FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1

Taperullens volum er

$$V = (\pi R^2 - \pi (aR)^2) \cdot b = \pi R^2 b(1 - a^2),$$

der b er taperullens bredde. Masse pr volumenhet er dermed

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 b(1 - a^2)}.$$

Taperullens treghetsmoment må være treghetsmomentet til en rull uten hull i midten minus treghetsmomentet til det som er fjernet for å lage hullet. For kompakte skiver/sylindre med masse m og radius r har vi at $I = mr^2/2$, så vi har for taperullen

$$I_0 = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 b \cdot R^2 - \frac{1}{2}\rho\pi (aR)^2 b \cdot (aR)^2 = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{1 - a^4}{1 - a^2} = \frac{a^2 + 1}{2}MR^2.$$

Oppgave 2

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $ML^2/3$ (se øving 8). En ekstra masse m i avstand l gir ganske enkelt et ekstra bidrag ml^2, slik at

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + ml^2.$$

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\boldsymbol{p}_i = mv\hat{x}.$$

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls om A, dens *banedreieimpuls* om A er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i = -l\hat{y} \times mv\hat{x} = mvl\hat{z}.$$

Med impuls i x-retning bidrar ikke x-komponenten av $\boldsymbol{r}$ til dreieimpulsen.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment om A som påvirker systemet, og dreieimpulsen om A er bevart: $\boldsymbol{L}_f = \boldsymbol{L}_i = mvl\hat{z}$.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvl mhp A rett etter sammenstøtet. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}}{I} = \frac{v/l}{1 + ML^2/3ml^2}\,\hat{z}.$$

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x-retning:

$$\boldsymbol{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\boldsymbol{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\boldsymbol{v} = \omega L\hat{x}$ helt nederst ($y = -L$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega L\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega L\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega l\hat{x}$. Følgelig:

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\frac{1}{2}ML + ml\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting for ω fra e) gir

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{mv + MvL/2l}{1 + ML^2/3ml^2}\,\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i\,\frac{1 + ML/2ml}{1 + ML^2/3ml^2}.$$

Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{ML/2ml}{ML^2/3ml^2} = \frac{3l}{2L}.$$

Dermed: Hvis $l > 2L/3$, er $p_f > p_i$. Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\boldsymbol{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\boldsymbol{F}\cdot\Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)
Tilsvarende: Hvis $l < 2L/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.
Treffer kula nøyaktig i $l = 2L/3$, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.
(I det *videre forløpet* har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

g) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + \frac{1}{2}\int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}\int_{-L}^{0}\frac{M\,dy}{L}\omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{6}ML^2\right)\frac{(v/l)^2}{(1 + ML^2/3ml^2)^2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{K_i}{1 + ML^2/3ml^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3ml^2/ML^2}.$$

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \to \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

Oppgave 3

a) I løpet av sammenkoblingen av de to skivene ("clutchlamellene") virker det ingen ytre krefter på systemet. Det betyr at både impuls og dreieimpuls er bevart. (Impulsen er null både før og etter sammenkoblingen.) Med rotasjonsakse langs z-aksen har vi $L_z^i = I_0\omega_i$ før og $L_z^f = 2I_0\omega_f$ etter sammenkoblingen. Setter vi $L_z^i = L_z^f$, finner vi at $\omega_f = \omega_i/2$.

b) Kinetisk energi før sammenkobling er $K_i = I_0\omega_i^2/2$, etter sammenkobling er den $K_f = 2I_0(\omega_i/2)^2/2 = K_i/2$. Endringen i kinetisk energi er dermed $\Delta K = K_f - K_i = -K_i/2 = -I_0\omega_i^2/4$.

Oppgave 4

a) Prosjektilets treghetsmoment:

$$I_0 = \frac{1}{2}m(d/2)^2 = 0.5 \cdot 13.0 \cdot 10^{-3} \cdot (5.0 \cdot 10^{-3})^2 = 1.625 \cdot 10^{-7} \simeq 1.6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

b) Skiva uten absorberte prosjektil har treghetsmoment $MR^2/2$. Hvert prosjektil har treghetsmoment mr^2. Totalt treghetsmoment for skive pluss N absorberte prosjektil blir dermed

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Nmr^2.$$

c) Dreieimpulsen til skive pluss N absorberte prosjektil er

$$L_z = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + Nmr^2\right)\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + Nmr^2\right) \cdot 2\pi/T.$$

Dreieimpulsens z-komponent endres ikke når et prosjektil treffer skiva. (Eventuelle ytre krefter, fra akslingen på skiva, vil alltid angripe skiva *på* z-aksen og kan derfor ikke gi opphav til noen z-komponent i et ytre dreiemoment $\boldsymbol{\tau}$. Vi ser imidlertid at det innkommende prosjektilet i den midterste figuren i oppgaveteksten har en *banedreieimpuls* $L_y = rmv$ (der v er prosjektilets hastighet), og siden skiva med absorberte prosjektil ikke har noen L_y, *må* det i kollisjonene være ytre krefter fra akslingen på skiva som gir opphav til en $-\tau_y$, dvs et dreiemoment i negativ y-retning.) Men, altså: L_z er bevart, og dermed har vi

$$L_0 = \frac{L_z}{N} = \left(2mr^2 + MR^2/N\right)\pi/T,$$

mens prosjektilets vinkelhastighet er $\omega_0 = L_0/I_0$.
Med oppgitte tallverdier $M = 1.00$ kg, $R = 0.600$ m, $r = 0.500$ m og $T = 43.6$ s finner vi

$$f_0[RPM] = 60\omega_0/2\pi = \ldots = 1.80 \cdot 10^5.$$

Oppgave 5

a) Snordraget er $m_1 g$, og dette er kraften som holder kula med masse m i sirkulær bane med vinkelhastighet ω_1 og radius r_1, dvs (sentripetal-)akselerasjon $r_1\omega_1^2$:

$$\begin{aligned} m_1 g &= m r_1 \omega_1^2 \\ \Rightarrow r_1 &= \frac{m_1 g}{m\omega_1^2}. \end{aligned}$$

b) Vi skal nå fastlegge to størrelser, ny radius $r_2 < r_1$ og ny vinkelhastighet $\omega_2 > \omega_1$. Til dette trenger vi to ligninger, og det har vi: Ny snorkraft $(m_1 + m_2)g$ må tilsvare m ganget med ny sentripetalakselerasjon,

$$(m_1 + m_2)g = m r_2 \omega_2^2,$$

og samtidig må dreieimpulsen mhp hullets posisjon være bevart (siden tillegget i snordraget ikke har noen arm mhp hullets posisjon), $L_i = L_f$, med

$$\begin{aligned} L_i &= m r_1 v_1 = m r_1^2 \omega_1, \\ L_f &= m r_2 v_2 = m r_2^2 \omega_2. \end{aligned}$$

Fra ligningen med snordraget involvert har vi

$$r_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{m\omega_2^2}.$$

Fra $L_i = L_f$ har vi

$$r_2 = r_1(\omega_1/\omega_2)^{1/2},$$

og kombinerer vi disse to uttrykkene for r_2, kan vi bestemme ω_2:

$$\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^{2/3}.$$

Denne innsatt i et av uttrykkene for r_2 gir endelig

$$r_2 = r_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^{1/3}.$$

c) Den enkleste måten å bestemme arbeidet W_s på er å regne ut endringen i kulas kinetiske energi:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m r_1^2 \omega_1^2 = \frac{m_1^2 g^2}{2m\omega_1^2}, \\ K_f &= \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m r_2^2 \omega_2^2 = K_i \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^{4/3} = K_i \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^{2/3}, \end{aligned}$$

slik at

$$W_s = \Delta K = K_f - K_i = K_i \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^{2/3} - 1\right].$$