FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

a) Energibevarelse $E_A = E_B$ gir

$$\begin{aligned} U_A + K_A &= U_B + K_B \\ mgL + 0 &= mg \cdot (2r) + \frac{1}{2}mv^2 \\ 2gL &= 4gr + v^2 \,. \end{aligned}$$

Innsetting av $r = L - x$ i ligningen gir

$$v = \sqrt{2gL - 4g(L-x)} = \underline{\sqrt{2g(2x-L)}}\,. \tag{1}$$

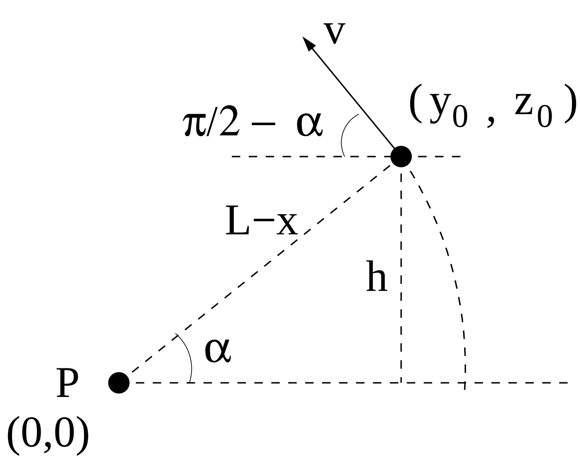
b) Snorkraften S og tyngden virker på kula. Vi bruker Newtons 2. lov og uttrykket for sentripetalakselerasjonen:

$$S + mg = ma = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mv^2}{r} - mg\,. \tag{2}$$

Snora er stram for $S > 0$, som fra (2) gir kravet $v^2 > gr$. Vi bruker så uttrykket for v i (1) og at $r = L - x$:

$$2g(2x - L) > g(L-x) \quad \Rightarrow \quad 5x > 3L \quad \Rightarrow \quad \underline{x > \frac{3}{5}L}\,.$$

c) Det er klart at x nå må være mindre enn verdien $3L/5$ funnet i oppgave 1*b*), for vi er avhengige av at snordraget S forsvinner før kula kommer til posisjon B, slik at den går over fra sirkelbevegelse til et "passende" skrått kast som treffer i P.
Strategien må bli å finne et uttrykk for posisjonen der S blir lik null, og derfra bruke ligninger for skrått kast og kreve at banen passerer punktet P.



Vi har total energi mgL når vi velger nullpunkt for potensiell energi som i 1*a*). Vi antar at snordraget S blir null i posisjonen angitt i figuren til venstre. Da er det kun komponenten av tyngdekraften inn mot sirkelbanens sentrum (P) som kan sørge for sentripetalakselerasjonen $v^2/(L-x)$, dvs

$$mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{L-x}.$$

I den angitte posisjonen har kula potensiell energi $mg(L-x) + mg(L-x)\sin\alpha$ og kinetisk energi $mv^2/2$, så bevaring av mekanisk energi gir

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg(L-x)(1+\sin\alpha).$$

Med disse to ligningene kan vi eliminere hastigheten v. Fra den første ligningen har vi

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(L-x)mg\sin\alpha,$$

som innsatt i ligningen for energibevaring gir

$$mgL = \frac{1}{2}(L-x)mg\sin\alpha + mg(L-x)(1+\sin\alpha),$$

dvs

$$x = \frac{3}{2}(L-x)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\sin\alpha}{2+3\sin\alpha}L.$$

Det som nå gjenstår, er å finne ut hvor stor vinkel α som skal til for at kula via et skrått kast treffer pinnen i posisjon $(y,z)=(0,0)$ når den starter i posisjon $(y_0,z_0)=(L-x)(\cos\alpha,\sin\alpha)$ med hastighet $\boldsymbol{v}=(v_y,v_z)=(-v\sin\alpha, v\cos\alpha)$.
Vi har null akselerasjon horisontalt (dvs y-retning) og akselerasjon $a_z=-g$ vertikalt. Ligningene for $y(t)$ og $z(t)$ blir

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + v_y t = (L-x)\cos\alpha - vt\sin\alpha \\
&= (L-x)\cos\alpha - t\sqrt{(L-x)g\sin\alpha}\sin\alpha \\
z(t) &= z_0 + v_z t + \frac{1}{2}a_z t^2 \\
&= (L-x)\sin\alpha + vt\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

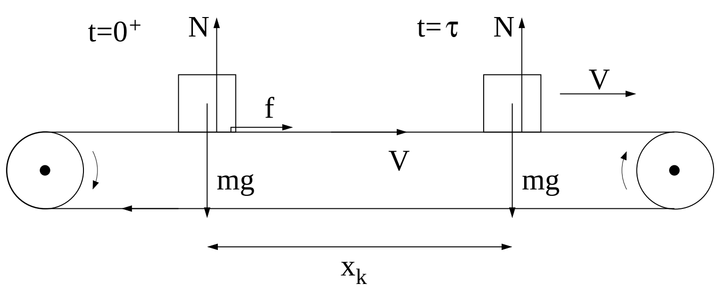
Ligningen for $y(t)$ gir oss tidspunktet t_P når kula treffer pinnen, for da har vi $y(t_P)=0$:

$$t_P = \frac{(L-x)\cos\alpha}{\sqrt{(L-x)g\sin\alpha}\sin\alpha}.$$

Innsetting av dette uttrykket for t_P i ligningen $z(t_P)=0$ resulterer så i en ligning for vinkelen α, og løsning av den gir $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$. Bruker vi dette i ligningen for x, finner vi endelig

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}L \simeq 0.46L.$$

Oppgave 2



a) De kreftene som virker på kartongen er tyngden mg, normalkraften N og (så lenge kartongen akselereres mot høyre) friksjonskraften f, som vist i figuren. N1 i vertikal retning samt uttrykket for friksjonskraften gir

$$N = mg \quad ; \quad f = \mu N = \mu mg$$

Kartongens økte kinetiske energi må være lik arbeidet W som er utført på kartongen. Det er friksjonskraften som gjør dette arbeidet, og som derfor blir

$$W = \Delta K = K(\tau) - K(0) = \frac{1}{2}mV^2\,. \tag{3}$$

Her er $t = 0$ tidspunktet da kartongen traff transportbåndet og friksjonskraften begynte å virke.

b) Kartongen har flyttet seg en strekning x_k i forhold til laboratoriesystemet (gulvet) i løpet av tiden τ som friksjonskraften virker (se figuren over). Friksjonsarbeidet er bestemt i oppgave a), slik at

$$W = fx_k = \mu mgx_k \qquad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \qquad x_k = \frac{V^2}{2\mu g}\,.$$

c) Akselerasjonen er konstant, og da er $x_k = \langle v \rangle \cdot \tau$, der $\langle v \rangle = V/2$ er gjennomsnittshastigheten. Dette gir

$$\tau = \frac{x_k}{\langle v \rangle} = \frac{2x_k}{V} = \frac{V}{\mu g}.$$

(Akselerasjonen er $a = f/m = \mu g$, og vi kunne alternativt benyttet $\tau = V/a = V/\mu g$.)

d) Transportbåndet har beveget seg en avstand $x_b(\tau) = V\tau = V^2/\mu g = 2x_k$.

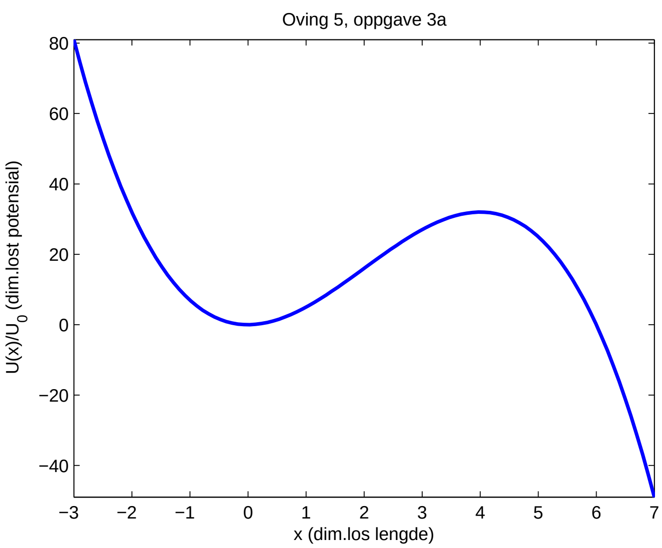
e) Båndet flytter seg altså en avstand $2x_k$ i løpet av den tiden friksjonskraften f virker. Arbeidet utført *på båndet* av friksjonskraften er derfor

$$W_{f,b} = -f \cdot 2\,x_k = -2W = -mV^2,$$

der det negative fortegnet understreker at friksjonskraften på båndet er rettet *mot* forflytningen. Men båndet holder konstant hastighet V hele tiden, så det *totale* arbeidet utført på båndet må være lik null. Med andre ord, drivkraften fra drivhjulene må utføre et arbeid $+mV^2$ på båndet, og dette er nettopp den energien E som båndet må tilføres for å holde det i konstant hastighet.
Vi kan alternativt argumentere med at båndet må tilføres en energi tilsvarende friksjonsarbeidet på kartongen (som går tapt som varme) pluss økningen i kartongens kinetiske energi, i alt

$$E = W + \Delta K = 2 \cdot \Delta K = mV^2.$$

Oppgave 3



a) Vi skal skissere funksjonen $u(x) = U(x)/U_0 = 6x^2 - x^3$. Den har nullpunkter i $x = 0$ og $x = 6$, ekstremalpunkter (også kalt "stasjonære punkter" i fysikken) der $du/dx = 12x - 3x^2 = 0$, dvs i $x = 0$ og $x = 4$, og ett vendepunkt der $d^2u/dx^2 = 12 - 6x = 0$, dvs i $x = 2$. For meget store positive verdier av x vil $u(x)$ bli stor og negativ, og for meget store negative verdier av x vil $u(x)$ blir stor og positiv, siden den i begge tilfeller vil domineres av leddet $-x^3$. Dette skulle være mer enn nok til å lage en god skisse av $u(x)$. Min figur til venstre er basert på matlabprogrammet oving5_3a.m, som plotter $u(x)$ mellom $x = -3$ og $x = 7$. Dette er et fornuftig intervall for den gitte funksjonen. Eksempler på mindre heldige intervallvalg er $2 < x < 3$ og $-100 < x < 100$, prøv selv.

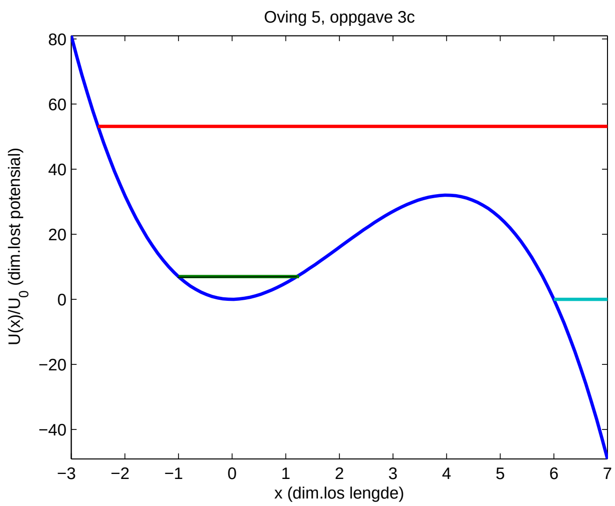
b) Kraften $F(l)$, dvs med enhet newton, og som funksjon av den "virkelige" posisjonen l er

$$F(l) = -\nabla U(l) = -\hat{l}\,\frac{\partial U}{\partial l},$$

men siden det her bare spørres etter retningen på kraften, kan vi for enkelhets skyld studere den dimensjonsløse funksjonen

$$f(x) = -\frac{du}{dx} = -12x + 3x^2 = 3x(x-4).$$

Dette gir at kraften er positiv for $x < 0$ og $x > 4$ mens den er negativ for $0 < x < 4$. Vi ser også dette klart fra figuren: Den deriverte er positiv mellom 0 og 4, ellers negativ, og det betyr at kraften er negativ mellom 0 og 4, ellers positiv. Man kan også ganske enkelt forestille seg at partikkelen vil "falle" mot lavere verdier av potensialet $u(x)$.



c) Totalenergien $E = U + K$ er konstant. Tenk deg at du slipper en partikkel i dette potensialet ved en gitt posisjon $x = x_0$ og med null hastighet, slik at $E = U(x_0)$. Dersom $-2 < x_0 < 4$, og dermed $u(x_0) < u(4) = 32$, vil partikkelen være i en bundet tilstand innenfor dette området. Et eksempel er vist i figuren til venstre, med den (grønne, hvis du har farger) horisontale kurven mellom $x = -1$ og $x \simeq 1.21$. Hvis partikkelen slippes med null hastighet i $x_0 = -1$, vil den akselereres mot høyre, oppnå maksimal hastighet i $x = 0$, deretter bremses inntil hastigheten blir null i $x \simeq 1.21$. Her vil partikkelen snu, øke sin hastighet mot venstre inntil den igjen snur i $x = -1$, og så videre.

Dersom $x_0 < -2$ og dermed $u(x_0) > u(4) = 32$, vil E være så stor at partikkelen vil fare over "ryggen" ved $x = 4$, og forsvinne i positiv x-retning. Dette er vist i figuren, med den (røde) horisontale kurven som starter i $x = -2.5$, $u \simeq 53$. For $x_0 > 4$ vil partikkelen bare bevege seg mer og mer mot stigende x, for eksempel som vist i figuren med den (lyseblå) horisontale kurven som starter i $x = 6$, $u = 0$.

d) Likevekt betyr $F = 0$, og i oppgave *a*) fant vi at dette inntreffer i $x = 0$ og i $x = 4$. Positiv krumning på $u(x)$ betyr stabil likevekt, negativ krumning betyr ustabil likevekt. Anta at partikkelen plasseres i en likevektsposisjon med null hastighet, og at vi gir den en liten forflytning Δx fra likevektsposisjonen. Ved $x = 0$ vil en liten forflytning Δx (i vilkårlig retning!) resultere i en kraft som dytter partikkelen tilbake mot likevektsposisjonen. Følgelig er $x = 0$ en stabil likevekt. Ved $x = 4$ vil en forflytning Δx gi en kraft som dytter partikkelen videre bort fra likevektsposisjonen. Følgelig er $x = 4$ en ustabil likevekt.

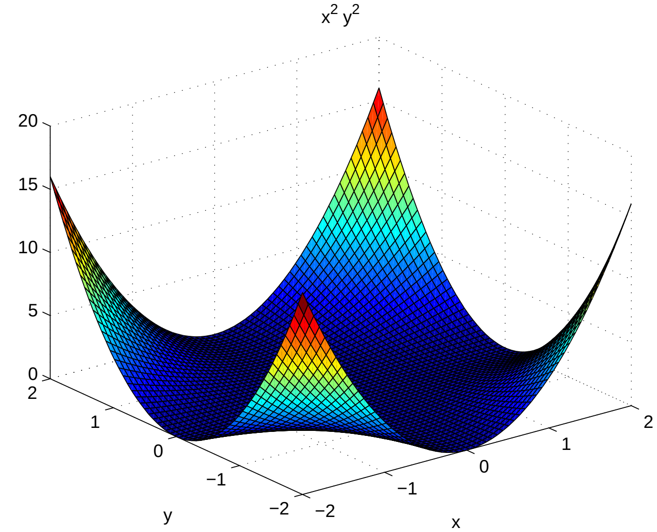
Oppgave 4

a)

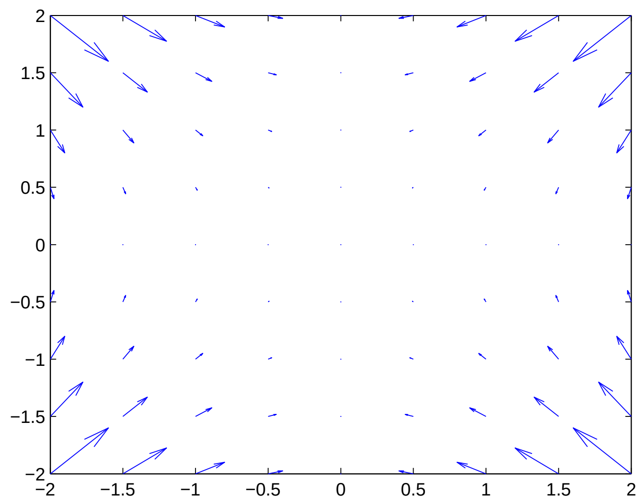
$$\begin{aligned} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{2U_0 x y^2}{R^4} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{2U_0 x^2 y}{R^4} \end{aligned}$$

b) MATLAB-programmet kraftfelt.m illustrerer bruken av kommandoene domain, ezsurf, meshgrid og quiver.

Potensialet:



Kraftfeltet:



c)

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_R^{2R} F_x(x, 2R)\, dx + \int_{2R}^{R} F_y(2R, y)\, dy \\
&+ \int_{2R}^{R} F_x(x, R)\, dx + \int_R^{2R} F_y(R, y)\, dy \\
&= -\frac{U_0(2R)^2}{R^4} \left(4R^2 - R^2\right) - \frac{U_0(2R)^2}{R^4} \left(R^2 - 4R^2\right) \\
&- \frac{U_0 R^2}{R^4} \left(R^2 - 4R^2\right) - \frac{U_0 R^2}{R^4} \left(4R^2 - R^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$