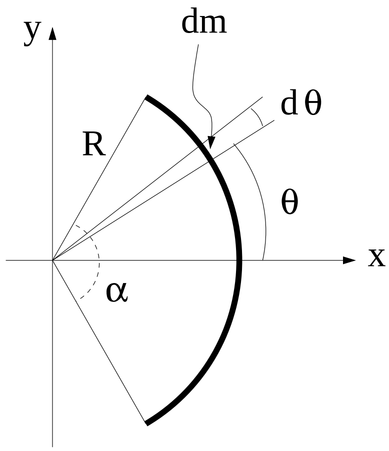
Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1



a) Massen til del av bøylen innenfor vinkelelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylens masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinkelelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{legeme}} x\, dm = \frac{1}{M} \cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha}\left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right] = \underline{R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

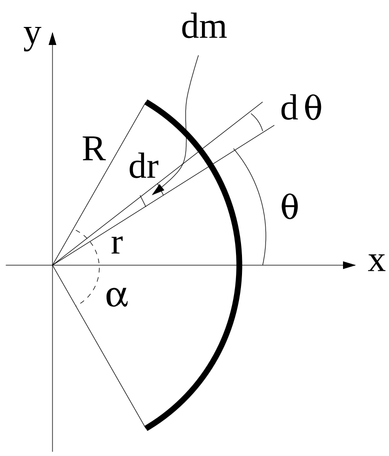
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinkelelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{sektor}} x\, dm = \frac{1}{M} \cdot \frac{M}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{r=0}^{R} r^2 \cos\theta\, d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta \int_{r=0}^{R} r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \\ &= \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra a) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R. En bøyle med radius r har da $X = r\,(\sin\alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X = \frac{1}{M}\int_{\text{alle bøyler}} X\,dm = \frac{1}{M}\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,M\frac{2r\cdot dr}{R^2} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2\,dr = \underline{\frac{2}{3}\,R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.

Oppgave 2

Viser begge metoder, først basert på N2 og integrasjon, deretter energibevarelse.
Hele lenkens masse m blir akselerert, og kraften som virker på lenken er tyngdekraften. I dette tilfellet vil tyngdekraften være avhengig av hvor stor del av lenken som henger på utsiden av bordkanten, dvs $G(y) = (my/L)g$. Vi får derfor:

$$G(y) = m\frac{y}{L}\cdot g = ma = m\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{gy}{L}. \tag{1}$$

Her har vi tre variable: v, y og t, som alle er avhengig av hverandre. For å få en løsbar differensialligning må vi redusere til to variable og separere med en type variabel på hver side. Siden vi er interessert i $v(y)$, velger vi v, y og tilhørende dv, dy. Vi eliminerer t ved å skrive om (kjerneregelen)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v,$$

og vi får dermed

$$\frac{dv}{dy}v = \frac{gy}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v\,dv = \frac{g}{L}ydy.} \tag{2}$$

Integrasjon av denne ligningen med grensebetingelsene $y(t=0) = c$ og $v(y=0) = 0$ gir:

$$\begin{aligned}
\int_{v(0)}^{v(y)} v\,dv &= \frac{g}{L}\int_{y(0)}^{y(t)} y\,dy \\
\frac{1}{2}\left[v(y)^2 - v(0)^2\right] &= \frac{g}{L}\cdot\frac{1}{2}\left[y^2 - y(0)^2\right] \\
v(y) &= \sqrt{\frac{g}{L}\,(y^2 - c^2)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Idet siste ledd glir over bordkanten er $y = L$. Ligning (3) gir dermed hastigheten

$$\underline{v(L) = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - c^2)}.} \tag{4}$$

Den observante oppgaveløser vil ha registrert at vi ikke skal finne hastigheten v eller posisjonen y som funksjon av tiden t, og at prinsippet om energibevarelse da bør være et gunstig alternativ. Vi forsøker dette:

$$\begin{aligned}
U_{\text{før}} + K_{\text{før}} &= U_{\text{etter}} + K_{\text{etter}} \\
-(m\,\frac{c}{L})\cdot g\,\frac{c}{2} + 0 &= -(m\,\frac{y}{L})\cdot g\,\frac{y}{2} + \frac{1}{2}mv^2.
\end{aligned}$$

Har brukt null for potensiell energi på bordflaten slik at lenkelengden c hengende utenfor har tyngdepunkt i $c/2$ og dermed potensiell energi $-(m\,c/l)\cdot g\cdot c/2$, og tilsvarende med $c \to y$ for lenkelengde utenfor bordflaten. Dette gir elegant

$$v^2 = -\frac{g}{L}c^2 + \frac{g}{L}y^2 \quad \Rightarrow \quad v(y) = \sqrt{\frac{g}{L}(y^2 - c^2)}\,, \qquad \text{som funnet over.}$$

Oppgave 3

a) Rakettligningen:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - u\frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med dt/m og integrerer, fra 0 til v for v, fra 0 til t for t, og fra m_0 til m for m:

$$\int_0^v dv = -g\int_0^t dt - u\int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt - u\ln\frac{m}{m_0} = u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0 g = 2.98\cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40\cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = \beta t_f = 1.98\cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06\cdot 10^6$ kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 - \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$ m/s^2. Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$ m/s^2.

d) Vi kan skrive

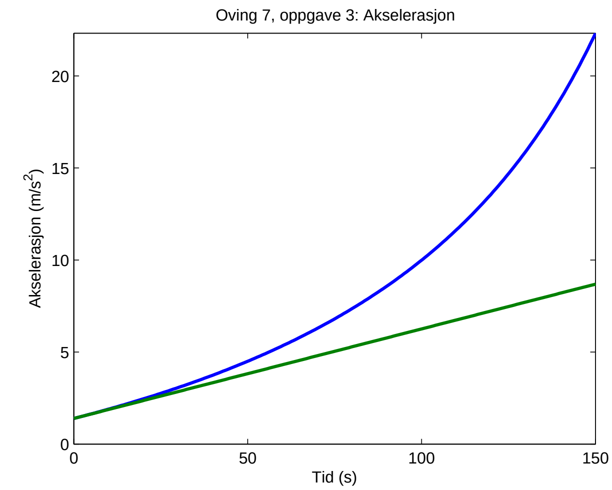
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0}\frac{1}{1 - \beta t/m_0} - g.$$

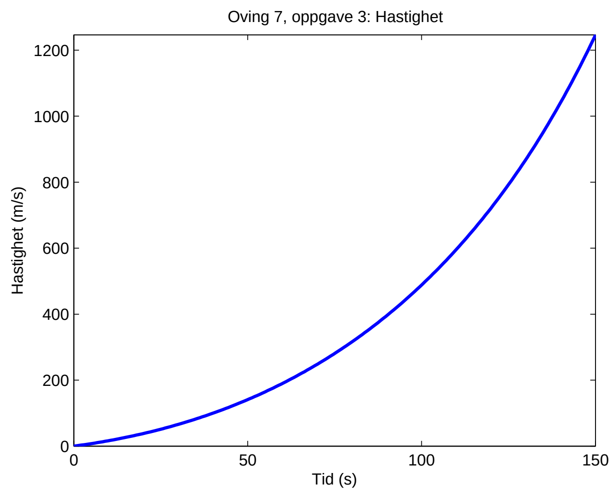
Hvis $t \ll m_0/\beta$, så er $x = \beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0}\left(1 + \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) + \frac{u\beta^2}{m_0^2}\,t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av t:





På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u\frac{m_0 - \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 - \beta t}{m_0} + ut - \frac{1}{2}gt^2,$$

og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq 58.4$ km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs g ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs g i høyden h over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s^2 for g for hele distansen.