \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dL_{bane}/dt}{dL_{spinn}/dt} \approx \frac{M R_{CM}^2 \Omega^2 \sin\theta \cos\theta}{M R_{CM}^2 \omega \Omega \sin\theta} = \frac{\Omega \cos\theta}{\omega} \ll 1$$

$$\Rightarrow |\vec{\tau}| \approx |I_0 \dot{\vec{\omega}}|$$

$$\Rightarrow M g R_{CM} \sin\theta \approx I_0 \omega \Omega \sin\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega \approx M g R_{CM} / I_0 \omega}$$

Antagelsen $\omega \gg \Omega$ betyr nå

$$\omega \gg M g R_{CM} / I_0 \omega, \quad \text{dvs} \quad \omega \gg \sqrt{\frac{M g R_{CM}}{I_0}} \approx \sqrt{\frac{g}{R_{CM}}}$$

$I_0 \approx M R_{CM}^2$

Leketøy: $R_{CM} \sim 5\text{ cm} \Rightarrow \omega \gg \sqrt{10/0.05} \sim 14\text{ s}^{-1}$

$\Rightarrow T_\omega \ll 0.45\text{ s}$; lett å realisere!

Sykkelhjul, kvalifiserte gjetninger:

$T_\omega \sim \frac{1}{5}\text{ s}$, $R_{CM} \sim \frac{1}{5}\text{ m}$, $M \sim 4\text{ kg}$, $R \sim \frac{1}{4}\text{ m}$, $g \approx 10\text{ m/s}^2$

$$\Rightarrow T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi I_0 \omega}{M g R_{CM}} = \frac{2\pi M R^2 \cdot 2\pi / T_\omega}{M g R_{CM}}$$

$$\sim \frac{4\pi^2 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot 5}{10 \cdot (1/5)} = \frac{5\pi^2}{8} \approx \frac{48}{8} = \underline{6\text{ s}}; \quad \text{Rimelig!?}$$

[For flere detaljer: TFY4345 Klassisk mekanikk.]

Roterende koordinatsystem [LL 2.8 + 2.9]

S' : bakken (inertialsystem)

S_1, S_2 : karuseller (roterende koord. system)

m_1 i ro i S', m_2 i ro i S_2

$\Rightarrow$ $a_1' = 0$ $\qquad a_2' = \omega^2 r_2$ (inn mot sentrum)

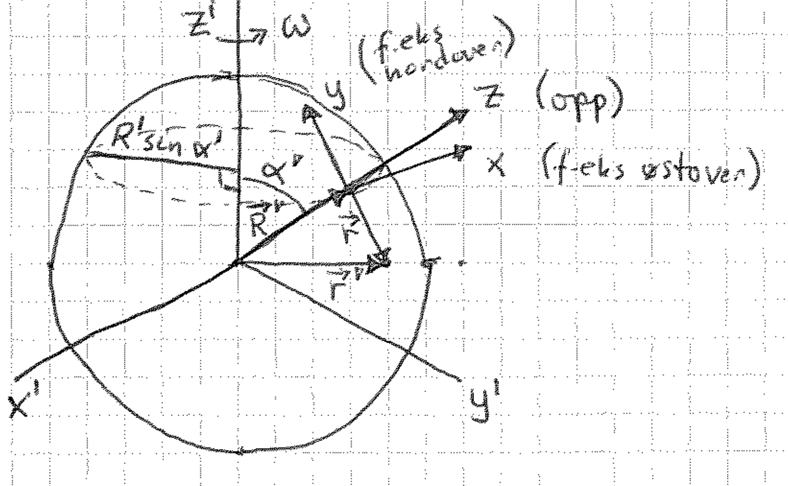
$a_1 = \omega^2 r_1$ $\qquad a_2 = 0$

(inn mot sentrum)

$\overset{N2}{\Rightarrow}$ $F_1' \neq F_1$ $\qquad F_2' \neq F_2$

Hvordan beskrive dette generelt?

Bruker jordkloden som eksempel, $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{24\,h}\,\hat{z}'$:



$\vec{R}'$ = origo i S (målt i S')

$\vec{r}'$ = legemets pos. målt i S'

$\vec{r}$ = —— " —— S

$\vec{r}' = \vec{R}' + \vec{r}$

Vil se på $\vec{A}$ = fysisk vektorstørrelse, som kan måles i S (som roterer med jorda) og S' (som ligger fast; inertialsystem); f.eks. $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ osv.

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'}$ = endring i $\vec{A}$ pr tidsenhet i S'

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}$ = ——— " ——— S

Når S roterer med vinkelhast. $\vec{\omega}$ i S', er

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S}}$$

Eks: $\vec{A}$ = Trondheims posisjon = $\vec{r}'$ målt i S'

Legg origo i S i Trondheim $\Rightarrow \vec{r} = 0$, $\vec{r}' = \vec{R}'$

Dermed: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = 0$, $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$

Fra fig. s 76: $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{R}' = \omega R' \sin\alpha' \, \hat{\varphi}'$

OK! $(d\vec{r}'/dt)_{S'}$ = Trondheims hastighet målt i S'

$\omega R' \sin\alpha' \, \hat{\varphi}'$ = hastighet for uniform sirkelbevegelse med radius $R' \sin\alpha'$ og vinkelhast. ω

<u>Dynamikk</u> i roterende koord. system:

Ønsker å finne sammenheng mellom $\{\vec{F}'$ = kraft på legemet i $S'\}$ og $\{\vec{F}$ = kraft på legemet i $S\}$

$\overset{N2}{\Longrightarrow}$ sammenhengen mellom $\vec{a}'$ og $\vec{a}$ søkes

Løsning: Ligningen ovenfor med $\vec{A} = \vec{r}'$ og
deretter $\vec{A} = \vec{v}' = d\vec{r}'/dt$

1) $\vec{A} = \vec{r}\,'$:

$$\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}$$

$\parallel$

$\vec{v}\,'$ = legemets hast. i S'

$$\vec{u} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \underbrace{\left(\frac{d\vec{R}\,'}{dt}\right)_S}_{=\,0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \text{legemets hast. i } S$$

($\vec{R}\,'$ fast i S)

2) $\vec{A} = \vec{v}\,' = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'}$:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'}}_{=\,\vec{\omega}\times\vec{r}\,'+\vec{u}}\right)_S$$

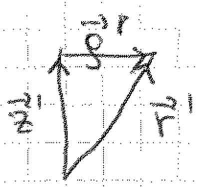
$\parallel$

$\vec{a}\,'$ = legemets aks. i S'

$$\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}\right]$$

Identitet (s 68): $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,') - \vec{r}\,'\omega^2$$



$$= \vec{\omega}\left[\omega\hat{z}' \cdot (z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\right] - (z'\hat{z}' + \rho'\hat{\rho}')\,\omega^2$$

$$= \underbrace{\vec{\omega}\,\omega z' + 0 - z'\hat{z}'\omega^2}_{=\,0} - \vec{\rho}\,'\omega^2$$

Hit 29.10.12

$$= -\omega^2\vec{\rho}\,' \quad \text{[legemets sentripetalaks. i } S'\text{]}$$

30.10.12

$$\left(\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{u}\right]\right)_S = \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_S = \vec{u}$, $\quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}$

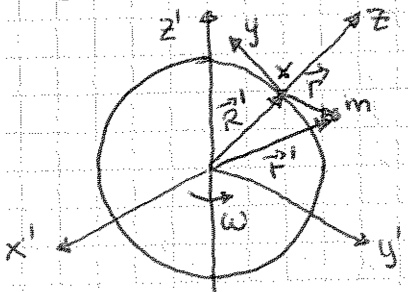
$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right)_{S'} = -\omega^2\vec{\rho}\,' + 2\,\vec{\omega}\times\vec{u} + \vec{a}$$

$\parallel$

$\vec{a}\,'$

30.10.12, inkl. rep. fra 29.10.12:

Dynamikk i roterende system [LL 2.8, 2.9]



$S'(x'y'z')$: fast (roterer ikke med jorda!)

$S(x\,y\,z)$: roterer om z', vinkelhast. $\vec{\omega} = \omega\hat{z}'$

$\vec{r}'$ = legemets pos. i S' $\quad (\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}')$

$\vec{r}$ = —— " —— S

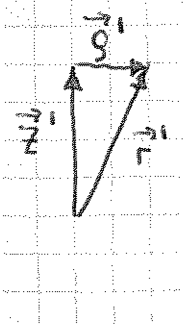
$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S \qquad \boxed{*}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{endring av}\\ \vec{A} \text{ i } S'\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{endring av } \vec{A}\\ \text{fordi } S\\ \text{roterer i } S'\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{endring av}\\ \vec{A} \text{ i } S\end{matrix}\right\}$$

$\boxed{*}$ med $\vec{A} = \vec{r}'$ $\Rightarrow$ $\mathring{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{u}$ $\quad (\vec{u} = \mathring{\vec{r}}_S)$

$\boxed{*}$ med $\vec{A} = \mathring{\vec{r}}'$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{u}] + \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{u}\right)\right)_S$$



$$= -\omega^2 \vec{\rho}' + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \mathring{\vec{u}}$$

↑ fordi $(d\vec{r}'/dt)_S = (d\vec{r}/dt)_S = \vec{u}$

$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{rotasjon av } S\\ \text{(sentripetalaks.)}}}{-\omega^2 \vec{\rho}'} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{u} + \ddot{\vec{r}}}_{\text{bidrag pga legemets bevegelse i } S} \qquad (\ddot{\vec{r}} = \mathring{\vec{u}} = \vec{a})$$

N2 i S': $\vec{F}' = m\vec{a}' = m\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)_{S'}$

N2 i S: $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{u}} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S$

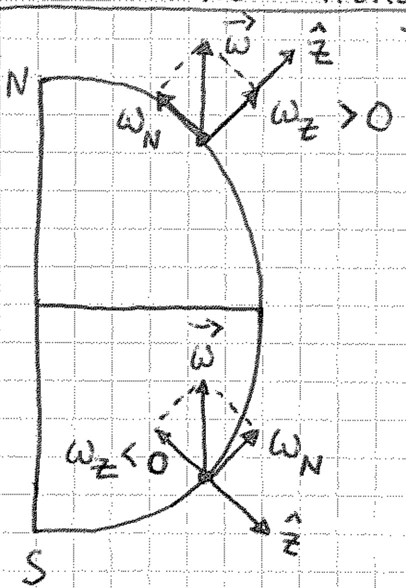
$$\Rightarrow \vec{F}' = -m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\vec{\omega}\times\vec{u} + \vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}' + m\omega^2\vec{\rho}' + 2m\vec{u}\times\vec{\omega}}$$

$m\omega^2\vec{\rho}'$ = sentrifugalkraften, retning normalt på og <u>bort frå</u> rot. aksen

$2m\vec{u}\times\vec{\omega}$ = Corioliskraften, retning normalt på $\vec{u}$ og $\vec{\omega}$, virker kun på legemer som er i bevegelse i S (dvs $\vec{u} \neq 0$)

<u>Eks 1: Vindretning rundt lavtrykk</u>



$$\vec{F}_c = 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \omega_z\hat{z} + \omega_N\hat{N}$$

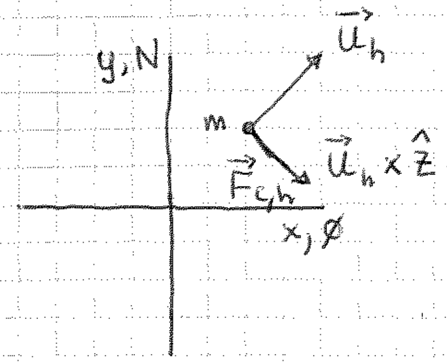
Anta horisontal vind: $\vec{u} = \vec{u}_h$

Vertikalt: $mg \gg F_{c,v}$

$\Rightarrow$ ser på $\vec{F}_{c,h} = 2m\left(\vec{u}_h\times\vec{\omega}\right)_h$

$$= 2m\,\omega_z\left(\vec{u}_h\times\hat{z}\right)$$

Nordlige halvkule

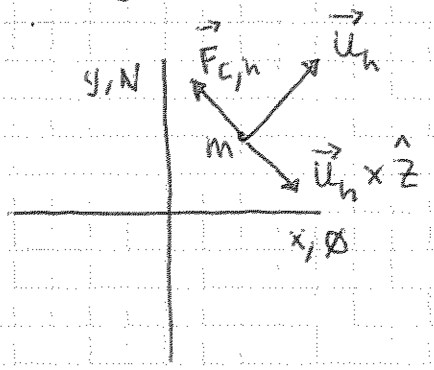


$\omega_z > 0$

$\Rightarrow \vec{F}_{c,h} \sim + \vec{u}_h \times \hat{z}$

$\Rightarrow$ avbøyning mot <u>høyre</u>

Sørlige halvkule

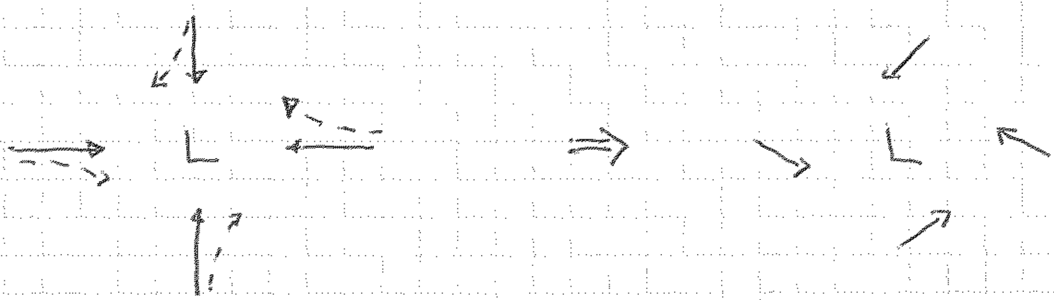


$\omega_z < 0$

$\Rightarrow \vec{F}_{c,h} \sim - \vec{u}_h \times \hat{z}$

$\Rightarrow$ avbøyn. mot venstre

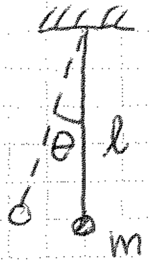
Værkart, nordl. halvkule (L = lavtrykk):



$\vec{F}_{c,h}$ $\Rightarrow$ avbøyn. mot høyre $\Rightarrow$ strømning <u>mot</u> klokka rundt L

På sørl. halvkule: strømning <u>med</u> klokka rundt L

Eks 2: Foucaultpendelen



Pendel i Realfagbygget:

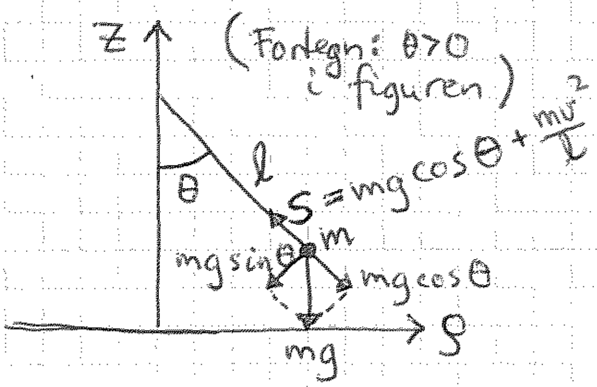
$\ell = 25\ m, \quad T = 10\,s$

max utsving $\approx 1\,m$

$\Rightarrow \theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ hele tiden

"Rask" svingning frem og tilbake, periode T_0 }
Langsom rotasjon av svingeplanet, periode T_F }
Bestem T_0 og T_F!

T_0 er bestemt av tyngdekraften:



N2 tangentielt til sirkelbanen:

$$-mg\sin\theta = ma$$

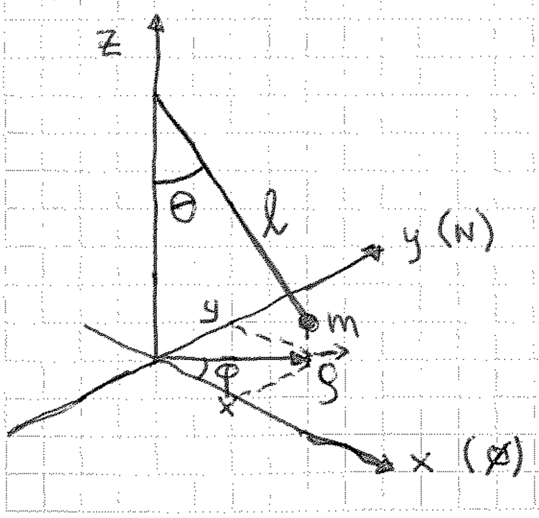
Her er: $a = \ell\ddot{\theta}$ og $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Løsning: $\theta(t) = A\sin\Omega_0 t + B\cos\Omega_0 t$

med $\Omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, dvs $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\ell/g}}}$

T_F er bestemt av Corioliskraften:

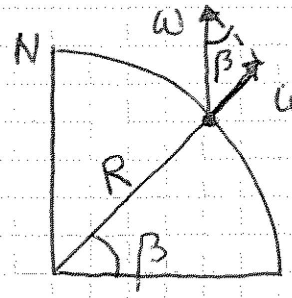


$$\vec{F}_c = 2m\,\vec{u}\times\vec{\omega}$$

$$\vec{u} \approx \vec{u}_h = \dot{\vec{\rho}} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$$

$$\vec{F}_{c,h} = 2m(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})\times\omega_z\hat{z}$$

$$= 2m\omega_z(\dot{y}\hat{x} - \dot{x}\hat{y})$$



$\omega_z = \omega \sin\beta$; β = breddegraden (Trondheim: ca $63.5°$)

Snordraget: $\vec{S} = S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z}$

$$S_x = -mg \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} \cdot \underbrace{\sin\theta}_{= \rho/\ell} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{= x/\rho} \approx -mg\, x/\ell$$

$$S_y = -mg \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} \cdot \underbrace{\sin\theta}_{= \rho/\ell} \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{= y/\rho} \approx -mg\, y/\ell$$

[NB: Bidraget mu^2/ℓ til $\vec{S}$ er neglisjerbart for små utsving, $\frac{\rho_{max}}{\ell} \ll 1$]

Total horisontal kraft på m:

[ser bort fra det konstante bidraget fra sentrifugalkraften, $\omega^2 R\cos\beta \sin\beta$, rettet sørover på nordlige halvkule]

$$\vec{F}_h = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$$

der

$$F_x = S_x + F_{cx} \approx -mg\,x/\ell + 2m\dot{y}\,\omega \sin\beta$$

$$F_y = S_y + F_{cy} \approx -mg\,y/\ell - 2m\dot{x}\,\omega \sin\beta$$

$$\overset{N2}{\Longrightarrow} \quad \ddot{x} - 2\varepsilon \dot{y} + \Omega_0^2 x = 0 \qquad (\varepsilon = \omega \sin\beta)$$

$$\ddot{y} + 2\varepsilon \dot{x} + \Omega_0^2 y = 0 \qquad (\Omega_0^2 = g/\ell)$$

$$\frac{\varepsilon}{\Omega_0} = \frac{\omega \sin\beta}{\sqrt{g/\ell}} \overset{\text{Vår pendel}}{=} \frac{2\pi \sin 63.5° / 24 \cdot 3600}{\sqrt{9.81/25}} \approx 10^{-4} \ll 1$$

Med initialbetingelser $x(0) = y(0) = 0$ og $\vec{u}(0) = V\hat{x}$ er løsningen (med god tilnærmelse):

$$x(t) = \frac{V}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \cos \varepsilon t$$

$$y(t) = -\frac{V}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \sin \varepsilon t$$

Rask svingning ($\sin \Omega_0 t$), periode $T_0 = 2\pi / \Omega_0 = 10\,s$.
Langsom dreining av svingeplanet ($\cos \varepsilon t$, $\sin \varepsilon t$),
periode $T_F = 2\pi/\varepsilon = 2\pi/\omega \sin\beta = 24h/\sin\beta \overset{(\text{her!})}{\approx} 26.8\,h$
$\Rightarrow$ ca 13.4 h for å velte alle pinnene i V3.

I MATLAB-programmet foucault_anim.m illustreres dreiningen av svingeplanet ved at pendelkulas posisjon (ved max utsving) merkes av ca hver halve time, over 13.5 timer.

Hit
30.10.12