03.09.12

Enkleste eksempel : $\vec{a}$ = konstant

Anta $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ (gitte initialbetingelser)

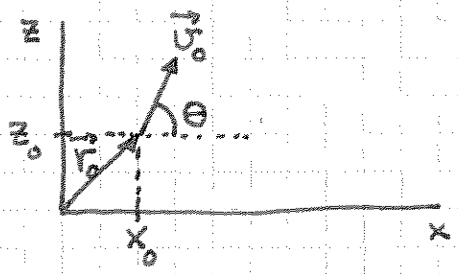
Da er

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

Eks: Kast i tyngdefeltet ($\vec{a} = -g\hat{z}$)

Ved $t_0 = 0$:



$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$= x_0 + v_0 t \cos\theta \qquad (a_x = 0)$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir banen:

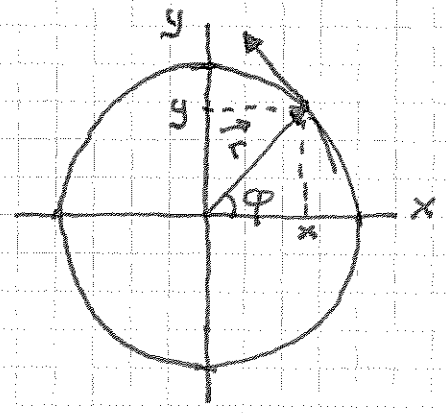
$$z(x) = z_0 + [x(t) - x_0] \tan\theta - \frac{g}{2} \frac{[x(t) - x_0]^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

(dvs en parabel)

Øving 1: mer om kast i tyngdefeltet

Sirkelbevegelse [YF 3.4, LL 1.7, eks. 1.6]

Anta først konstant $v = |\vec{v}|$ (*uniform* sirkelbev.) i xy-planet:



Fra figuren: $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

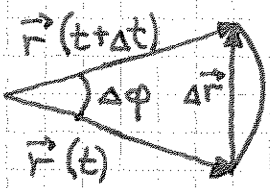
$r = |\vec{r}| = \text{konst.}$

$\vec{r} = r\cos\varphi \cdot \hat{x} + r\sin\varphi \cdot \hat{y}$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}} \qquad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel = buelengde delt på radius: $\boxed{\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}}$

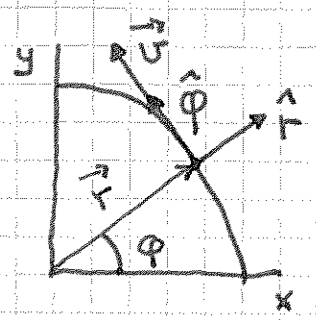


Δs = sirkelbueelement

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0, \; \Delta\vec{r} \perp \vec{r}, \; |\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r\Delta\varphi$

$$\Rightarrow \underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\dot{\varphi} = \underline{r\omega}$$

Retning på $\vec{v}$: $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}, \; \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$



$\vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$

$\hat{\varphi}$ = enhetsvektor i φ-retning (dvs retning som øker φ uten å endre r)

Med konstant ω øker φ lineært med t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega\, dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t \quad \left(\begin{matrix}\text{hvis}\\ \varphi(0)=0\end{matrix}\right)$$

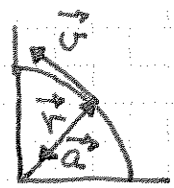
Dermed:
$$\vec{r}(t) = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{v}(t) = -r\omega\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse: <u>Sentripetalaks.</u>

$$\vec{a}(t) = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{y} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

Med $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/r$ og $v = \omega r$:

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$



Merk: $\hat{r}$ og $\hat{\varphi}$ avhenger av posisjonen x, y og dermed tida t

Flere nyttige størrelser:

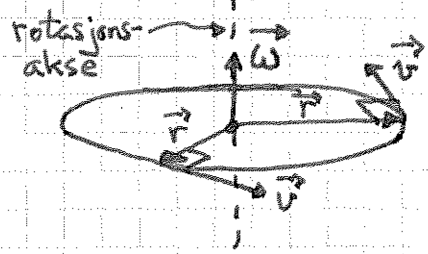
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\quad [\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = tid pr omdreining $\quad [T] = s$

Frekvens: f = antall omdr. pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

$(\Rightarrow v = 2\pi r/T,\ T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega,\ f = 1/T = \omega/2\pi)$

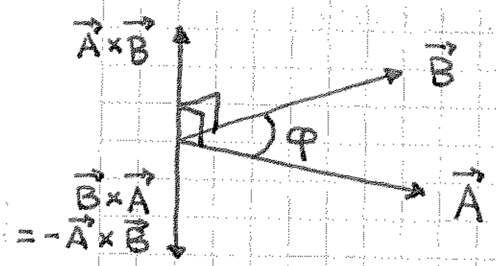
Vinkelhastighet som vektor:



Lar $\vec{\omega}$ peke langs rot. aksen

$\Rightarrow$ vi kan skrive $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Kryssprodukt (vektorprodukt):



$|\vec{A}\times\vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin\varphi$

Retning med høyrehåndsregel

For sirkelbevegelsen: $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ (og $\vec{\omega} \times \vec{v}$)

$\Rightarrow |\vec{\omega}\times\vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega r = v$; OK

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ mot klokka

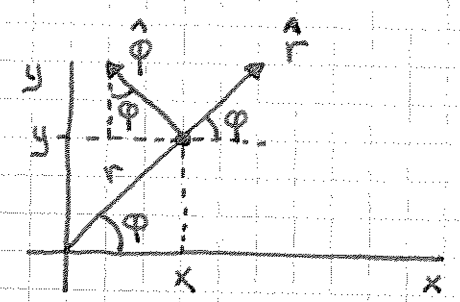
$\vec{\omega}$ ned $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ med klokka

For enhetsvektorer:

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$

$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$

Polarkoordinater:



Fra figuren: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\varphi = y/x$

Videre: $\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$

$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0, \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$

$\hat{r}\times\hat{\varphi} = \hat{z}, \quad \hat{z}\times\hat{r} = \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi}\times\hat{z} = \hat{r}$

HcL
03.09.12

[I 3D: polarkoordinater r, φ + z

= sylinderkoordinater

Da hensiktsmessig med $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ som utgangspunkt, og innføre $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ osv.]

04.09.12

Newtons lover [YF 4, LL 2]

- Empiriske lover (basert på eksperimenter)
- Historikk : se YF 4-intro, LL 1 - Essay

1. lov (N1) : $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Null netto ytre kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet

2. lov (N2) : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Netto ytre kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ legemet får akselerasjon proporsjonal med $\vec{F}$; m = legemets masse

[Senere : generalisering av N2 når m endrer seg]

3. lov (N3) : $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

A virker på B med $\vec{F}_{AB}$ $\Rightarrow$ B virker på A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

- Enhet: $[F] = [m \cdot a] = kg \cdot m/s^2 \equiv N$ (newton)
- Krefter virker <u>mellom</u> legemer (N3) ; legemene <u>vekselvirker</u> ("interact")

Fundamentale vekselvirkninger (v.v.) [YF 5.5, LL 2.1]

Gravitasjon [FY1001/TFY4145, FY3452]:

Tiltrekkende kraft mellom legemer pga masse.
Uendelig lang rekkevidde. Meget svak.

Elektromagnetisk v.v. [FY1003/TFY4155, TFY4240, FY3464, ...]:

Tiltr. eller frastøtende kraft pga elektrisk ladning.
Uendelig lang rekkevidde. Mye sterkere enn gravitasjon.

Svake v.v. [FY3402, FY3403, FY3466]:

Kort rekkevidde ($\sim 10^{-18}$ m). Årsak til β-decay,
f.eks. $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$
(nøytron) (proton) (elektron) (antinøytrino)

Sterke v.v. [FY3466]:

Kort rekkevidde ($\sim 10^{-15}$ m). Holder kjernepartikler sammen i atomkjernen. Sterkere enn el.magn. krefter på avstand $\lesssim 10^{-15}$ m.

Forening av krefter:

60- og 70-åra: El.magn. + Svake v.v. $\rightarrow$ Elektrosvak v.v.
Verifisert eksperimentelt

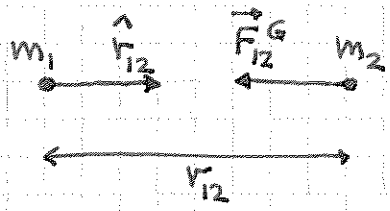
Senere: Grand Unified Theory (E.m. + Svak + Sterk v.v.)
Strengteori
"Theory of everything"
} Ikke verifisert pr i dag

Mek. Fys: Kun gravitasjon og el.magn. krefter relevante

Gravitasjon vs elektrostatiske krefter

Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{12}^{\,G} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$$

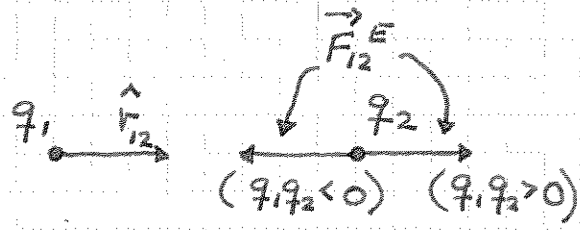


$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

(= gravitasjonskonstanten; måles i Lab nr 4)

Coulombs lov: (verifiseres på lab i El.Mag.)

$$\vec{F}_{12}^{\,E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$$



$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$; $[q] = C$ (coulomb)

(ε_0 = vakuumpermittiviteten; mer i FY1003/TFY4155)

Hva er $|F^G/F^E|$ for (f.eks.) to elektroner?

$m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = -e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$$\Rightarrow |F^G/F^E| = \frac{G \cdot m_e^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{e^2} \approx 2 \cdot 10^{-43} \quad !$$

Men: nøytrale atomer og molekyler har like mange protoner ($q_p = e$) og elektroner ($q_e = -e$)

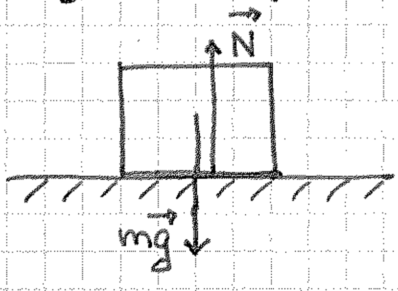
$\Rightarrow Q_{\text{atom (molekyl)}} = 0$

$\Rightarrow$ elektriske krefter $\underbrace{\text{er}}_{\text{(nesten!)}}$ nøytralisert pga at tiltr. og frastøt. krefter kansellerer

$\Rightarrow$ dagliglivet styres av både gravitasjon (tyngdekrefter) og el.magn. krefter

Elektrostatiske krefter i mekanikken:

Trykk-kraft (Normalkraft)

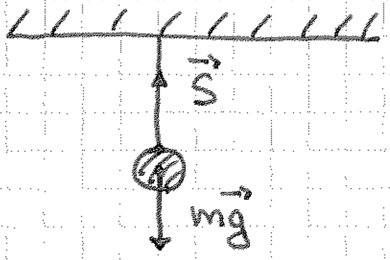


kloss i ro $\overset{N1}{\Longrightarrow}$ $N = mg$

normalkraft N skyldes frastøtende coulombkrefter mellom kloss og underlag

[Hva er "motkraft" til hhv $\vec{N}$ og $m\vec{g}$? Jf. N3.]

Strekk-kraft (Snordrag)



kule i ro $\overset{N1}{\Longrightarrow}$ $S = mg$

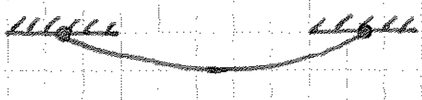
snordrag S skyldes tiltrekkende coulombkrefter mellom kule og snor

[Hva er motkraft til $\vec{S}$?]

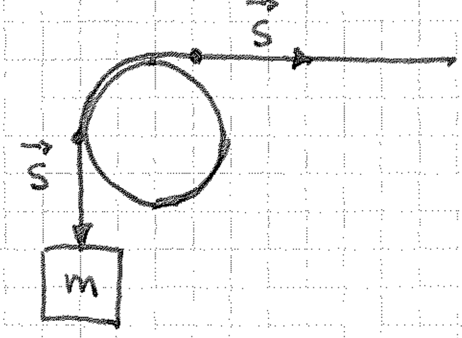
Lett snor (tau, stang) antas som regel masseløs, $M \approx 0$.

Da er S like stor langs hele snora, som blir rett.

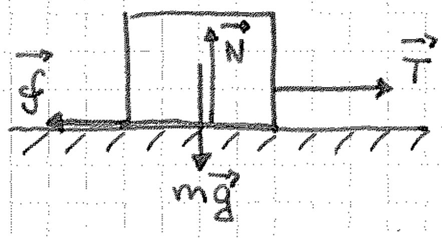
Opphengt snor med masse:



Retningsendring med trinse e.l:



Friksjonskrefter



$\vec{T}$ = ytre trekk-kraft

$\vec{f}$ = friksjonskraft

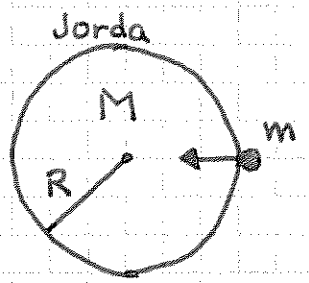
Kloss i ro $\overset{N1}{\Rightarrow}$ $f = T$ (evt. v = konst.)

Hvis kloss akselererer : $f < T$

[Hva er motkraft til $\vec{f}$ og $\vec{T}$?]

Alt dette (normalkraft, snordrag, friksjon) er eksempler på kontaktkrefter (coulombkrefter mellom legemer som praktisk talt berører hverandre).

Masse og tyngde [YF 4.4, LL 2.5]



M = jordas masse $\approx 6 \cdot 10^{24}$ kg

R = –"– radius ≈ 6370 km

Masse m på jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med tyngdekraften

$F = mg$ med $g = \dfrac{G \cdot M}{R^2} \approx 9{,}8\ m/s^2$ (tyngdens akselerasjon)

Hvis mg er eneste kraft : "fritt fall"

N2 gir da : $mg = ma$ $\Rightarrow$ $\underline{a = g}$

Hit
04.09.12