FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 1

Kommentar: Til denne første øvingen er LF laget spesielt grundig. Særlig er integrasjonsmetodene detaljert, med løsning både med ubestemt og bestemt integral.

Oppgave 1

$$-g = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = -g\,dt\,. \tag{1}$$

Vi har fått en enkel differensialligning for $v(t)$ som har sortert de variable på høyre og venstre side. Integrasjon på begge sider gir

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t (-g)\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) - v(0) = -\int_0^t g\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) - v_0 = -g(t-0)$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{2}$$

Alternativ løsning med bruk av ubestemte integral gir fra (1) følgende ligning for $v(t)$:

$$v(t) = \int -gdt = -gt + K_1\,. \tag{3}$$

Integrasjonskonstanten K_1 er bestemt av den fysiske startbetingelsen (også kalt initialbetingelsen):

$$v_0 = v(t=0) = -g \cdot 0 + K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 = v_0 \tag{4}$$

Initialbetingelsen (4) innsatt i (3) gir (2).
Høyden $y(t)$ er gitt ved integrasjon av (2), idet

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad dy = v(t) \cdot dt = (v_0 - gt) \cdot dt\,.$$

Differensialligningen er igjen ordnet, og integrasjon på begge sider gir

$$\int_{y(0)}^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 - gt)dt \quad \Rightarrow \quad y(t) - y(0) = \left[v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right]_0^t\,.$$

Innsetting av betingelsen $y(0) = 0$ gir

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

Alternativ løsning med bruk av ubestemte integral gir følgende ligning for $y(t)$:

$$y = \int v\,dt = \int (v_0 - gt)\;dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + K_2 \tag{6}$$

Integrasjonskonstanten K_2 er bestemt av betingelsen:

$$y_0 = y(t=0) = v_0 \cdot 0 - \frac{1}{2}g \cdot 0 + K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = y_0 \tag{7}$$

Betingelsen (7) innsatt i (6) gir (5).

Steinen når sin maksimale høyde ved $t = t_1$ når $v(t_1) = 0$, som innsatt i (2) gir:

$$0 = v_0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \tag{8}$$

Den maksimale høyden, y_1, finner vi ved å bruke (5) og sette inn uttrykket for t_1 fra (8):

$$y_1 = y(t_1) = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

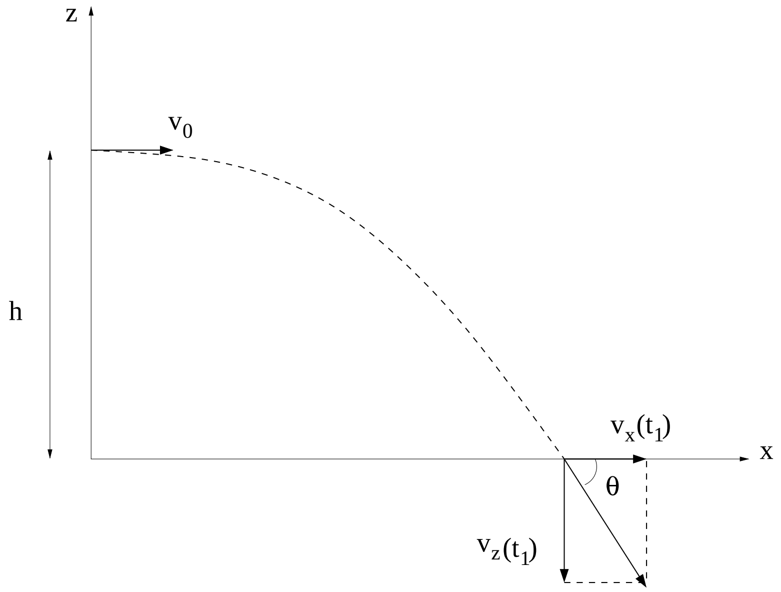
Steinen lander på bakken ved $t = t_2$ når $y(t_2) = 0$, som innsatt i (5) gir:

$$0 = y_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2}\right) \tag{9}$$

Hastigheten til steinen når den lander er gitt av (2) og (9):

$$v(t_2) = v_0 - gt_2 = v_0 - g \cdot \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2}\right) = -v_0 \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2}$$

Oppgave 2.
I denne oppgaven beveger steinen seg i 2 dimensjoner. Vi bruker x og z for horisontal og vertikal retning, og vi kan se på bevegelsen i x-retning og i z-retning hver for seg. Vi bruker integrasjonsmetoden for å finne uttrykk for $v_x(t)$, $v_z(t)$, $x(t)$ og $z(t)$.



I x-retningen har vi ingen akselerasjon, og initialbetingelser $v_x(0) = v_0$ og $x(0) = 0$. Dette gir uttrykk for $v_x(t)$,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int_0^t a_x \, dt = v_0 \\ \Rightarrow & \quad v_x(t) = v_0 \,, \end{aligned} \tag{10}$$

og for $x(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) \;&=\; x(0) \;+ \int_0^t v_x(t)\,dt \;=\; \int_0^t v_0\,dt \;=\; v_0 t \\
&\Rightarrow \quad x(t) = v_0 t\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

I z-retningen har vi fritt fall, og initialbetingelser $v_z(0) = 0$ og $z(0) = h$. Dette gir følgende uttrykk for $v_z(t)$ og $z(t)$:

$$
v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z\,dt = -g\int_0^t dt \;= -gt \qquad \Rightarrow \qquad v_z(t) = -gt\,, \tag{12}
$$

$$
z(t) \;=\; z(0) + \int_0^t v_z(t)\,dt \;= h - \int_0^t gt\,dt \;=\; h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{13}
$$

Steinen treffer bakken ved $t = t_1$ når $z(t_1) = 0$, som innsatt i (13) gir:

$$
z(t_1) = h - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.
$$

Hastigheten til steinen idet den lander er gitt av:

$$
v_1 = v(t_1) = \sqrt{(v_x^2(t_1) + v_z^2(t_1))}\,.
$$

Bruk av (10) og (12) gir:

$$
v_1 = v(t_1) = \sqrt{v_0^2 + (-gt_1)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.
$$

Vinkelen til hastighetsvektoren i forhold til horisontalplanet er gitt av:

$$
\tan\theta = \frac{|v_z(t_1)|}{v_x(t_1)} = \frac{gt_1}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.
$$

Oppgave 3.

Vi velger f.eks x og z for hhv horisontal og vertikal posisjon for kula. For å beskrive problemet trenger vi to matematisk uavhengige (skalare) ligninger. Her utgjør x- og z-komponentene av Newtons 2. lov et slikt sett. Man kan også bytte ut den ene av disse med ligningen for energibevarelse, som er en skalar ligning. Energiligninger behandles litt senere i kurset, men jeg regner med at regningen er kjent fra videregående skole, så jeg velger å presentere også denne løsningen her.

a) Den maksimale høyden h finnes lettest fra prinsippet om energibevarelse. Kinetisk energi knyttet til vertikalbevegelsen, $mv_{0z}^2/2$, går over til potensiell energi mgh:

$$
\frac{1}{2}mv_{0z}^2 = mgh \qquad \text{hvor} \qquad v_{0z} = v_0\sin\theta \quad dvs. \tag{14}
$$

$$
h \;=\; \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}.
$$

Dersom ikke energiligningen brukes, finner vi det høyeste punktet ved å sette vertikal fart lik null her: $v_z = v_{0z} - gt_h = 0$, som gir $t_h = v_{0z}/g = v_0\sin\theta/g$. Svaret blir det samme som med energibetraktning:

$$
h = z(t_h) = v_{0z}t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = \frac{v_{0z}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0z}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_{0z}^2}{g} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\,.
$$

Tida som kula er i lufta er ikke mulig å finne ved energiligninger. Vi må bruke uttrykket for høyden som funksjon av tida, $z(t)$, og sette $z(t) = 0$. Denne ligningen vil ha to løsninger hvorav den ene er $t = 0$ (selvfølgelig), mens den andre angir når kula treffer bakken. Med $z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ fås løsningen $t \neq 0$:

$$v_{0z} = \frac{1}{2}gt, \quad \text{eller} \quad t = 2\frac{v_{0z}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}. \tag{15}$$

Når tida er funnet, kan maksimal høyde h (istedenfor ved energiligninger) finnes fra at maksimal høyde er nådd ved halve tida for kastet, dvs ved $t_h = v_0 \sin\theta/g$. Vi får $h = z(t_h) = v_{0z}t_h - \frac{1}{2}gt_h^2$, som med energibetraktninger.

b) Lengden som kula har gått, er

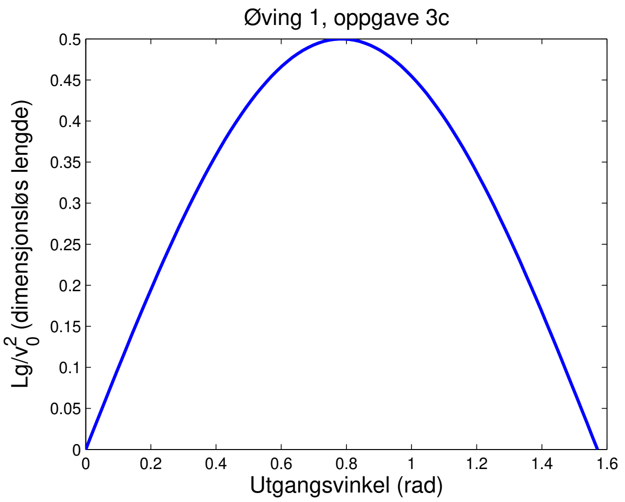
$$L = x(t) = v_{0x}t = v_0\cos\theta \cdot t = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}.$$

Maksimal verdi for L har vi når $dL/d\theta = 0$. Vi kan gjerne derivere produktet av sinus og cosinus direkte, men enklest er det vel å bruke at $\sin\theta\cos\theta = (\sin 2\theta)/2$:

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^\circ.$$

Som ventet?

c) I programmet skraattkast.m plottes ganske enkelt funksjonen $\sin\theta\cos\theta$, dvs den dimensjonsløse størrelsen $L \cdot g/2v_0^2$:



Vi ser at maksimal lengde oppnås for $\theta = 45^\circ$.