05.11.12

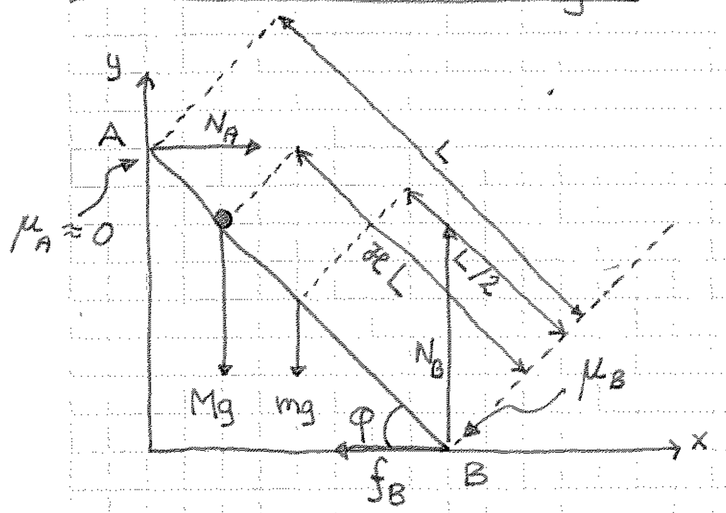
Statisk likevekt [YF 11.1 - 11.3, LL 7.1]

Et legeme er i statisk likevekt når

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{(sum av ytre krefter = 0)}$$

og $$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \text{(sum av ytre dreiemoment = 0, mhp et vilkårlig valgt ref. punkt } \vec{r}_0 \text{)}$$

Eks 1: Person i stige



m = stigens masse
M = personens —"—
$\varkappa L$ = avstand fra B til M
Antar $\mu_A = 0$ ($\Rightarrow f_A = 0$)

Spm:

Minimal φ uten at stigen glir?

Maksimal $\varkappa$ —"— ?

$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_B = N_A$ (1)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg + Mg$ (2)

$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos\varphi + Mg \varkappa L \cos\varphi - N_A L \sin\varphi = 0$ (3)

$f_B \leq \mu_B N_B \quad [\Rightarrow f_B^{max} = \mu_B N_B]$ (4)

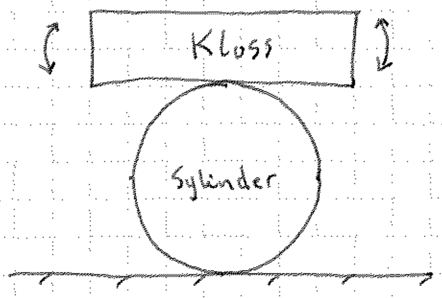
$$\Rightarrow \frac{m}{2} + \varkappa M \leq \mu_B (m+M) \tan\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{m/2 + \varkappa M}{(m+M)\mu_B}\right\} \quad (\text{gitt } \varkappa)$$

$$\varkappa_{max} = \frac{m+M}{M} \mu_B \tan\varphi - \frac{m}{2M} \quad (\text{gitt } \varphi)$$

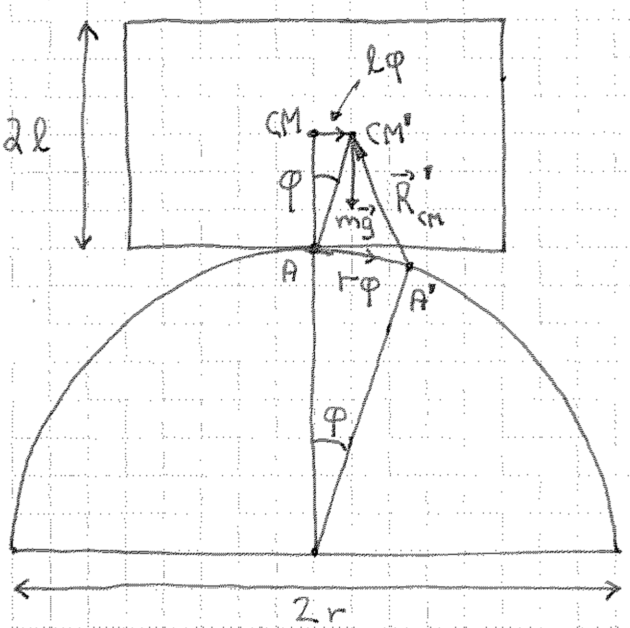
Hvis $\mu_A > 0$, blir problemet ubestemt. $\sum \tau_A = 0$ gir intet nytt $\Rightarrow$ 4 ukjente (f_A, f_B, N_A, N_B) men bare 3 ligninger. (Må betrakte stigen som elastisk legeme for å "komme i mål".)

Eks 2: Balansere på sylinder



Stabil eller ustabil likevekt?

Kvalitativ løsning:

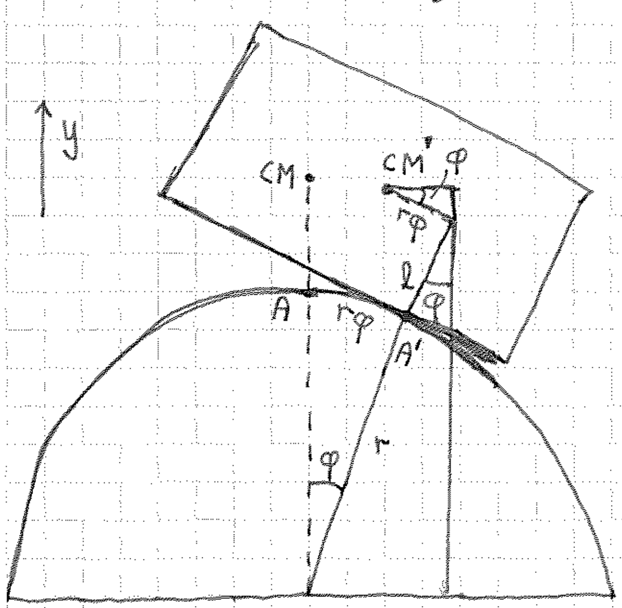


Kloss vippes liten vinkel φ

$\Rightarrow$ CM flyttes $l\varphi$ horisontalt til CM', og kontaktpunkt A flyttes $r\varphi$ horisontalt til A'

Stabil likevekt hvis $l\varphi < r\varphi$ (dvs $l < r$) fordi $\vec{\tau}_{A'} = \vec{R}'_{CM} \times m\vec{g}$ da gir rotasjon tilbake mot likevekt.

Via energibetraktninger:



$$\left.\begin{aligned} y_{CM} &= r + l \\ y'_{CM} &= (r+l)\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{se figur}$$

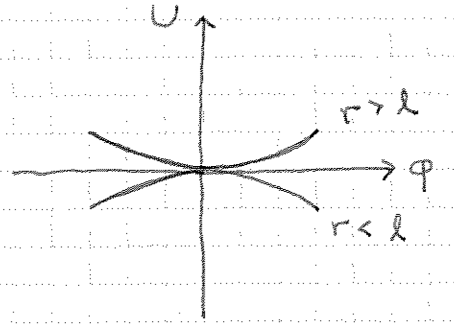
Klossens pot. energi (velger $U(0) = 0$):

$$U(\varphi) = mg\,y'_{CM} - mg\,y_{CM}$$
$$= mg\{(r+l)(\cos\varphi - 1) + r\varphi\sin\varphi\}$$

Små vinkler, $\varphi \ll 1$: [se Rottmann]

$$\cos\varphi \approx 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2, \quad \sin\varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow U(\varphi) \approx mg(r+l)(-\tfrac{1}{2}\varphi^2) + mgr\varphi\varphi$$
$$= \underline{\tfrac{1}{2}mg(r-l)\varphi^2}$$



$U(\varphi) = \frac{1}{2} mg (r - l) \varphi^2$

Stabil likevekt ved $\varphi = 0$ hvis $r > l$.

Klossen vipper fram og tilbake.

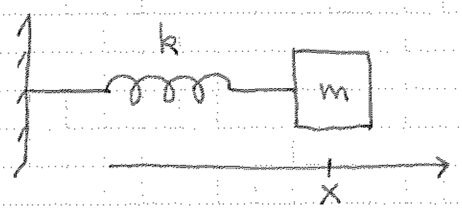
Med $U(\varphi) \sim \varphi^2$ har vi en såkalt <u>harmonisk oscillator</u>.

Svingninger [YF 14, LL 9]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: pendel, instrumentstreng, vibrerende atomer i molekyler og krystaller, ...

Harmonisk oscillator, 1D [YF 14.2, LL 9.1–9.3]



Likevekt (dvs $F = 0$) ved $x = 0$.

Kraft på m fra fjær med strukket ($x > 0$) evt sammenpresset ($x < 0$) fjær: $\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$ Hooke's lov

N2: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

Innfør $\omega = \sqrt{k/m} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ 1D harmonisk oscillator

Både $\sin \omega t$ og $\cos \omega t$ er løsning, fordi

$\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega t) = -\omega^2 \sin \omega t$ og $\frac{d^2}{dt^2}(\cos \omega t) = -\omega^2 \cos \omega t$

Generell løsning: $x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$

evt $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

(identiske hvis $B = A \cos\varphi$ og $C = -A \sin\varphi$, sjekk selv)

Størrelser og begreper:

A = amplitude = maks utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet $[\omega] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet $[f] = s^{-1} = Hz$

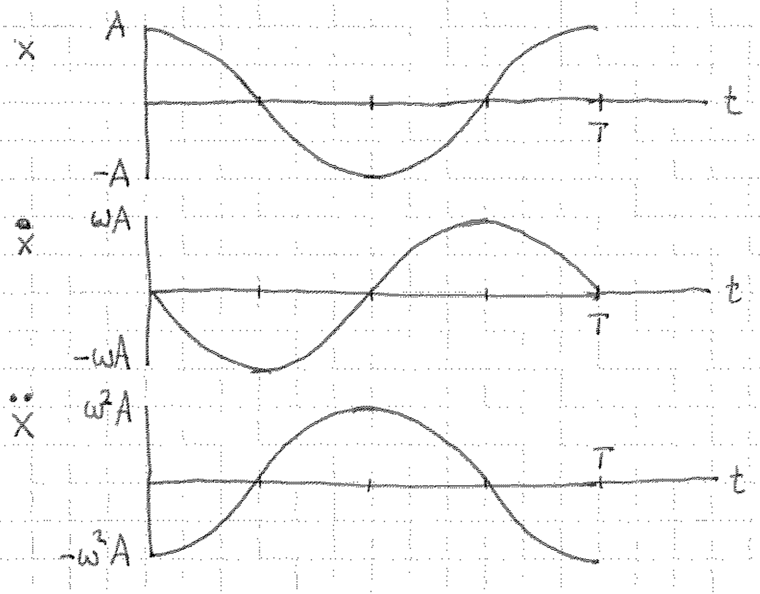
$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstanten $[\varphi] = 1$

Fra $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ finnes hastighet $\dot{x}$ og akselerasjon $\ddot{x}$:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$$



(har valgt $\varphi = 0$)

Må kjenne 2 <u>initialbetingelser</u>, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$, for å fastlegge A og φ:

$x_0 = A\cos\varphi$, $v_0 = -\omega A \sin\varphi$

$\Rightarrow v_0/\omega = -A\sin\varphi \Rightarrow x_0^2 + (v_0/\omega)^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$

og $\tan\varphi = -(v_0/\omega)/x_0 \Rightarrow \varphi = -\arctan\{v_0/x_0\omega\}$

Hit 05.11.12