FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1

a) Treghetsmomentet om en akse gjennom CM er $I_0 = MR^2/2$ for ei slik skive (se tidligere øvinger, evt forelesningsnotater). Steiners sats gir deretter treghetsmomentet om aksen gjennom A:

$$I = I_0 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

b) Bevegelsesligning for en fysisk pendel med treghetsmoment I og avstand R mellom opphengningspunktet A og tyngdepunktet ($\tau = I\,\ddot{\theta}$):

$$-mgR\sin\theta = I\,\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgR}{I}\sin\theta = 0.$$

For en matematisk pendel med lengde L ($F = ma = mL\ddot{\theta}$):

$$-mg\sin\theta = mL\,\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Skal disse to ha samme svingetid, må lengden L være

$$L = \frac{I}{mR} = \frac{3R}{2}.$$

Oppgave 2

a) Kraften som angriper nederste ende av staven er fjærkraften $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{s}$, der $\boldsymbol{s}$ er utsvinget til stavens nedre ende når den er dreid en vinkel θ (Med $\theta > 0$ i figuren i oppgaveteksten.) Utsvinget til stavens nedre ende er

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \quad ; \quad y = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)\,.$$

For små utsving er $\sin\theta \simeq \theta$ og $\cos\theta \simeq 1$, slik at

$$x \simeq \frac{L\theta}{2} \quad ; \quad y \simeq 0,$$

som betyr at fjærkraften med god tilnærmelse blir

$$F \simeq -kx \simeq -\frac{kL\theta}{2}.$$

Denne kraftens dreiemoment mhp A er

$$\tau = F \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\theta \simeq \frac{FL}{2} \simeq -\frac{kL^2\theta}{4},$$

og i følge "N2 for rotasjon" har vi

$$\tau = I_0\alpha = I_0\ddot{\theta} = \frac{1}{12}ML^2\,\ddot{\theta}.$$

(Treghetsmomentet om aksen gjennom CM til en lang stav, $I_0 = ML^2/12$, har vi regnet ut tidligere.) Dermed:

$$-\frac{kL^2\theta}{4} = \frac{1}{12}ML^2\,\ddot{\theta},$$

som er ligningen for en harmonisk oscillator,

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

med

$$\omega^2 = \frac{kL^2/4}{ML^2/12} = \frac{3k}{M},$$

dvs med periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}.$$

b) Tyngdekraften angriper i CM og har dermed ingen arm mhp aksen gjennom A. Da bidrar tyngdekraften ikke til dreiemomentet mhp A, og vi kan ganske enkelt se bort fra den.

Oppgave 3

a) Vi regner ut treghetsmomentet I_0 mhp en akse normalt på fjøla gjennom CM ved å starte fra definisjonen $I_0 = \int \rho^2 dm$, der ρ er avstanden fra aksen til masseelementet dm, dvs $\rho^2 = x^2 + y^2$, der x angir posisjonen i lengderetningen (vertikalt) og y angir posisjonen i bredderetningen (horisontalt). Masseelementet dm utgjør en andel $dx \cdot dy \cdot dz/Lba$ av stavens totale masse M når dets volum er $dx \cdot dy \cdot dz$ og hele stavens volum er Lba. Følgelig:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+y^2)\cdot M\cdot\frac{dx\,dy\,dz}{Lba} \\
&= \frac{M}{Lba}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-b/2}^{b/2}|_{-a/2}^{a/2}(zx^2+zy^2)dx\,dy \\
&= \frac{M}{Lba}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-b/2}^{b/2}(ax^2+ay^2)dx\,dy \\
&= \frac{M}{Lb}\int_{-L/2}^{L/2}|_{-b/2}^{b/2}(yx^2+y^3/3)dx \\
&= \frac{M}{Lb}\int_{-L/2}^{L/2}(bx^2+b^3/12)dx \\
&= \frac{M}{L}|_{-L/2}^{L/2}(x^3/3+xb^2/12) \\
&= \frac{M}{L}(L^3/12+Lb^2/12) \\
&= \frac{1}{12}M(L^2+b^2).
\end{aligned}$$

Steiners sats gir deretter $I(x)$, dvs treghetsmomentet mhp en akse normalt på fjøla i avstand x fra CM:

$$I(x) = I_0 + Mx^2 = \frac{1}{12}M(L^2+b^2) + Mx^2.$$

b) Svingeperioden $T(x)$ for svingninger omkring aksen gjennom x er:

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{I(x)}{Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{(L^2+b^2)/12+x^2}{gx}}.$$

c) Grensetilfeller:

$$T(x \gg L) \simeq 2\pi\sqrt{x/g},$$
$$T(x \ll L) \simeq \pi\sqrt{(L^2+b^2)/3gx} \xrightarrow{x\to 0} \infty.$$

Den første av disse er svingeperioden for en matematisk pendel med lengde x, noe som er rimelig når $x \gg L$. Når $x \to 0$, er pendelen hengt opp på midten, og den svinger ikke i det hele tatt.

d) Vi setter inn tallverdier for L, x og g, og legger utregnede verdier for $T(x)$ inn i tabellen:

x (mm)	$T_{\text{exp}}(x)$ (s)	$T(x)$ (s)
15	4.0	4.47
153	1.54	1.60
272	1.46	1.48
428	1.56	1.56

Vi noterer at det er brukbart samsvar mellom teori og eksperiment!

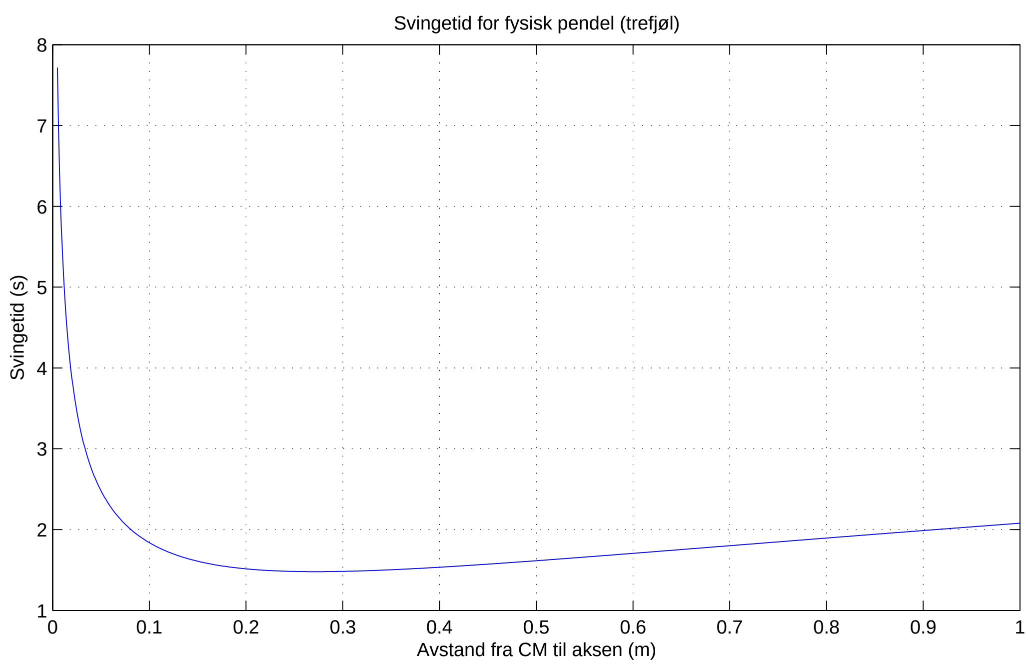
Siden b er mye mindre enn L, blir det praktisk talt ingen forskjell på resultatene om vi setter $b = 0$. Vi gjør dette for å forenkle utregningen av minimal svingetid:
Minimal svingetid har vi når $dT/dx = 0$. Litt enklere er det her å regne ut $(g/4\pi^2)dT^2/dx$ og sette denne lik null:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{L^2}{12x} + x\right) = -\frac{L^2}{12x^2} + 1 = 0,$$

dvs

$$x = \frac{L}{\sqrt{12}} \simeq 0.289L = 272\,\text{mm}.$$

Dette er presis posisjonen til det nest øverste hullet, og både eksperimentelt og teoretisk finner vi minste T-verdi med aksen her. Grafen for $T(x)$:



Oppgave 4

a) På resonans, $\omega = \omega_0$, har vi

$$A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

Med $\phi(\omega_0) = 0$ har vi da

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{b\omega_0}\sin\omega_0 t, \\ \dot{x} &= \frac{F_0}{b}\cos\omega_0 t, \\ \ddot{x} &= -\frac{F_0\omega_0}{b}\sin\omega_0 t, \end{aligned}$$

og innsetting i bevegelsesligningen $(-kx - b\dot{x} + F_0\cos\omega_0 t = m\ddot{x})$ gir

$$\begin{aligned} -\frac{kF_0}{b\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{bF_0}{b}\cos\omega_0 t + F_0\cos\omega_0 t &= -\frac{mF_0\omega_0}{b}\sin\omega_0 t \\ \Rightarrow \frac{k}{\omega_0} &= m\omega_0 \\ \Rightarrow \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \end{aligned}$$

som jo stemmer.

b) På resonans er kvadratet av amplituden

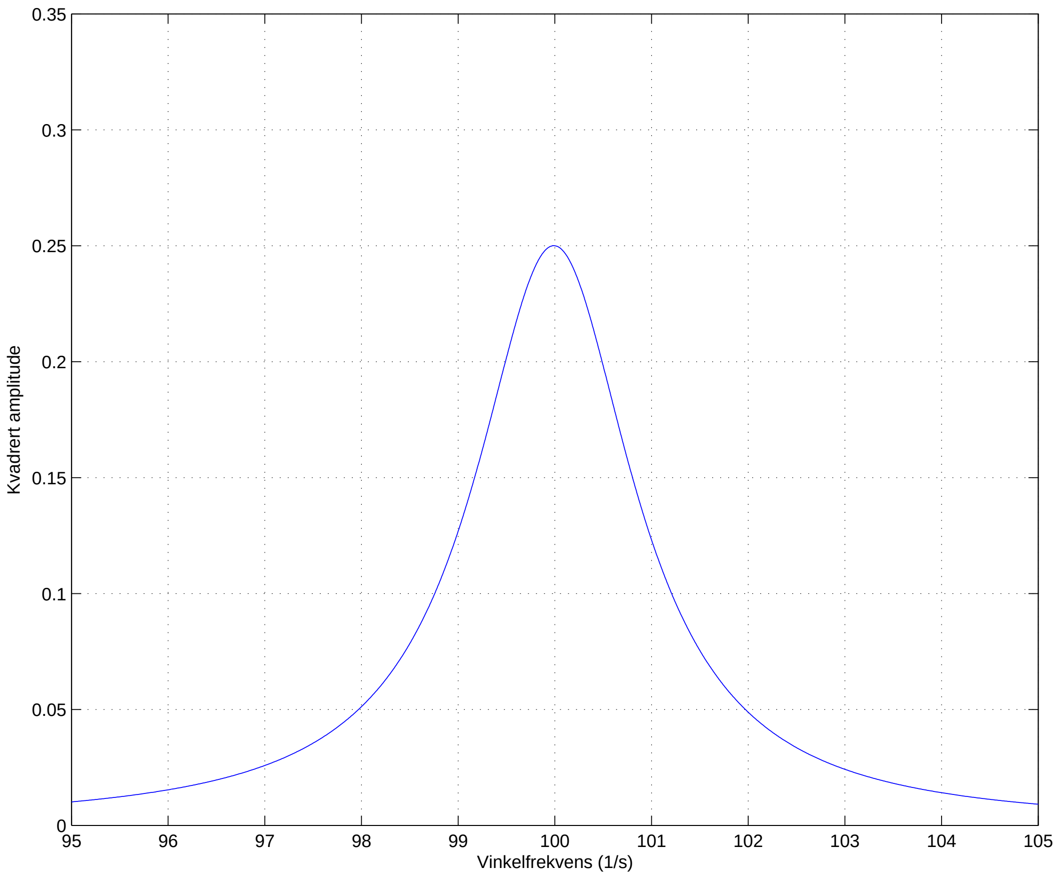
$$A_{\max}^2 = \frac{(F_0/m)^2}{4\gamma^2\omega_0^2}.$$

På "resonans pluss/minus halve halvverdibredden", dvs for $\omega = \omega_0 \pm \gamma$, har vi

$$\begin{aligned} A^2(\omega_0 \pm \gamma) &= \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 \pm 2\omega_0\gamma + \gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 \pm 2\omega_0\gamma + \gamma^2)} \\ &= \frac{(F_0/m)^2}{4\omega_0^2\gamma^2 \pm 4\omega_0\gamma^3 + \gamma^4 + 4\omega_0^2\gamma^2 \pm 8\omega_0\gamma^3 + 4\gamma^4} \\ &\simeq \frac{(F_0/m)^2}{8\omega_0^2\gamma^2} \\ &= \frac{1}{2}A_{\max}^2. \end{aligned}$$

Her har vi beholdt de to største leddene i nevneren, begge proporsjonale med $\omega_0^2\gamma^2$, mens vi har neglisjert resten av leddene, siden disse er enten en faktor γ/ω_0 eller en faktor $(\gamma/\omega_0)^2$ mindre enn de to største.

c) Resonanstoppen med oppgitte tallverdier:



Vi leser av en halvverdibredde på 2 s^{-1}, som nettopp er verdien av 2γ.