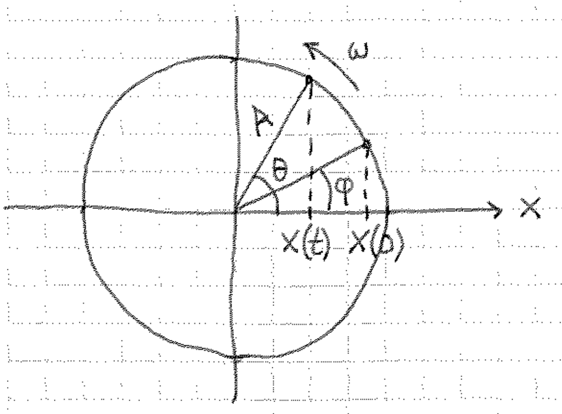
Analogi mellom 1D harm. osc. og sirkelbevegelse:



$\theta(t) = \varphi + \omega t$ = fasen

A = amplituden

$$x(t) = A\cos\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Energi, harm. osc. [YF 14.3, LL 9.4]

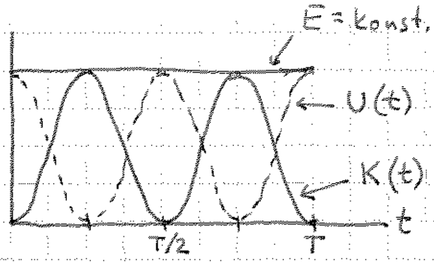
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

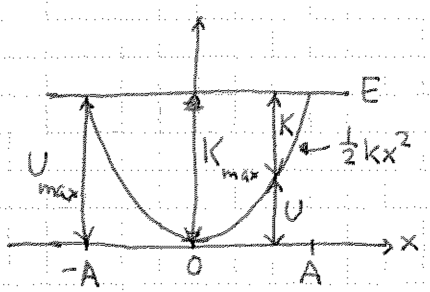
$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\left[U = -\int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^x (-kx)\, dx = \frac{1}{2} k x^2 ; \quad \text{se s. 34} \right]$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ = konst.

$\Rightarrow$ vi har konservativt system, (mekanisk) energi E er bevart (se s 27 – 34)



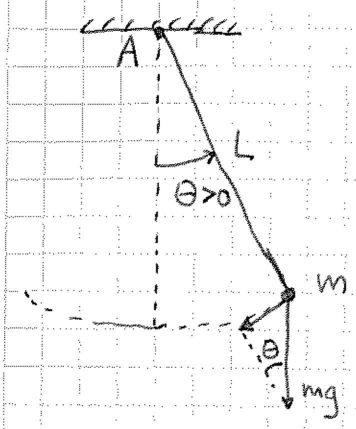


$\vec{F} = -\nabla U$
$= -\hat{x}\, \partial U / \partial x$
$= -kx\,\hat{x}$; ok

Harm. osc., oppsummering:

- F prop. med utsving fra likevekt
- U —"— kvadratet av utsvinget
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel, temperatur, trykk, ...

Eks 1: Matematisk pendel [YF 14.5, LL 9.6]



N2 ∥ sirkelbuen: $-mg\sin\theta = m\ddot{s} = mL\ddot{\theta}$

Antar små utsving, $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0$

$\Rightarrow$ harm. osc. med $\omega = \sqrt{g/L}$

$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

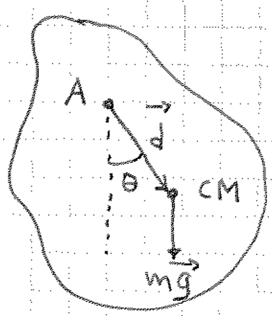
[se også øving 6, oppg. 3: numerisk løsning for vilkårlig θ]

N2 for rotasjon om A gir samme ligning:

$\tau = I\ddot{\theta}$, $I = mL^2$, $\vec{\tau} = \vec{L} \times m\vec{g}$, $\tau = -Lmg\sin\theta \approx -Lmg\,\theta$

[Demo: $L \sim 1.5\,\text{m} \Rightarrow T \sim 2.5\,\text{s}$, OK: $T = 2\pi\sqrt{L/g} \approx 2.5\,\text{s}$]

Eks 2: Fysisk pendel [YF 14.6, LL 9.6]



stivt legeme, masse m, svinger om akse gjennom A, treghetsmoment I mhp denne aksen

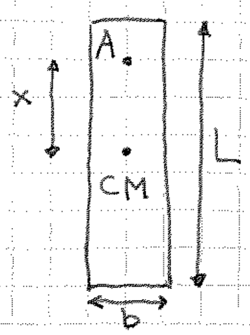
$\tau = I\ddot{\theta}$, $\tau = -d\cdot mg\cdot\sin\theta \overset{\theta \ll 1}{\approx} -d\cdot mg\cdot\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$

$\Rightarrow$ harm. osc. med $\omega = \sqrt{mgd/I}$

Kontroll: punktmasse m i CM $\Rightarrow I = md^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/d}$, OK.

Eks 3: Trefjøl (øving 12) [Demo]



x = avst. fra CM til rotasjonsaksen A

$I(x) = m(L^2 + b^2)/12 + mx^2$

$T(x) = 2\pi/\omega(x) = \ldots\ldots$ (se øving 12)

Dempede svingninger [YF 14.7, LL 9.7]

Friksjon $\Rightarrow$ fri svingninger dempes

1) Langsom bevegelse i fluid: $\vec{f} = -b\dot{x}\,\hat{\dot{x}}$
2) Rask ——"——: $\vec{f} = -D\dot{x}^2\,\hat{\dot{x}}$
3) Tørr friksjon: $\vec{f} = -\mu_k N\,\hat{\dot{x}}$

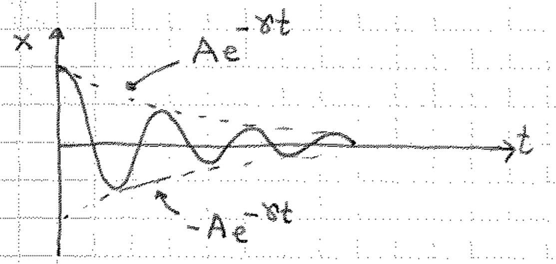
se s. 18-20

Antar tilfelle 1) $\Rightarrow$ $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \left(\gamma = \frac{b}{2m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Svak ("underkritisk") demping, $\gamma < \omega_0$:

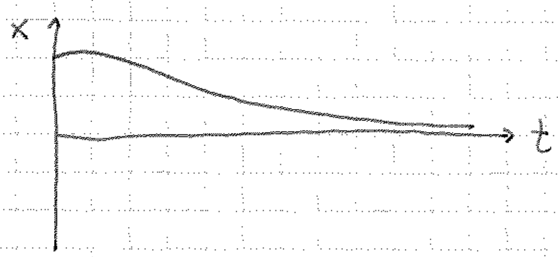
$$x(t) = A e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)\ ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping, $\omega < \omega_0$
- maks. utsving avtar eksponentielt, $Ae^{-\gamma t}$

Sterk ("overkritisk") demping, $\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}\ ; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

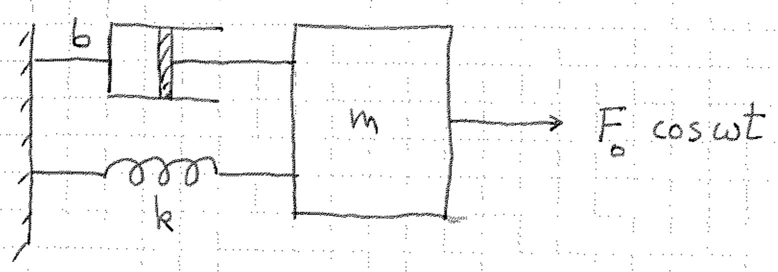


- ingen svingninger

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0$ (Eks: støtdempere)

Ubestemte koeff. fastlegges med gitte initialbetingelser.

Tvungne svingninger og resonans [YF 14.8, LL 9.9]



Anta harmonisk ytre kraft $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$

$$\overset{N2}{\Longrightarrow} \quad -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

Anta at $F_y(t)$ har virket så lenge at m svinger med samme ω som F_y (f.eks. $t \gg 1/\gamma$ med underkritisk demping).

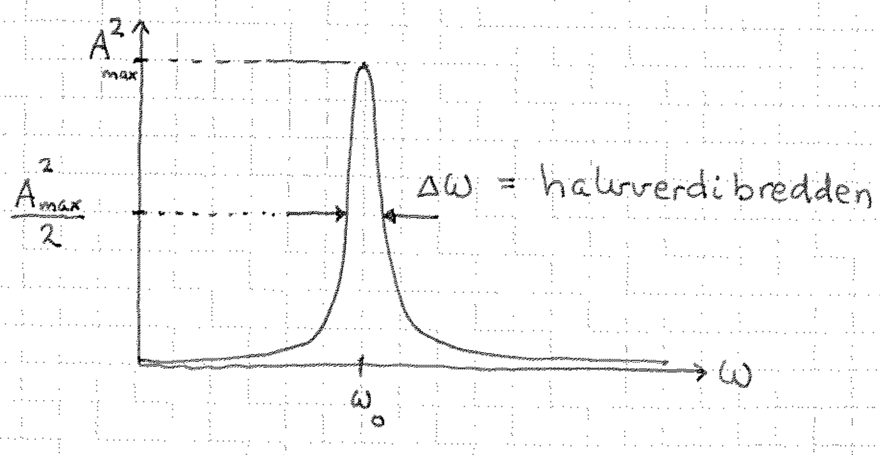
Da er løsningen:

$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$ [der $\varphi = \varphi(\omega)$; se Bølgefysikk]

med frekvensavhengig amplitude:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}\right)$$

Resonans: Hvis γ er liten og $\omega \approx \omega_0$, blir A stor



Liten γ (svak demping) $\Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega = 2\gamma$

Hit 13.11.12

$Q = \omega_0 / \Delta\omega = \omega_0 / 2\gamma$ = resonansens "kvalitet" (Q-verdi)