FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 13

Oppgave 1

a) Vinkelfrekvensen er (antar matematisk pendel, men det spiller ingen rolle, det er bare avhengigheten av g som teller her) $\omega = \sqrt{g/L}$, så perioden er $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Ved høyde h over havet er tyngdens akselerasjon

$$g(h) = GM/(R+h)^2.$$

Dermed:

$$T(h) = T(0)(1 + h/R).$$

b) Med $h = 630$ m og $R = 6378000$ m blir relativ forsinkelse lik $h/R = 3.14 \cdot 10^{-5}$, dvs absolutt forsinkelse ca 1 minutt.

Oppgave 2

Ved uniform sirkelbevegelse er akselerasjonen ren sentripetalakselerasjon v^2/r, og eneste kraften som virker er gravitasjonskraften $G \cdot Mm/r^2$. N2 gir

$$\Sigma F = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Radien r er avstanden fra jordsentrum, som ved starten A og ved slutten B er lik henholdsvis

$$\begin{aligned} r_A &= R + h_A = 6378\,\text{km} + 8000\,\text{km} = 14378\,\text{km} \\ r_B &= R + h_B = 6378\,\text{km} + 650\,\text{km} = 7028\,\text{km}\,. \end{aligned}$$

Får ofte bruk for og beregner derfor: $GM = 6.6742 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg}\,\text{s}^2) \cdot 5.974 \cdot 10^{24}\text{kg} = 3.9870 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2$.

a) Endring i hastighet:
For den videre regning kan det være lurt å beregne hastighetene v_A og v_B separat og ikke bare differansen:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2}{14378 \cdot 10^3\,\text{m}}} = 5265.9\,\text{m/s} \\ v_B &= \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2}{7028 \cdot 10^3\,\text{m}}} = 7531.9\,\text{m/s} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta v = v_B - v_A = +2266\,\text{m/s}}\,.$$

Hastigheten øker altså.

b) Endring i kinetisk energi:

$$\left.\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_A} = 6.9325 \cdot 10^{10}\,\text{J} \\ K_B &= \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_B} = 14.183 \cdot 10^{10}\,\text{J} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta K = K_B - K_A = +7.254 \cdot 10^{10}\,\text{J}}\,.$$

c) Endring i potensiell energi:

$$\left.\begin{array}{rcl} U_A &=& -m\dfrac{GM}{r_A} = -2\cdot K_A = -13.865\cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \\ U_B &=& -m\dfrac{GM}{r_B} = -2\cdot K_B = -28.366\cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta U = U_B - U_A = -2\cdot\Delta K = -14.50\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,.$$

Potensiell energi (relativt ∞) har alltid dobbelt verdi av kinetisk energi. Dette gjelder for alle sirkulære baner i gravitasjonsfelt. Når banen er elliptisk, varierer kinetisk og potensiell energi under omløpet.

d) Endring i totalenergi:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta K - 2\cdot\Delta K = -\Delta K = \underline{-7.254\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,.$$

Eller med mer regnearbeid:

$$\begin{aligned} E_A &= K_A + U_A = -\frac{1}{2}m\frac{GM}{r_A} = -6.9325\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\,, \\ E_B &= K_B + U_B = -\frac{1}{2}m\frac{GM}{r_B} = -14.183\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\,. \\ \Delta E = E_B - E_A &= -\frac{1}{2}mGM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \underline{-7.254\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,. \end{aligned}$$

En stor porsjon potensiell energi er tapt, halvparten av tapet er overført til kinetisk energi, resten friksjonsarbeid.

Oppgave 3

a) Gravitasjonskraften må være lik sentripetalkraften ved omløpstid $T = 24\,\mathrm{h} = 24\cdot 3600\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s}$:

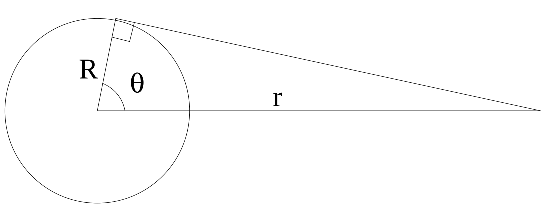
$$\Sigma F = ma = m\omega^2 r \quad\Rightarrow\quad G\frac{mM}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$r = \left(GM\cdot\frac{T^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = \left(6.6742\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot\frac{(86400\,\mathrm{s})^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = 42246\,\mathrm{km}\,,$$

som er snaut 7 jordradier. Høyden over jordoverflaten er da

$$h = r - R = 42246\,\mathrm{km} - 6378\,\mathrm{km} = \underline{35868\,\mathrm{km}}\,.$$

b)

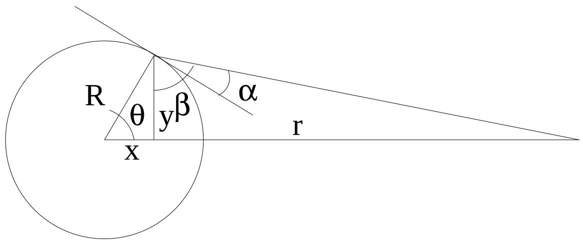


$$\cos\theta = R/r = 6378.1/42246 = 0.15098$$

$$\theta = 81.32^\circ = \underline{81^\circ 19'}.$$

$81^\circ 19'$ er like nord for nordspissen av Svalbard, så hele den befolkede verden vil ha geostasjonære satellitter tilgjengelig, med mindre et fjell skjuler sikten mot sør.

c)



I figuren er $x = R\cos\theta$ og $y = R\sin\theta$. La $\beta = \theta + \alpha$ være vinkelen mellom den vertikale linjen y på figuren og siktlinja til satellitten. Trondheims breddegrad er $\theta = 63°26' = 63.43°$. Da er

$$\tan\beta = \frac{r - x}{y} = \frac{r/R - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{42246/6378.1 - \cos 63.43°}{\sin 63.43°} = 6.906\,,$$

slik at $\beta = 81.76°$. Da er den søkte vinkelen over horisonten

$$\alpha = \beta - \theta = 81.76° - 63.43° = 18.33° = \underline{18°20'}\,.$$

Oppgave 4

Med $m = 1$ er $p = \dot{x}$. For tilfellet underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$:

$$p = Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right).$$

For tilfellet overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$:

$$p = Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\cosh\alpha t + \alpha\sinh\alpha t\right).$$

Figuren nedenfor viser (x, p)-kurver for udempet oscillator (til venstre, $A = 1$ og $A = 0.5$), underkritisk dempet oscillator (i midten, $\gamma = 0.15$, $\omega = 1$; $A = 1$ (ytterst) og $A = 0.5$ (innerst)) og overkritisk dempet oscillator (til høyre, $\gamma = 1$, $\alpha = 0.2$, $A = 1$):