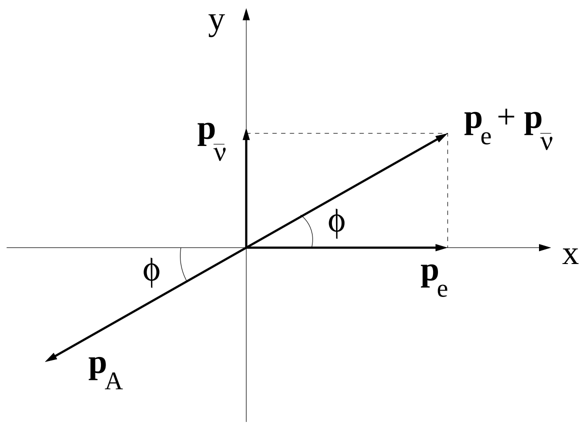
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1



Systemets impuls er bevart i reaksjonen, og siden kjernen lå i ro i starten, har vi

$$\Sigma \boldsymbol{p}_{\text{før}} = \Sigma \boldsymbol{p}_{\text{etter}} = 0.$$

Atomkjernens impuls vil derfor peke i motsatt retning av vektorsummen av impulsen til elektronet og nøytrinoet. Kjernen vil dermed også bevege seg i denne retningen. Vi legger f.eks. elektronets bevegelsesretning langs x-aksen og nøytrinoets langs y-aksen (se figur). Retningen for kjernen er da gitt ved en vinkel ϕ relativt den negative x-aksen, der $\tan\phi = p_{\overline{\nu}}/p_e$. Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_A &= -(\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_{\overline{\nu}}) \\ |\boldsymbol{p}_A| &= \sqrt{p_e^2 + p_{\overline{\nu}}^2} \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$|\boldsymbol{p}_A| = \sqrt{p_e^2 + p_{\overline{\nu}}^2} = 1.065 \cdot 10^{-20}\ \text{kg m/s}.$$

Dermed:

$$v_A = \frac{p_A}{m_A} = \frac{1.065 \cdot 10^{-20}\ \text{kg m/s}}{3.90 \cdot 10^{-25}\text{kg}} = 2.73 \cdot 10^4\ \text{m/s}.$$

Oppgave 2

a) Hastigheten v_1 til kule 1 like før kollisjonen finnes lettest ved å bruke energibevarelse:

$$\begin{aligned} m_1 g L &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Like før støtet antar vi at snora er vertikal, og dermed er det bare vertikale krefter som virker. Kun snordraget S_1 (oppover) og tyngden $m_1 g$ (nedover) virker på kule 1, og Newtons 2. lov gir

$$\begin{aligned} S_1 - m_1 g &= m_1 a = m_1 \frac{v_1^2}{L} = 2 m_1 g \\ \Rightarrow S_1 &= m_1 g + 2 m_1 g = 3 m_1 g \end{aligned}$$

b) Etter et fullstendig uelastisk støt vil kulene henge sammen. I kollisjonen er impulsen bevart, men ikke energien. Impulsbevarelse gir felleshastigheten $v_1' = v_2' = v'$ etter støtet:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ \Rightarrow m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Etter kollisjonen svinger kulene til venstre opp til en posisjon i høyde h. Energibevarelse for denne delen av bevegelsen gir

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) g h &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v')^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{(v')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 L \end{aligned}$$

Snora når med andre ord ikke opp til horisontal stilling og er helt sikkert stram.

c) Energien etter støtet er

$$(m_1 + m_2) g h = g \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} L$$

mens den før støtet var $m_1 g L$. Forholdet blir dermed

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

d) I et elastisk støt er også energien bevart. Hastighetene v_1' og v_2' etter støtet er gitt av de to ligningene:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad \text{(impulsbevarelse)} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \qquad \text{(energibevarelse)} \end{aligned}$$

En effektiv måte å løse disse to ligningene på er (som antydet i forelesningene) å skrive

$$\begin{aligned} m_1 (v_1 - v_1') &= m_2 v_2' \\ m_1 (v_1^2 - (v_1')^2) &= m_2 (v_2')^2 \end{aligned}$$

og deretter dividere den siste med den første. Det gir $v_1 + v_1' = v_2'$. Dette innsatt i ligningen for impulsbevarelse lar oss eliminere v_2', og vi finner

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 (v_1 + v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Dermed:

$$v_2' = v_1 + v_1' = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

(Positive fartsretninger mot venstre.)

e) Det kritiske punktet for kule 2 er toppen. Med v_2'' for hastigheten til kule 2 i toppunktet gir N2 her:

$$\sum F = m_2 a \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' + m_2 g = m_2 (v_2'')^2 / L \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' = m_2 (v_2'')^2 / L - m_2 g.$$

Dersom snora ikke skal slakkes, må snorkrafta S_2'' være større enn null, m.a.o.

$$(v_2'')^2 > gL.$$

Energibevarelse fra bunnpunkt til toppunkt for kule 2 bestemmer v_2'' uttrykt ved v_2' og L:

$$\frac{1}{2}m_2(v_2')^2 = \frac{1}{2}m_2(v_2'')^2 + m_2 g \cdot 2L \qquad \Rightarrow \qquad (v_2'')^2 = (v_2')^2 - 4gL.$$

Et uttrykk for v_2' har vi ovenfor. Dermed:

$$4v_1^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 - g\cdot 4L > gL \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1}{m_1+m_2} > \sqrt{\frac{5gL}{4v_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4v_1^2}{5gL}}$$

Ovenfor har vi v_1 uttrykt ved g og L, som vi setter inn:

$$\frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4\cdot 2gL}{5gL}} - 1 = \sqrt{\frac{8}{5}} - 1,$$

dvs

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}.$$

Oppgave 3

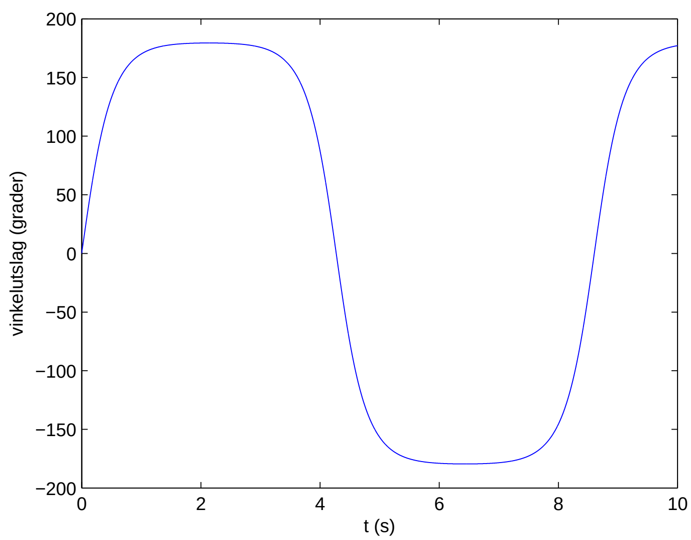
Innsetting av $v = dl/dt = L d\alpha/dt$ i $m dv/dt = F = -mg\sin\alpha$ gir direkte

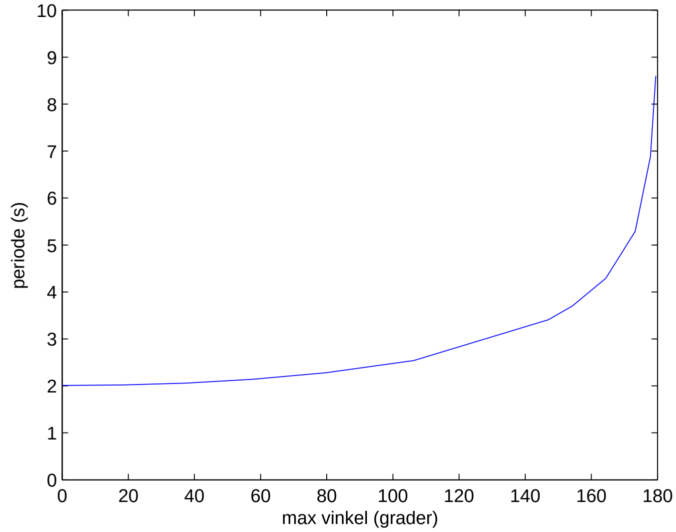
$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0.$$

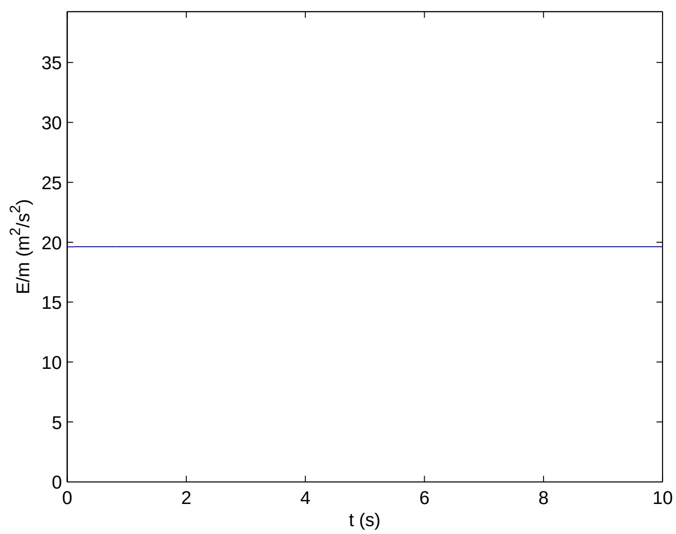
Ved å kjøre MATLAB-programmet (med $g = 9.81$ m/s^2 og $L = 1$ m) for verdier av $v_0 = v(1)$ mellom f.eks. 0.01 og 6.2641 m/s ser vi at svingeperioden T er praktisk talt konstant, og omtrent lik 2 s, så lenge maksimalt vinkelutslag $\alpha_{\max}$ er lite. Når $\alpha_{\max}$ blir større, ser vi at T begynner å avvike fra denne verdien. Hvis starthastigheten er slik at $v_0^2/2 = 2gL$, dvs $v_0 = 2\sqrt{gL}$, vil pendelen nå toppen, $\alpha = \pi$, med null hastighet. Det tilsvarer at perioden $T \to \infty$. For større v_0 enn dette har vi nok mekanisk energi til å passere toppen, og pendelen svinger rundt og rundt. Mekanisk energi pr masseenhet er

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + gL(1-\cos\alpha).$$

Plotting av denne størrelsen viser at den er konstant. Figurer (1. og 3. figur med $v_0 = 6.2641$ m/s):







Oppgave 4

a) Energibevarelse gir $Mgh = Mv_0^2/2$ og $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ballen "reflekteres" fra bakken med hastighet $-v_0 = -\sqrt{2gh}$. (Her er det **valgt positiv hastighetsretning nedover**.) Ballens impulsendring i kollisjonen med bakken er $\Delta p = M\Delta v = -2Mv_0$. Impulsbevarelse, totalt sett, er ivaretatt i og med at bakken endrer sin impuls med beløpet $2Mv_0$.

b) Rett før den elastiske kollisjonen mellom de to ballene har nederste ball hastighet $-v_0$ og øverste ball hastighet v_0. (De har falt like langt.) Det er gitt i oppgaven at v angir hastigheten til øverste ball etter kollisjonen. La oss dessuten med v_1 angi nederste balls hastighet etter kollisjonen. Bevaring av energi og impuls gir da (med $M = \alpha m$)

$$mv_0 - \alpha m v_0 = mv + \alpha m v_1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_1^2 \qquad (2)$$

Vi benytter "trikset" som ble antydet på forelesning: Vi dividerer (1) med m og (2) med $m/2$. Deretter samler vi ledd som inneholder α på den ene siden av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} v_0 - v &= \alpha(v_1 + v_0) \quad (3) \\ v_0^2 - v^2 &= \alpha(v_1^2 - v_0^2) \quad (4) \end{aligned}$$

Under forutsetning av at begge sider i (3) er forskjellig fra null, kan vi dividere (4) med (3). Det gir

$$v_0 + v = v_1 - v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_0 + v,$$

som innsatt i ligning (3) lar oss eliminere v_1:

$$\begin{aligned} v_0 - v &= \alpha(2v_0 + v + v_0) = 3\alpha v_0 + \alpha v \quad (5) \\ \Rightarrow (\alpha+1)v &= (1 - 3\alpha)v_0 \quad (6) \\ \Rightarrow v &= \frac{1-3\alpha}{\alpha+1} v_0 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{1-3\alpha}{\alpha+1} \quad (7) \\ (\Rightarrow v_1 &= 2v_0 + v = v_0 \frac{3-\alpha}{\alpha+1} = \sqrt{2gh} \cdot \frac{3-\alpha}{\alpha+1}\ ) \quad (8) \end{aligned}$$

Med "starthastighet" v i $y = 0$ vil den øverste ballen sprette til en høyde $y = v^2/2g$, dvs

$$y = h \cdot \left(\frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 .$$

Grense- og spesialtilfeller:

- $\alpha \gg 1$: Da vil $v \to -3v_0$ og $y \to 9h$. Høyere enn dette er det altså ikke mulig å få en ball til å sprette ved å slippe den sammen med *en* tyngre ball, fra høyden h. Med *flere* baller, derimot, med gradvis økende masse nedover, er det mulig å få den øverste ballen til å sprette riktig høyt (se A. Anderson og J. Vanderkooy, *Physics Education* **34**, side 172 (1999), evt Essay kap. 5 hvis du har boka LL). (Med *uendelig stor* α blir $v_1 = -v_0$ og høyre side av (3) blir lik null, slik at vi ikke uten videre kan dividere (4) med (3). Men baller med uendelig stor masse finnes heldigvis ikke.)

- $\alpha \ll 1$: Da vil $v \to +v_0$, dvs den nå mye tyngre øverste ballen vil tvinge den nederste ballen til "retrett", og selv ganske enkelt fortsette sin ferd nedover med praktisk talt uendret hastighet. Men bakken er jo der, i umiddelbar nærhet, så enden på visa blir at den øverste ballen "reflekteres" med farten $-v_0$ og spretter til starthøyden $y = h$. Dette ligger da også allerede "innbakt" i uttrykket for $y(h, \alpha)$, dvs $y \to h$ når $\alpha \to 0$. (Igjen kunne en kanskje bli litt urolig, for $v = v_0$ gjør venstre side av (3) lik null og divisjon av (4) med (3) mistenkelig. Men baller med null masse er like uproblematiske som baller med uendelig masse.)

- $\alpha = 1$: Da vil $v \to -v_0$ og $y \to h$. Og det er jo rimelig: De to ballene har lik masse og spretter begge etter hvert tilbake til sine opprinnelige starthøyder. Den nederste ballen vil selvsagt først ta seg en ekstra runde nedom bakken, med hastighet $v_1 = v_0$, for å overføre en ny porsjon impuls, $2Mv_0 = 2mv_0$, til gulvet, før den endelig spretter tilbake til opprinnelig høyde.