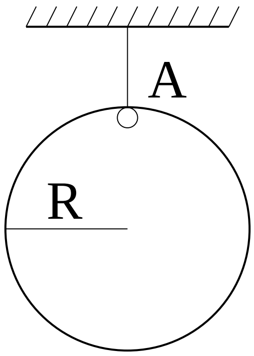
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.
Veiledning: 13. - 16. november. Innleveringsfrist: Onsdag 21. november kl 14.

Øving 12

Oppgave 1: Svingende skive

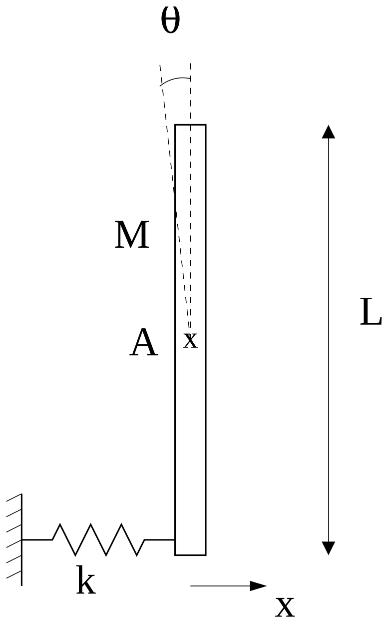


Ei flat og jevntykk skive med masse M og radius R kan svinge friksjonsfritt om en akse normalt på skiva gjennom punktet A på periferien.

a) Finn et uttrykk for skivas treghetsmoment I mhp aksen gjennom A. (Tips: Steiners sats.)

b) Hvor lang er en matematisk pendel med samme svingetid som denne skiva?

Oppgave 2: Fjærdrevet pendelbevegelse



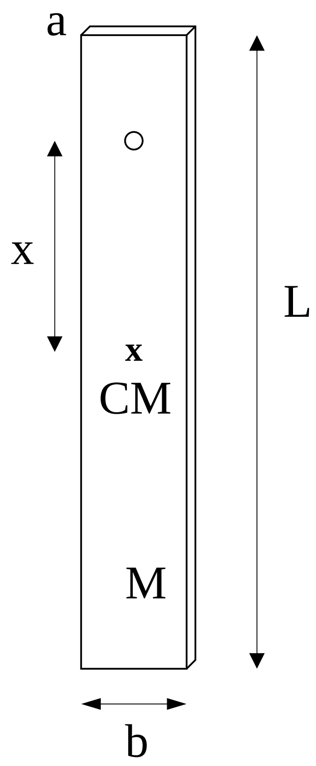
En tynn, uniform stav med masse M og lengde L kan rotere uten friksjon om en akse normalt på staven gjennom stavens midtpunkt A. Stavens nederste ende er festet til ei fjær med fjærkonstant k. Fjæras andre ende holdes fast. Systemet er i likevekt når staven står vertikalt. Staven vris en liten vinkel θ_0 og slippes.

a) Vis at vinkelen $\theta(t)$ oppfyller ligningen for en harmonisk oscillator, med periode $T = 2\pi\sqrt{M/3k}$.

b) Hvorfor var det ikke nødvendig å ta hensyn til tyngdekraften i punkt a)?

Oppgitt: $I = \int \rho^2 dm$; $\tau = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$; $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ når $\theta \ll 1$.

Oppgave 3: Svingende trefjøl



Den svingende trefjøla vist på forelesning har lengde $L = 942$ mm, bredde $b = 53$ mm, tykkelse $a = 8$ mm, og hull i ulike avstander x fra tyngdepunktet (CM) midt på fjøla, se tabell nedenfor. I tabellen er det også angitt målte svingetider $T_{\text{exp}}(x)$ når fjøla svinger om en akse gjennom hullet i posisjon x. (For den ene lange svingetiden er usikkerheten forholdsvis stor, siden svingebevegelsen ble raskt dempet ned.)

x (mm)	$T_{\text{exp}}(x)$ (s)	$T(x)$ (s)
15	4.0	...
153	1.54	...
272	1.46	...
428	1.56	...

a) Vis at fjølas treghetsmoment mhp en akse normalt på fjøla gjennom CM er

$$I_0 = \frac{1}{12} M(L^2 + b^2).$$

Bruk Steiners sats og finn et uttrykk for $I(x)$, dvs fjølas treghetsmoment mhp en akse normalt på fjøla i avstand x fra CM (se figur).

b) Finn et uttrykk for fjølas svingeperiode $T(x)$ når den kan svinge friksjonsfritt omkring en akse i avstand x fra CM. (Bruk gjerne resultater fra oppgave 1.)

c) Sjekk at svaret i b er fornuftig for spesialtilfellene $T(x \gg L)$ og $T(x \ll L)$.

d) Regn ut tallverdier for $T(x)$ for verdier av x gitt i tabellen ovenfor. Regn ut hvilken verdi av x som gjør svingetiden T minimal. Sammenlign med de målte verdiene. Bruk MATLAB til å lage en figur med grafen for $T(x)$.

Tips: Kapittel 5 i labheftet kan være til hjelp i denne oppgaven.

Oppgave 4: Resonans og halvverdibredde

Utsvinget til en endimensjonal dempet harmonisk oscillator, som drives med en ytre kraft $F_0 \cos \omega t$, er

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)),$$

med frekvensavhengig amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}.$$

Her er $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = b/m$, og dempingskraften er $-b\dot{x}$, dvs proporsjonal med og motsatt rettet hastigheten $\dot{x}$.

a) Dersom oscillatoren drives på resonans, dvs med $\omega = \omega_0$, forsvinner fasekonstanten, $\phi(\omega_0) = 0$, slik at ytre kraft og oscillatorens hastighet svinger i fase, og tilført effekt blir maksimal. Vis at det oppgitte uttrykket for amplituden A stemmer når oscillatoren drives på resonans. Tips: Regn ut hastighet og akselerasjon og sett inn i bevegelsesligningen (dvs N2).

b) På forelesning slo vi ganske enkelt fast at for svak demping, dvs $\gamma \ll \omega_0$, er resonanstoppens halvverdibredde $\Delta\omega = 2\gamma$. Halvverdibredden defineres her som differansen $\omega_2 - \omega_1$, der $A^2 = A_{\mathrm{max}}^2/2$ både for $\omega = \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2$ og for $\omega = \omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2$. Vis dette ved å regne ut A^2 for $\omega = \omega_0$, ω_1 og ω_2. Tips: Utnytt opplysningen om svak demping, samt at utsvinget er maksimalt nettopp på resonans.

c) Bruk MATLAB til å plotte $A^2(\omega)$ for en svakt dempet oscillator med masse 0.1 kg, fjærkonstant 1000 N/m og dempingskonstant $b = 0.2$ Ns/m. Bruk f.eks. kraftamplitude $F_0 = 10$ N. Les av halvverdibredden $\Delta\omega$ fra figuren og sammenlign med den "teoretiske" verdien 2γ.

Fasit: $1b : 3R/2$