FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

a) For ei tynn stang bruker vi $dm = m \cdot dx/R$. Da blir treghetsmomentet til ei tynn stang om en akse normalt på stanga gjennom stangas ende:

$$I_s = \int_{\text{stanga}} x^2\, dm = \frac{m}{R} \int_0^R x^2\, dx = \frac{m}{R} \cdot \frac{1}{3} R^3 = \frac{1}{3} mR^2.a$$

b) Treghetsmomentet til felgen er MR^2. Hver eike (spile) har treghetsmoment $mR^2/3$, som funnet i *a*). Treghetsmomentet til hele kjerrehjulet er derfor

$$I_k = MR^2 + N \cdot \frac{mR^2}{3} = \left(M + \frac{N}{3}\, m\right) R^2.$$

(Oppgaveteksten spesifiserer ikke hvilken akse I_k skal referere til. Med tanke på oppgave *c* er det vel rimelig å bruke aksen normalt på hjulets plan, gjennom hjulets sentrum.)

c) Total kinetisk energi for hjulet er

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M_k V^2 + \frac{1}{2} I_k \omega^2,$$

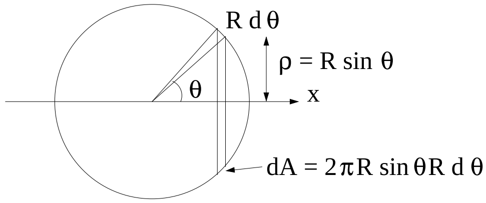
som vist på forelesning. Her er $M_k = M + Nm$ kjerrehjulets totale masse, og V er hastigheten til kjerra, og dermed også hastigheten til kjerrehjulets tyngdepunkt.
Her kan vi uttrykke ω ved R og V (ettersom det er R og V som er *gitte* størrelser i oppgaven): Når kjerra har kjørt en avstand $2\pi R$, har hjulet foretatt en omdreining. Dette tar tiden $T = 2\pi/\omega$. Vi har dermed: $V = 2\pi R/(2\pi/\omega) = \omega R$. Innsetting for M_k og I_k gir da

$$K = \frac{1}{2}(M + Nm)V^2 + \frac{1}{2}\left(M + \frac{N}{3}\, m\right) V^2 = \left(M + \frac{2Nm}{3}\right) V^2.$$

Oppgave 2

a) Som i oppgave 1*a* setter vi $dm = M \cdot dx/L$. Med aksen gjennom tyngdepunktet vil hver halvdel av stanga bidra like mye til treghetsmomentet I_0. Dermed:

$$I_0 = 2 \cdot \int_0^{L/2} x^2 \cdot M\, \frac{dx}{L} = \frac{2M}{L} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ML^2.$$



b) Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot Rd\theta = 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og bredde $Rd\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}MR^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = |_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3\cos\theta}{4}\right) = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3}MR^2.$$

c) Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2dm/3$, radius r, masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Dermed:

$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2.$$

Alternativ metode: La x-aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = MdV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned}
I &= \int dI \\
&= \frac{1}{2}\int dm \cdot (R^2 - x^2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\
&= \frac{3M}{4R^3}\int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx \\
&= \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) $I = MR^2/2$, som vist på forelesning.

b) Endring i potensiell energi når m_1 faller og m_2 stiger en høyde h:

$$\Delta U = (m_2 - m_1)gh.$$

(Endring i) Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Med I fra oppgave a) samt $\omega = v/R$ (siden snora ikke glir) har vi

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{m_1 + m_2 + M/2}{2}v^2.$$

Tapt potensiell energi er lik opparbeidet kinetisk energi, $-\Delta U = K$. Dermed:

$$v = \left(\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + M/2}\right)^{1/2}.$$

c) Konstant akselerasjon betyr at middelhastigheten er $v/2$. Brukt tid er derfor

$$t = h/(v/2) = 2h/v = \left(\frac{(2m_1 + 2m_2 + M)h}{(m_1 - m_2)g} \right)^{1/2}.$$

d) Akselerasjonen blir

$$a = v/t = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\, g.$$

Enheten stemmer siden vi har masse delt på masse ganget med g, altså m/s^2. Hvis $m_2 = M = 0$, blir $a = g$. Fornuftig! Hvis $m_1 = m_2$, blir $a = 0$. Også fornuftig!

MATLAB, PDF-figurer og LaTeX

Her trengs det vel ikke noe bestemt løsningsforslag.

Litt mer LaTeX-trening

```
\documentclass[11pt]{article}
\begin{document}
\begin{eqnarray*}
\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &=&
\int_{R}^{2R} F_x(x,2R) \, dx +
\int_{2R}^{R} F_y(2R,y) \, dy \\
&+& \int_{2R}^{R} F_x(x,R) \, dx +
\int_{R}^{2R} F_y(R,y) \, dy \\
&=&
-\frac{U_0 (2R)^2}{R^4} \, \left(4R^2 - R^2 \right)
-\frac{U_0 (2R)^2}{R^4} \, \left(R^2 - 4R^2 \right) \\
&-&\frac{U_0 R^2}{R^4} \, \left(R^2 - 4R^2 \right)
-\frac{U_0 R^2}{R^4} \, \left(4R^2 - R^2 \right) \\
&=& 0
\end{eqnarray*}
\end{document}
```